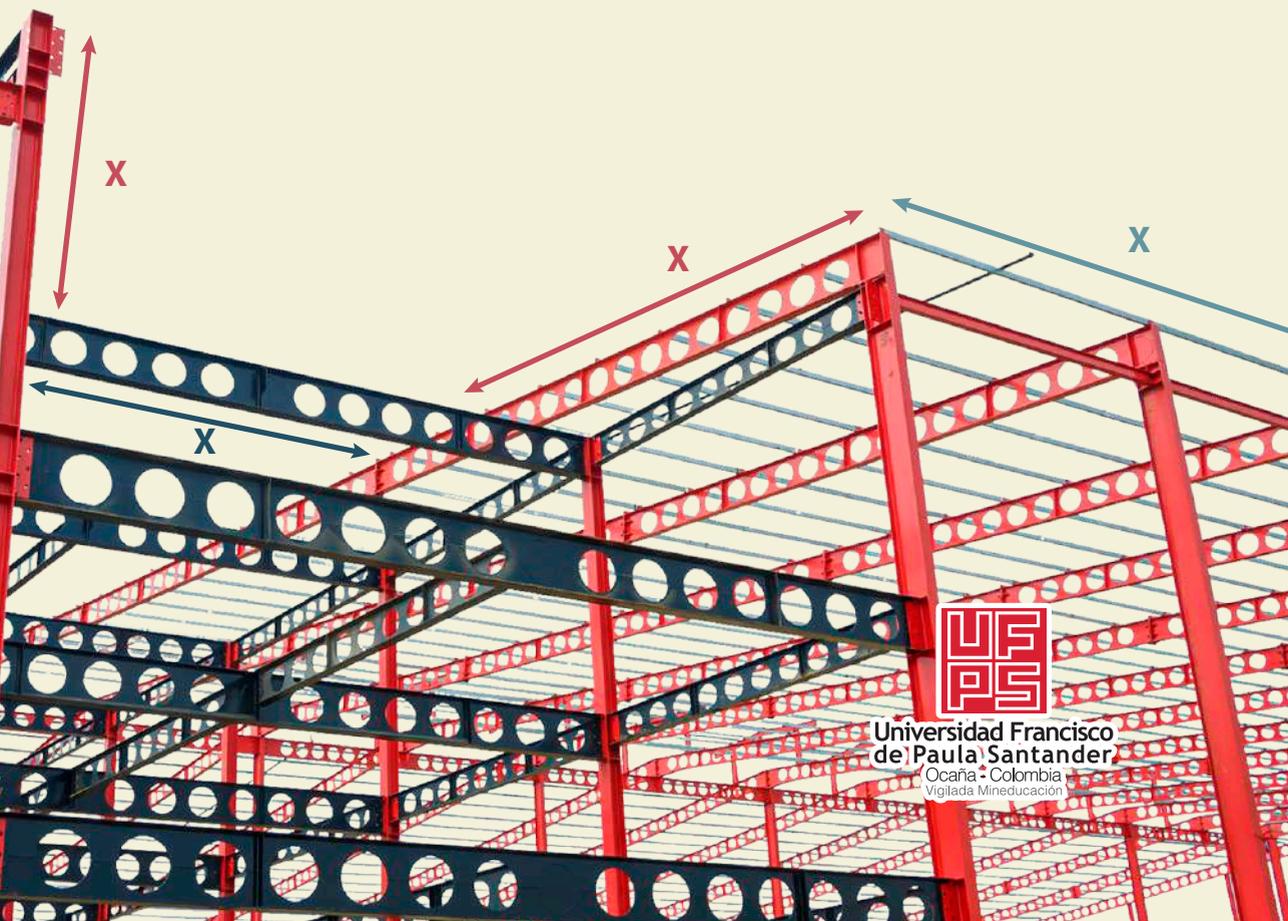


# DEFLEXIÓN EN VIGAS

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Gustavo Guerrero Gómez - Nelson Afanador García**  
**Nelson Javier Cely Calixto**



Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Ocaña - Colombia  
Vigilada Mineducación





A decorative frame made of dotted lines, forming a large rectangle with inward-pointing corners, enclosing the title and authors.

# **DEFLEXIÓN EN VIGAS**

## PROBLEMAS RESUELTOS

GUSTAVO GUERRERO GÓMEZ  
NELSON AFANADOR GARCÍA  
NELSON JAVIER CELY CALIXTO

Guerrero Gómez, Gustavo, autor

Deflexión en vigas : problemas resueltos / Gustavo Guerrero Gómez, Nelson Afanador García, Nelson Javier Cely Calixto -- Primera edición -- Ocaña, Norte de Santander : Universidad Francisco de Paula Santander ; Bogotá : Ecoe Ediciones, 2022.

83 páginas. -- (Ingeniería y afines. Ingeniería civil)

Incluye datos curriculares de los autores -- Incluye glosario -- Incluye referencias bibliográficas.

ISBN 978-958-503-562-1 -- 978-958-503-563-8 (e-book)

1. Vigas - Diseño - Problemas, ejercicios, etc. 2. Deformaciones (Mecánica) - Problemas, ejercicios, etc. I. Afanador García, Nelson, autor II. Cely Calixto, Nelson Javier, autor

CDD: 624.17723 ed. 23

CO-BoBN- a1104679

---



**Área:** Ingeniería y afines

**Subárea:** Ingeniería civil



**Universidad Francisco  
de Paula Santander**

Ocaña - Colombia  
Vigilada Mineducación

© Gustavo Guerrero Gómez  
© Nelson Afanador García  
© Nelson Javier Cely Calixto

© Universidad Francisco de Paula  
Santander seccional Ocaña  
Vía Acolsure, Sede el Algodonal  
Ocaña, Norte de Santander -  
Colombia  
Teléfono: 5690088

► Ecoe Ediciones S.A.S.  
info@ecoeediciones.com  
www.ecoeediciones.com  
Carrera 19 # 63 C 32 - Tel.: 919 80 02  
Bogotá, Colombia

**Primera edición:** Bogotá, diciembre del 2022

**ISBN:** 978-958-503-562-1  
**e-ISBN:** 978-958-503-563-8

Directora editorial: Claudia Garay Castro  
Coordinadora editorial: Paula Bermúdez B.  
Corrección de estilo: César Cardozo Duque  
Diagramación: Magda Rocío Barrero  
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz  
Impresión: Xpress Estudio Gráfico y digital  
Carrera 69 H # 77 - 40

*Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio  
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.*

*Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados*

# AGRADECIMIENTOS

*A mi madre María Elena Gómez de Guerrero y a mi padre Gustavo Guerrero Farelo.  
A mis hermanos Ivan Guerrero Gómez y Mario Guerrero Gómez.  
A la Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña.  
A Dios.*

Gustavo Guerrero Gómez

*Este trabajo es dedicado a mis hijas, hijo y a mi esposa, quien son  
el motor de mi trabajo.  
A la Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña.*

Nelson Afanador García

*Este libro está dedicado a mis hijos Yurnel, James,  
Nicolás, y a mi esposa Yurby.*

Nelson Javier Cely Calixto



# CONTENIDO

<b>PRÓLOGO</b> .....	XIII
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	XV
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	XVII
<b>CAPÍTULO 1. MÉTODO DE DOBLE INTEGRACIÓN</b> .....	1
1.1 Caso estudio .....	2
1.2 Caso estudio .....	20
<b>CAPÍTULO 2. MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN</b> .....	41
2.1 Caso estudio .....	44
2.2 Caso estudio .....	48
<b>CAPÍTULO 3. MÉTODO DE SINGULARIDAD</b> .....	63
3.1 Caso estudio .....	65
<b>EPÍLOGO</b> .....	79
<b>GLOSARIO</b> .....	81
<b>REFERENCIAS</b> .....	83



# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas .....	3
Figura 2. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas e internas	3
Figura 3. Diagrama de cuerpo libre con cargas internas y concentración de fuerzas distribuidas en la viga AC.....	4
Figura 4. Secciones a realizar a los tramos de la viga.....	5
Figura 5. Diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga al realizar la sección 1-1 .....	6
Figura 6. Diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga con fuerzas concentradas al realizar la sección 1-1 .....	6
Figura 7. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga al realizar la sección 1-1 .....	7
Figura 8. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga con fuerzas concentradas al realizar la sección 1-1 .....	7
Figura 9. Diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga al realizar la sección 2-2 .....	9
Figura 10. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga con fuerzas concentradas al realizar la sección 2-2 .....	9
Figura 11. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga al realizar la sección 2-2 .....	10
Figura 12. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga con fuerzas concentradas al realizar la sección 2-2 .....	10

Figura 13. Condiciones de frontera de deflexión y pendiente de la viga.....	12
Figura 14. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas .....	20
Figura 15. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas e internas.....	20
Figura 16. Secciones a realizar en los tramos de la viga .....	21
Figura 17. Diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga al realizar la sección 1-1 .....	21
Figura 18. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga al realizar la sección 1-1 .....	22
Figura 19. Diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga al realizar la sección 2-2 .....	26
Figura 20. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga al realizar la sección 2-2 .....	27
Figura 21. Condiciones de frontera de deflexión y pendiente de la viga.....	29
Figura 22. Elemento diferencial para obtener la magnitud de la carga distribuida.....	31
Figura 23. Ubicación del centroide de la carga distribuida.....	32
Figura 24. Diagrama de cuerpo libre con cargas internas y concentración de fuerza distribuidas en la viga AC .....	35
Figura 25. Pendiente y deflexión de una viga simplemente apoyada con carga concentrada aplicada en $(a < x < L)$ .....	42
Figura 26. Pendiente y deflexión de una viga simplemente apoyada con carga concentrada aplicada en $(0 \leq x \leq a)$ .....	42
Figura 27. Pendiente y deflexión en una viga empotrada con carga concentrada en el extremo.....	43
Figura 28. Pendiente y deflexión en una viga empotrada con momento concentrado en el extremo.....	43
Figura 29. Pendiente y deflexión en una viga empotrada con carga distribuida.....	44
Figura 30. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas .....	44
Figura 31. Deflexión del punto E perteneciente a la viga .....	45
Figura 32. Subsistema de fuerzas que se generan en la viga.....	45
Figura 33. Subsistema I de la viga simplemente apoyada, soportando una carga concentrada en el punto B .....	46
Figura 34. Subsistema II de viga simplemente apoyada, soportando una carga concentrada en el punto C .....	47
Figura 35. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas .....	48

Figura 36. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas e internas.....	49
Figura 37. Fuerzas externas y redundantes que actúan en la viga.....	50
Figura 38. Condiciones de frontera de deflexión y pendiente en la redundante de la viga.....	50
Figura 39. Subsistema de fuerzas que se generan en la viga.....	51
Figura 40. Subsistema I de la componente vertical de la fuerza $A_y$ de la redundante.....	52
Figura 41. Subsistema II del momento $MA$ de la redundante.....	53
Figura 42. Subsistema III de la fuerza externa concentrada $P$ .....	54
Figura 43. Triángulo rectángulo formado entre los puntos $A$ y $B$ del subsistema III.....	55
Figura 44. Subsistema IV de carga externa uniformemente distribuida $w$ ....	57
Figura 45. Triángulo rectángulo formado entre los puntos $A$ y $C$ del subsistema IV.....	58
Figura 46. Funciones de singularidad de diversas cargas.....	64
Figura 47. Diagrama de cuerpo libre de la viga $AH$ con cargas externas y apoyos.....	65
Figura 48. Subdivisión de la carga distribuida trapezoidal.....	65
Figura 49. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas e internas.....	65
Figura 50. Diagrama de cuerpo libre con cargas internas y concentración de fuerzas distribuidas en la viga $AH$ .....	66
Figura 51. Acondicionamiento de la carga distribuida trapezoidal que actúa en la viga $AH$ .....	68
Figura 52. Acondicionamiento de la carga distribuida uniforme que actúa desde el punto $E$ al punto $G$ .....	68
Figura 53. Acondicionamiento de la carga distribuida triangular que actúa desde el punto $E$ al punto $G$ .....	69
Figura 54. Relación de triángulos semejantes formados entre los puntos $E$ y $G$ con $E$ y $H$ .....	70
Figura 55. Carga distribuida trapezoidal dirigida hacia arriba.....	71
Figura 56. Acondicionamiento de la carga distribuida trapezoidal que actúa desde el punto $G$ al punto $H$ .....	71
Figura 57. Relación de cargas distribuidas.....	72
Figura 58. Acondicionamiento de la viga completa.....	73
Figura 59. Deflexiones en los puntos $D$ y $H$ .....	77





# PRÓLOGO



El libro tiene como objeto suministrar a los estudiantes de ingeniería a los cuales se les imparte la asignatura de mecánica de materiales o resistencia de materiales y que hayan cursado la asignatura estática de los métodos fundamentales para la determinación de deflexiones y pendientes en vigas incluyendo el análisis de vigas estáticamente indeterminadas.

En cada capítulo del libro se presentan problemas modelo y aplicaciones de casos en los que se muestra un análisis de conceptos básicos como las condiciones de equilibrio de las fuerzas ejercidas sobre las vigas, las condiciones impuestas por los apoyos, los métodos de evaluación de deflexiones y las condiciones de frontera, los cuales fueron diseñados para fortalecer la comprensión del tema por parte de los estudiantes.

Algunos problemas describen situaciones reales de la práctica de la ingeniería que estimulan el interés por parte del estudiante en el tema, desarrollando en él la habilidad de partir de una descripción física a un modelo o representación simbólica, creando en el estudiante capacidades de abstracción, el desarrollo de habilidades de representación y la comprensión de los principios básicos de la resistencia de materiales. Los problemas se han agrupado de acuerdo con las secciones del libro y se han organizado en orden ascendente respecto a la dificultad.

En el desarrollo del libro se aplican temas de asignaturas anteriores como cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y los diagramas de cuerpo libre para determinar las fuerzas internas o externas. En la solución de los problemas se aplicarán métodos vectoriales y cuando estos no ofrezcan ventaja se utilizará un método escalar.



# INTRODUCCIÓN

La deflexión es uno de los aspectos más importantes en el diseño de las vigas y es así que en el diseño de estas se da a conocer el máximo valor admisible para la deflexión. Además, se utiliza con la pendiente en el análisis de vigas indeterminadas donde el número de reacciones en los apoyos es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio con el que se cuenta para determinar las incógnitas que generan los apoyos a las vigas.

Existen diversos métodos para la determinación de la deflexión y pendiente de una curva elástica en vigas debido a la aplicación de cargas transversales y a la solución de situaciones estáticamente indeterminadas, la temática del libro abordara esas dos situaciones y tiene la siguiente estructuración: en el primer capítulo se analizará el método de doble integración, el cual requiere conocer las ecuaciones del momento flector en todos los tramos o porciones de la viga en el que la integral, del momento en cada tramo, proporcionará la ecuación de la pendiente, mientras que la segunda integral proporcionará la ecuación de la deflexión en cada tramo, en ambas integrales aparecerán constantes de integración que se determinarán con las condiciones de frontera. Al finalizar el capítulo se presentará el estudio de caso de una viga con una carga distribuida variable en la que, para encontrar la ecuación de la curva elástica, se harán cuatro integraciones sucesivas a las cargas distribuidas aplicadas en cada tramo encontrando las integrales las ecuaciones de la fuerza cortante en orden de aplicación, el momento flector, la pendiente y la curva elástica en todos los tramos de la viga.

En el capítulo 2 se aplicará el método de superposición que consiste en determinar por separado la pendiente y deflexión de la curva elástica provocadas por la aplicación de diferentes cargas en la viga para después sumar las pendientes que provocó cada fuerza, lo mismo se hace con las deflexiones, además, se usa para el análisis de vigas estáticamente indeterminadas, es decir, apoyadas de manera que las reacciones en los apoyos proporcionan más incógnitas que ecuaciones de equilibrio. Con las condiciones de frontera de la viga se encuentran ecuaciones adicionales debido a las condiciones de frontera impuestas por los apoyos para llegar a un sistema de ecuaciones con el mismo número de incógnitas.

En el capítulo 3 se estudiarán las funciones de singularidad que reducen el procedimiento para la evaluación de pendientes y la deflexión de la curva elástica de la viga, ya que se requiere de la evaluación de la ecuación del momento flector para toda la viga y no de sus ecuaciones ni de la determinación de las constantes de integración en cada tramo como sí se requería en el método de doble integración. El análisis de este método solo requiere aplicar dos integrales sucesivas a la variación del momento flector en toda la viga y la determinación de solo dos constantes de integración.

# LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área
C	Centroide, constantes de integración
d	Distancia, diámetro, profundidad
h	Distancia, altura
H	Fuerza
i, j, k	Vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados
I	Momento de inercia
L	Longitud, claro
M	Momento flector
O	Origen de coordenadas
P	Fuerza, carga concentrada
r	Radio
R	Fuerza resultante, vector resultante
V	Fuerza cortante
x, y, z	Coordenadas rectangulares, distancia, desplazamientos
Y	Deformación, deflexión, desplazamiento



## CAPÍTULO 1

# MÉTODO DE DOBLE INTEGRACIÓN

En este capítulo se determinan las pendientes y deflexiones en vigas, ya que en su diseño se tiene en cuenta el valor máximo permisible para la deflexión y también el análisis de vigas indeterminadas que se establecen con el uso de condiciones de frontera “Cuando una viga con eje longitudinal recto está cargada con fuerzas laterales, el eje se deforma y toma una forma curva, llamada curva de deflexión de la viga” (Gere, 2010, p. 594).

Para determinar la pendiente y la deflexión de la viga para cualquier posición se encuentra la curva elástica, o forma de la viga deformada, que está dada por la ecuación diferencial ordinaria, lineal, de segundo orden.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1)$$

Donde el producto del módulo de elasticidad del material de la viga y el momento de inercia de la sección transversal, respecto al eje centroidal horizontal  $EI$ , es el módulo de rigidez a flexión, la cual varía a lo largo de la viga. Si esta es de sección variable, el módulo debe expresarse como una función de la variable  $x$  antes de integrar la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Para el análisis de este capítulo la rigidez a flexión es constante debido a que se consideraran vigas prismáticas.

Si el momento flector se representa por una ecuación  $M(x)$  que incluya la longitud de la viga para todos los valores de  $x$ , la pendiente en cualquier posición de la viga se determina integrando la ecuación del momento flexionante.

$$EI\theta(x) = \int M(x)dx + C_1 \quad (2)$$

La deflexión en cualquier punto de la viga puede hallarse al integrar dos veces la ecuación del momento flexionante o integrando la ecuación de la pendiente.

$$EIy(x) = \int \left[ \int M(x)dx + C_1 \right] dx + C_2 \quad (3)$$

“Para la determinación de las dos constantes de integración deben prescribirse condiciones de frontera” (Popov, 2000, p. 590) o de las condiciones impuestas en la viga por sus apoyos, por ejemplo, en vigas con apoyos fijos y móviles la deflexión es nula, obteniendo por cada apoyo una ecuación que se utiliza para resolver las constantes de integración. En vigas con un empotramiento se tiene que la pendiente y la deflexión son nulas, obteniendo dos ecuaciones para resolver las constantes de integración.

“Si se conoce la ecuación de la elástica, las otras cantidades físicas de esa viga se determinan por derivaciones sucesivas” (Fitzgerald, 2010, p. 189). Hay situaciones donde una viga soporta una carga distribuida  $w(x)$  y la curva elástica puede encontrarse al realizar cuatro integraciones sucesivas de la carga distribuida  $w(x)$ , por lo que la curva elástica es una ecuación diferencial lineal de cuarto orden dado por:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -w(x) \quad (4)$$

Integrando la Ecuación 4 de la carga distribuida se encuentra la ecuación de la fuerza cortante.

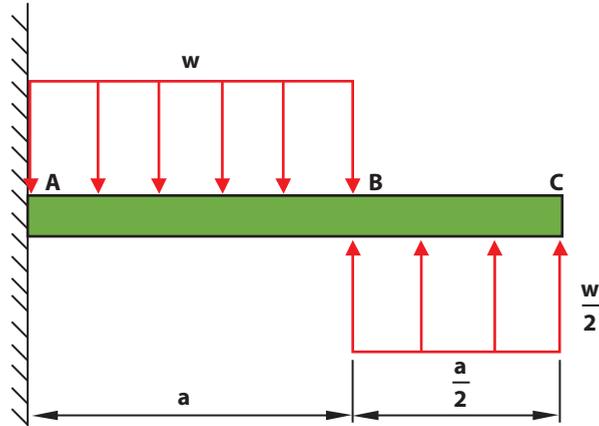
$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = V(x) = \int -w(x)dx + C_1 \quad (5)$$

Si se integra la Ecuación 5 de la fuerza cortante se encuentra la ecuación del momento flector.

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = - \int dx \int w(x)dx + C_1x + C_2 \quad (6)$$

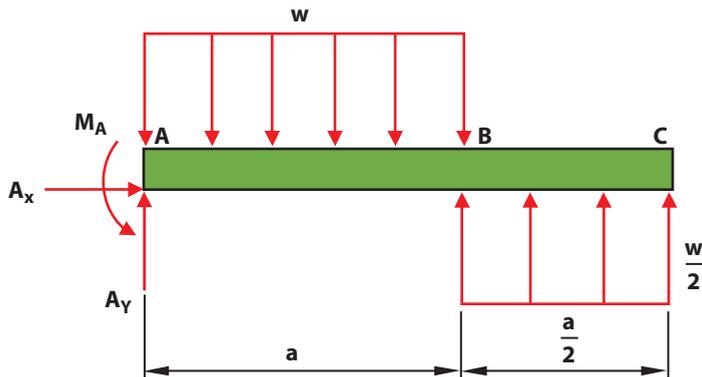
## 1.1 Caso estudio

Una viga en voladizo se carga como se muestra en la Figura 1 y también cómo encontrar la ecuación de la pendiente y la curva elástica en los dos tramos de la viga, la deflexión máxima y la pendiente de la viga en el punto B.

**Figura 1. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas**

Fuente: elaboración propia.

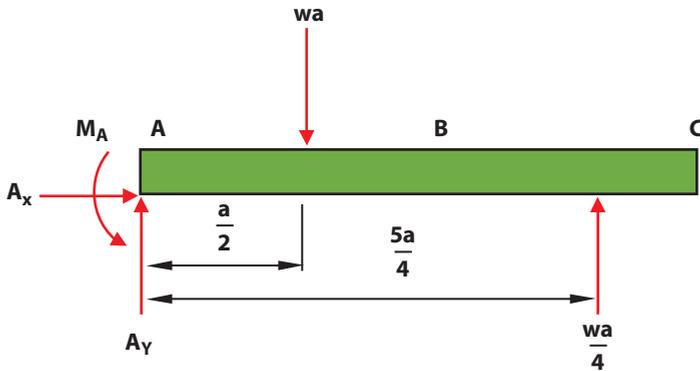
Las fuerzas aplicadas a la viga pueden verse en la Figura 2.

**Figura 2. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas e internas**

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 3 se indican las fuerzas que actúan en la viga.

**Figura 3. Diagrama de cuerpo libre con cargas internas y concentración de fuerzas distribuidas en la viga AC**



Fuente: elaboración propia.

Para determinar las reacciones de la viga es necesario utilizar las ecuaciones de equilibrio. Al aplicar la ecuación de equilibrio de momentos en la viga en el punto A se tiene:

$$+\curvearrowright \sum M_A = 0$$

$$M_A - (w * a) * \left(\frac{a}{2}\right) + \left[\left(\frac{w}{2}\right) * \left(\frac{a}{2}\right)\right] * \left(a + \frac{a}{2}\right) = 0$$

Despejando el momento del empotramiento en el punto A se obtiene:

$$M_A = (w * a) * \left(\frac{a}{2}\right) - \left[\left(\frac{w}{2}\right) * \left(\frac{a}{2}\right)\right] * \left(a + \frac{a}{2}\right)$$

$$M_A = \frac{wa^2}{2} - \left(\frac{wa}{4}\right) * \left(a + \frac{a}{4}\right)$$

$$M_A = \frac{wa^2}{2} - \left(\frac{wa}{4}\right) * \left(\frac{5a}{4}\right)$$

$$M_A = \frac{wa^2}{2} - \frac{5wa^2}{16}$$

El momento del empotramiento en el punto A es:

$$M_A = \frac{3wa^2}{16} \quad (7)$$

Aplicando la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales en la viga se tiene:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$A_Y - w * a + \frac{w}{2} * \frac{a}{2} = 0$$

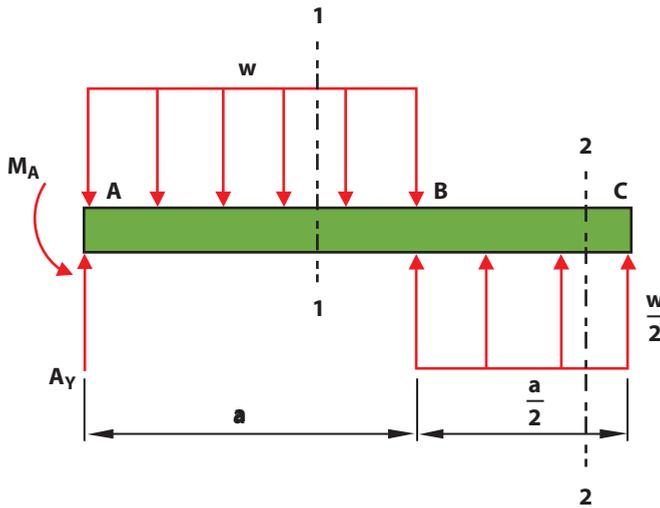
Despejando la componente de fuerza vertical del empotramiento en el punto A se obtiene:

$$A_Y = wa - \frac{wa}{4}$$

$$A_Y = \frac{3wa}{4} \quad (8)$$

Para determinar la curva elástica en cualquier tramo de la viga es necesario realizar las secciones o cortes de cada segmento de la viga, en las que se encontrará la fuerza cortante y el momento flexionante en cada tramo de la viga. Al realizar las secciones o cortes se elige la porción que posea la menor cantidad de fuerzas, en la Figura 4 se muestran las secciones a realizarse en la viga.

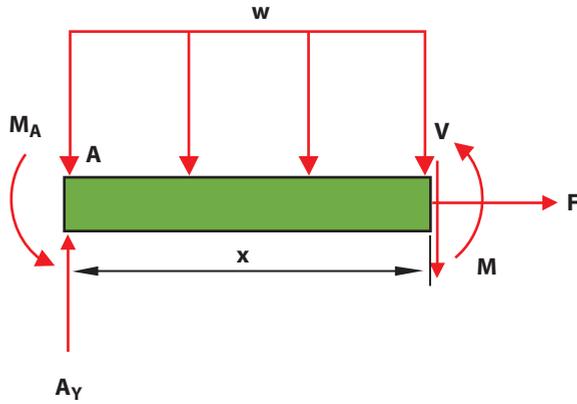
**Figura 4. Secciones a realizar a los tramos de la viga**



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 5 se indican las fuerzas que actúan en el segmento izquierdo realizado en la sección 1-1 de la viga.

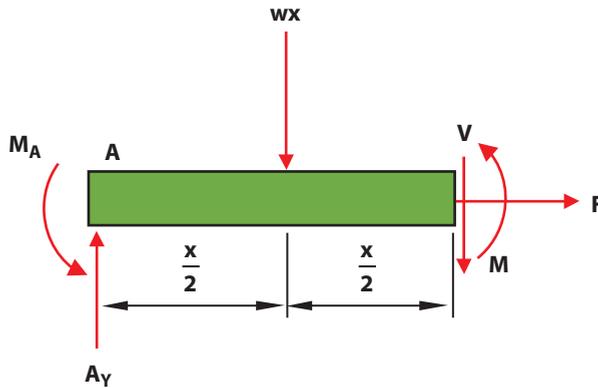
**Figura 5. Diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga al realizar la sección 1-1**



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 6 se indican las fuerzas que actúan en el segmento izquierdo realizado en la sección 1-1 de la viga.

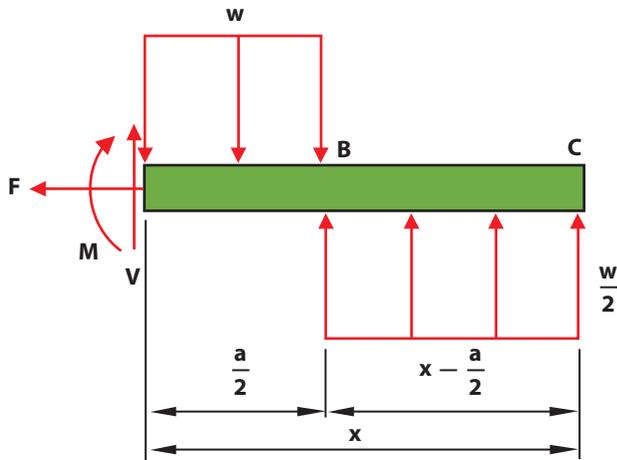
**Figura 6. Diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga con fuerzas concentradas al realizar la sección 1-1**



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 7 se indican las fuerzas que actúan en el segmento derecho realizado en la sección 1-1 de la viga.

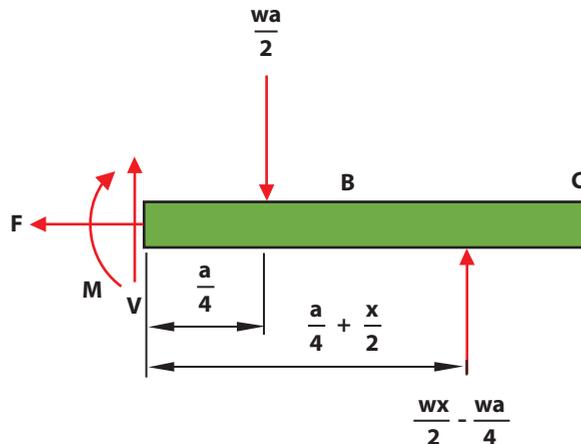
**Figura 7. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga al realizar la sección 1-1**



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 8 se indican las fuerzas que actúan en el segmento derecho realizado en la sección 1-1 de la viga.

**Figura 8. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga con fuerzas concentradas al realizar la sección 1-1**



Fuente: elaboración propia.

Para encontrar la variación del momento flexionante en la sección 1-1 de la viga se elige el tramo izquierdo de la sección 1-1. Aplicando la ecuación de equilibrio de momentos en el punto de corte para la sección 1-1 en la viga se tiene:

$$+\curvearrowright \sum M = 0$$

$$M_A - (A_Y) * (x) + (w * x) * \left(\frac{x}{2}\right) + M = 0$$

Al reemplazar las ecuaciones 7 y 8 del momento y la componente de fuerza vertical del empotramiento en el punto A en la ecuación del momento flector en el tramo 1-1, se encuentra:

$$\begin{aligned} M_A - (A_Y) * (x) + (w * x) * \left(\frac{x}{2}\right) + M &= 0 \\ \frac{3wa^2}{16} - \left(\frac{3wa}{4}\right) * (x) + (w * x) * \left(\frac{x}{2}\right) + M &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Despejando de la Ecuación 9 del momento flector en el tramo 1-1 se tiene:

$$M(x) = -\frac{3wa^2}{16} + \frac{3wax}{4} - \frac{wx^2}{2} \quad (10)$$

Al integrar la Ecuación 10 del momento flector en el tramo 1-1 se encuentra la ecuación de la pendiente de la curva elástica en el tramo.

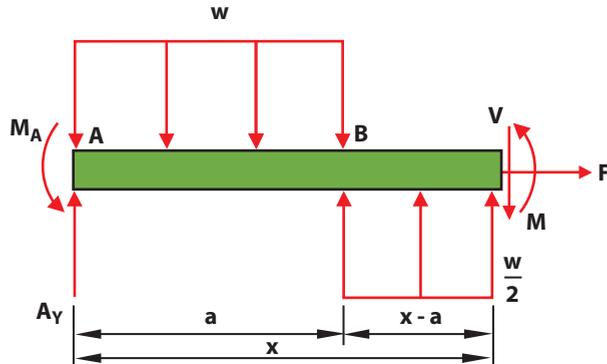
$$\begin{aligned} EI \frac{dy}{dx} &= \int M(x) dx + C_1 \\ EI\theta(x) &= \int \left( -\frac{3wa^2}{16} + \frac{3wax}{4} - \frac{wx^2}{2} \right) dx + C_1 \\ \theta(x) &= \int -\frac{3wa^2}{16} dx + \int \frac{3wax}{4} dx + \int \left( -\frac{wx^2}{2} \right) dx + C_1 \\ EI\theta(x) &= -\frac{3wa^2x}{16} + \frac{3wax^2}{4 * 2} - \frac{wx^3}{2 * 3} + C_1 \\ EI\theta(x) &= -\frac{3wa^2x}{16} + \frac{3wax^2}{8} - \frac{wx^3}{6} + C_1 \end{aligned} \quad (11)$$

Se integra la Ecuación 11 de la pendiente en el tramo 1-1 y se encuentra la ecuación de la curva elástica en el tramo.

$$\begin{aligned} EIy(x) &= \int \left[ \int M(x) dx + C_1 \right] dx + C_2 \\ EIy(x) &= \int \left( -\frac{3wa^2x}{16} + \frac{3wax^2}{8} - \frac{wx^3}{6} + C_1 \right) dx + C_2 \\ EIy(x) &= \int \left( -\frac{3wa^2x}{16} \right) dx + \int \frac{3wax^2}{8} dx + \int \left( -\frac{wx^3}{6} \right) dx + \int C_1 dx + C_2 \\ EIy(x) &= -\frac{3wa^2x^2}{16 * 2} + \frac{3wax^3}{8 * 3} - \frac{wx^4}{6 * 4} + C_1x + C_2 \\ EIy(x) &= -\frac{3wa^2x^2}{32} + \frac{3wax^3}{24} - \frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2 \end{aligned} \quad (12)$$

En la Figura 9 se indican las fuerzas que actúan en el segmento izquierdo realizado en la sección 2-2 de la viga.

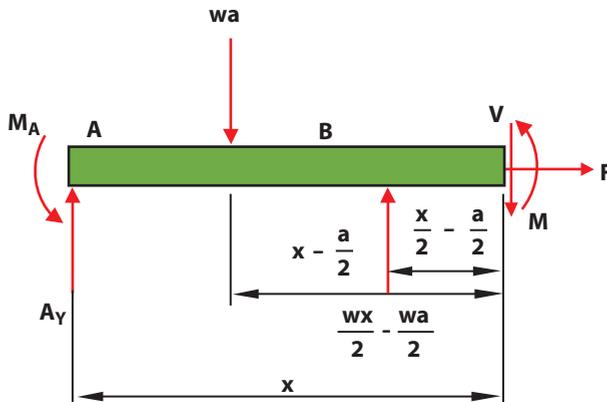
**Figura 9. Diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga al realizar la sección 2-2**



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 10 se indican las fuerzas que actúan en el segmento izquierdo realizado en la sección 2-2 de la viga.

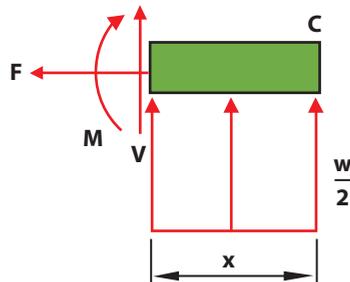
**Figura 10. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga con fuerzas concentradas al realizar la sección 2-2**



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 11 se indican las fuerzas que actúan en el segmento derecho realizado en la sección 2-2 de la viga.

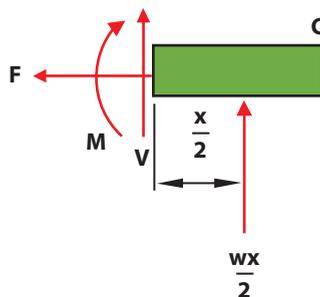
**Figura 11. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga al realizar la sección 2-2**



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 12 se indican las fuerzas que actúan en el segmento derecho realizado en la sección 2-2 de la viga.

**Figura 12. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga con fuerzas concentradas al realizar la sección 2-2**



Fuente: elaboración propia.

Para encontrar la variación del momento flexionante en la sección 2-2 de la viga se elige el tramo derecho de la sección 2-2. Aplicando la ecuación de equilibrio de momentos en el punto de corte de la viga para la sección 2-2 se tiene:

$$\begin{aligned}
 +\curvearrowright \sum M &= 0 \\
 -M + \left(\frac{w}{2}\right) * \left(\frac{x}{2}\right) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Despejando de la Ecuación 13 del momento flector en el tramo 2-2 se tiene:

$$M(x) = \frac{wx^2}{4}
 \tag{14}$$

Al integrar la Ecuación 14 del momento flector en el tramo 2-2 se encuentra la ecuación de la pendiente de la curva elástica en el tramo.

$$\begin{aligned}
 EI \frac{dy}{dx} &= \int M dx + C_3 \\
 EI\theta(x) &= \int \left( \frac{wx^2}{4} \right) dx + C_3 \\
 EI\theta(x) &= \frac{wx^3}{4 * 3} + C_3 \\
 EI\theta(x) &= \frac{wx^3}{12} + C_3
 \end{aligned} \tag{15}$$

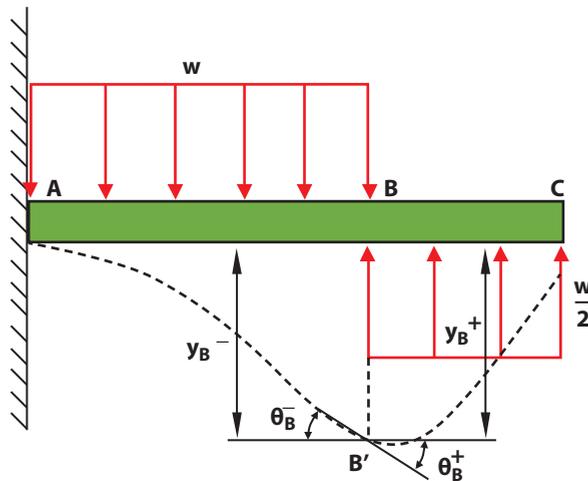
Se integra la Ecuación 15 de la pendiente en el tramo 2-2 se encuentra la ecuación de la curva elástica en el tramo.

$$\begin{aligned}
 EIy(x) &= \int \left[ \int M(x) dx + C_3 \right] dx + C_4 \\
 EIy(x) &= \int \left( \frac{wx^3}{12} + C_3 \right) dx + C_4 \\
 EIy(x) &= \int \frac{wx^3}{12} dx + \int C_3 dx + C_4 \\
 EIy(x) &= \frac{wx^4}{12 * 4} + C_3 x + C_4 \\
 EIy(x) &= \frac{wx^4}{48} + C_3 x + C_4
 \end{aligned} \tag{16}$$

Para determinar las constantes de integración relacionadas en las ecuaciones de pendiente y curva elástica en cada tramo es necesario conocer y reemplazar en estas las condiciones de frontera de la viga.

Como la viga en el punto A siempre hace contacto con el empotramiento, las condiciones de frontera de deflexión en el punto A es nula y la pendiente de la curva elástica en ese punto sea horizontal lo que hace que su pendiente sea nula. Además en el punto B “en los tramos de elástica deben tener la tangente común en el punto de aplicación de la carga” (Timoshenko, 1997, p. 135), por lo que la pendiente un momento antes del punto B y después de este es la misma, lo mismo ocurre con la deflexión en el punto B, véase la Figura 13.

**Figura 13. Condiciones de frontera de deflexión y pendiente de la viga**



Fuente: elaboración propia.

Las condiciones de frontera de la viga en el punto A son:

$$\theta_A = 0 \quad (17)$$

$$y_A = 0 \quad (18)$$

En el punto A de la viga existe un empotramiento en el que la pendiente de la curva elástica es nula, por lo que para  $x = 0$  se tiene  $\theta = 0$  y al reemplazar la Ecuación 17 de condición inicial en la Ecuación 11 de la pendiente de la curva elástica en el tramo AB se tiene:

$$EI\theta(x) = -\frac{3wa^2x}{16} + \frac{3wax^2}{8} - \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$$EI * 0 = -\frac{3wa^2 * 0}{16} + \frac{3wa * 0^2}{8} - \frac{w * 0^3}{6} + C_1$$

$$0 = C_1$$

Por lo que la primera constante de integración es nula.

$$C_1 = 0 \quad (19)$$

Además, en el punto A existe una condición inicial de deflexión nula, por lo que para  $x = 0$  se tiene  $y = 0$  y al reemplazar la Ecuación 18 de condición inicial en la Ecuación 12 de la curva elástica en el tramo AB se tiene:

$$EIy(x) = -\frac{3wa^2x^2}{32} + \frac{3wax^3}{24} - \frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2$$

$$EI * 0 = -\frac{3wa^2 * 0^2}{32} + \frac{3wa * 0^3}{24} - \frac{w * 0^4}{24} + C_1 * 0 + C_2$$

$$0 = C_2$$

Por lo que la segunda constante de integración es nula.

$$C_2 = 0 \quad (20)$$

En el punto B, la pendiente en el tramo AB de la viga es la misma que en el tramo BC, por lo que para  $x = a$  y reemplazando la Ecuación 11, la pendiente en el punto B un momento antes de este en el tramo AB es:

$$EI\theta(x) = -\frac{3wa^2x}{16} + \frac{3wax^2}{8} - \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$$EI * \theta_B^- = -\frac{3wa^2 * a}{16} + \frac{3wa * a^2}{8} - \frac{w * a^3}{6} + 0$$

$$EI\theta_B^- = -\frac{3wa^3}{16} + \frac{3wa^3}{8} - \frac{wa^3}{6}$$

$$EI\theta_B^- = \frac{wa^3}{48} \quad (21)$$

Al reemplazar el valor de la variable independiente para el punto B de la sección 2-2 de la viga de  $x = \frac{a}{2}$  en la Ecuación 15 la pendiente en el punto B, un momento antes de este en el tramo BC, es:

$$EI\theta(x) = \frac{wx^3}{12} + C_3$$

$$EI * \theta_B^+ = \frac{w * \left(\frac{a}{2}\right)^3}{12} + C_3$$

$$EI * \theta_B^+ = \frac{\frac{wa^3}{8}}{12} + C_3$$

$$EI\theta_B^+ = \frac{wa^3}{96} + C_3 \quad (22)$$

La pendiente en el punto B, un momento antes de este en el tramo AB, es igual a la pendiente en el punto B un momento antes en el tramo BC. Al igualar las ecuaciones 21 y 22 de la pendiente en el punto B en los dos tramos se tiene:

$$\begin{aligned}
 EI\theta_B^- &= \frac{wa^3}{48} \\
 EI\theta_B &= \frac{wa^3}{48} \\
 EI\theta_B^+ &= \frac{wa^3}{96} + C_3 \\
 EI\theta_B &= \frac{wa^3}{96} + C_3 \\
 EI\theta_B &= \frac{wa^3}{48} \\
 EI\theta_B &= \frac{wa^3}{96} + C_3 \\
 \frac{wa^3}{48} &= \frac{wa^3}{96} + C_3 \\
 C_3 &= \frac{wa^3}{48} - \frac{wa^3}{96}
 \end{aligned}$$

Por lo que la tercera constante de integración es:

$$C_3 = \frac{wa^3}{96} \quad (23)$$

Además en el punto B, la deflexión en el tramo AB de la viga es la misma que su tramo BC y al reemplazar el valor de la variable independiente para el punto B de  $x = a$  y las ecuaciones 19 y 20 de la primera y segunda constante de integración en la Ecuación 12, la deflexión en el punto B un momento antes de este en el tramo AB es:

$$\begin{aligned}
 EIy(x) &= -\frac{3wa^2x^2}{32} + \frac{3wax^3}{24} - \frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2 \\
 EI * y_B^- &= -\frac{3wa^2 * a^2}{32} + \frac{3wa * a^3}{24} - \frac{w * a^4}{24} + 0 * a + 0 \\
 EI * y_B^- &= -\frac{3wa^4}{32} + \frac{3wa^4}{24} - \frac{wa^4}{24} \\
 EI * y_B^- &= -\frac{wa^4}{96} \quad (24)
 \end{aligned}$$

Como para la sección 2-2 de la viga el origen coordenado se ubicó en el punto C, al reemplazar el valor de la variable dependiente para el punto B de  $x = \frac{a}{2}$  y la Ecuación 23 de la tercera constante de integración en la Ecuación 16, la deflexión en el punto B un momento antes de este en el tramo BC es:

$$\begin{aligned}
 EIy(x) &= \frac{wx^4}{48} + C_3x + C_4 \\
 EI * y_B^+ &= \frac{w * \left(\frac{a}{2}\right)^4}{48} + \left(\frac{wa^3}{96}\right) * \left(\frac{a}{2}\right) + C_4 \\
 EI * y_B^+ &= \frac{wa^4}{16} + \left(\frac{wa^3}{96}\right) * \left(\frac{a}{2}\right) + C_4 \\
 EI * y_B^+ &= \frac{wa^4}{768} + \frac{wa^4}{192} + C_4 \\
 EI * y_B^+ &= \frac{5wa^4}{768} + C_4 \tag{25}
 \end{aligned}$$

La deflexión en el punto B un momento antes de este en el tramo AB es igual a la deflexión en el punto B un momento antes en el tramo BC. Al igualar las ecuaciones 24 y 25 de la deflexión en el punto B en los dos tramos se tiene:

$$\begin{aligned}
 EI * y_B^- &= -\frac{wa^4}{96} \\
 EIy_B &= -\frac{wa^4}{96} \\
 EI * y_B^+ &= \frac{5wa^4}{768} + C_4 \\
 EIy_B &= \frac{5wa^4}{768} + C_4 \\
 EIy_B &= -\frac{wa^4}{96} \\
 EIy_B &= \frac{5wa^4}{768} + C_4 \\
 -\frac{wa^4}{96} &= \frac{5wa^4}{768} + C_4 \\
 C_4 &= -\frac{wa^4}{96} - \frac{5wa^4}{768}
 \end{aligned}$$

Por lo que la cuarta constante de integración es:

$$C_4 = -\frac{13wa^4}{768} \tag{26}$$

Al reemplazar la Ecuación 19 de la primera constante de integración en la Ecuación 11 de la pendiente de la curva elástica en el tramo 1-1 se tiene:

$$\begin{aligned}
 EI\theta(x) &= -\frac{3wa^2x}{16} + \frac{3wax^2}{8} - \frac{wx^3}{6} + C_1 \\
 C_1 &= 0 \\
 EI\theta(x) &= -\frac{3wa^2x}{16} + \frac{3wax^2}{8} - \frac{wx^3}{6} \tag{27}
 \end{aligned}$$

Al sustituir las ecuaciones 11 y 12 de la primera y segunda constantes de integración en la Ecuación 12 de la curva elástica en el tramo 1-1 se encuentra:

$$Ely(x) = -\frac{3wa^2x^2}{32} + \frac{3wax^3}{24} - \frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$Ely(x) = -\frac{3wa^2x^2}{32} + \frac{3wax^3}{24} - \frac{wx^4}{24} \quad (28)$$

Si se cambia en la Ecuación 23 de la tercera constante de integración en la Ecuación 15 de la pendiente de la curva elástica en el tramo 2-2 se logra:

$$EI\theta(x) = \frac{wx^3}{12} + C_3$$

$$C_3 = \frac{wa^3}{96}$$

$$EI\theta(x) = \frac{wx^3}{12} + \frac{wa^3}{96} \quad (29)$$

Sustituyendo las ecuaciones 23 y 26 de la tercera y cuarta constantes de integración en la Ecuación 16 de la curva elástica en el tramo 2-2 se encuentra:

$$Ely(x) = \frac{wx^4}{48} + C_3x + C_4$$

$$C_3 = \frac{wa^3}{96}$$

$$C_4 = -\frac{13wa^4}{768}$$

$$Ely(x) = \frac{wx^4}{48} + \frac{wa^3x}{96} - \frac{13wa^4}{768} \quad (30)$$

Para encontrar la deflexión máxima es necesario encontrar las posiciones en la viga donde la pendiente de la curva elástica es nula, para ello hay que analizar si en los tramos de la viga hay varios puntos de pendiente nula y, si existen, encontrar la deflexión en cada punto y proceder a comparar entre si cuál es la máxima deflexión. Haciendo nula la pendiente en la Ecuación 27 de la pendiente de la curva elástica en el tramo 1-1 se tiene:

$$EI\theta(x) = -\frac{3wa^2x}{16} + \frac{3wax^2}{8} - \frac{wx^3}{6}$$

$$EI * 0 = -\frac{3wa^2x}{16} + \frac{3wax^2}{8} - \frac{wx^3}{6}$$

$$0 = -\frac{3wa^2x}{16} + \frac{3wax^2}{8} - \frac{wx^3}{6} \quad (31)$$

Factorizando en la Ecuación 31, donde se hizo la pendiente de la curva elástica en el tramo 1-1 nula, se logra:

$$\begin{aligned} -\frac{3wa^2x}{16} + \frac{3wax^2}{8} - \frac{wx^3}{6} &= 0 \\ \frac{wx}{2} \left( -\frac{3a^2}{8} + \frac{3ax}{4} - \frac{x^2}{3} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

En la Ecuación 32, donde se hizo la pendiente de la curva elástica en el tramo 1-1 nula, se presentan dos soluciones de pendiente nula, la primera solución es:

$$\begin{aligned} \frac{wx}{2} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Esta solución conduce a una aseveración, pues en el punto A en la viga donde la coordenada de posición es nula  $x = 0$  en el que se encuentra el empotramiento y el valor de la pendiente es nula. La otra solución donde la pendiente es nula es:

$$-\frac{3a^2}{8} + \frac{3ax}{4} - \frac{x^2}{3} = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática y organizando la ecuación cuadrática se tiene:

$$\frac{x^2}{3} - \frac{3ax}{4} + \frac{3a^2}{8} = 0 \quad (33)$$

Dicha ecuación cuadrática es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (34)$$

La solución de la Ecuación cuadrática 34 es:

$$x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (35)$$

Al comparar la Ecuación cuadrática 35 con la Ecuación 33 donde la pendiente es nula se tiene:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \frac{x^2}{3} - \frac{3ax}{4} + \frac{3a^2}{8} &= 0 \end{aligned}$$

Los valores de las constantes a, b y c son:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3} \\ b &= -\frac{3a}{4} \\ c &= \frac{3a^2}{8} \end{aligned}$$

Reemplazando en la Ecuación 35 de la solución a la ecuación cuadrática los valores de las constantes a, b y c, se encuentra:

$$\begin{aligned}
 x_{1-2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x_{1-2} &= \frac{-\left(-\frac{3a}{4}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{3a}{4}\right)^2 - 4 * \frac{1}{3} * \frac{3a^2}{8}}}{2 * \frac{1}{3}} \\
 x_{1-2} &= \frac{\frac{3a}{4} \pm \frac{a}{4}}{\frac{2}{3}} \tag{36}
 \end{aligned}$$

La primera raíz de la Ecuación 36 de la curva elástica donde la pendiente es nula es:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\frac{3a}{4} + \frac{a}{4}}{\frac{2}{3}} \\
 x_1 &= \frac{3a}{2} \tag{37}
 \end{aligned}$$

La segunda raíz de la Ecuación 36 de la curva elástica donde la pendiente es nula es:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{\frac{3a}{4} - \frac{a}{4}}{\frac{2}{3}} \\
 x_2 &= \frac{3a}{4} \tag{38}
 \end{aligned}$$

Para los dos valores encontrados, 37 y 38, donde la curva elástica tiene pendiente nula, el primer valor para  $x_1 = \frac{3a}{2}$  es mayor que la longitud del tramo AB que es de  $x = a$ , por tal motivo en dicho punto no existirá una deflexión máxima y el segundo valor,  $x_2 = \frac{3a}{4}$ , es un punto localizado a  $\frac{3a}{4}$  a la derecha del punto A donde se puede tener una máxima deflexión. Al reemplazar la Ecuación 38 de la ubicación del punto  $x_1 = \frac{3a}{4}$  en la Ecuación 28 de la curva elástica del tramo 1-1 se logra:

$$\begin{aligned}
 Ely(x) &= -\frac{3wa^2 x^2}{32} + \frac{3wax^3}{24} - \frac{wx^4}{24} \\
 Ely_{x=\frac{3}{4}a} &= -\frac{3wa^2 * \left(\frac{3a}{4}\right)^2}{32} + \frac{3wa * \left(\frac{3a}{4}\right)^3}{24} - \frac{w * \left(\frac{3a}{4}\right)^4}{24} \\
 Ely_{x=\frac{3}{4}a} &= -\frac{3wa^2 * \frac{9a^2}{16}}{32} + \frac{3wa * \frac{27a^3}{64}}{24} - \frac{w * \frac{81a^2}{256}}{24} \\
 Ely_{x=\frac{3}{4}a} &= -\frac{27wa^4}{512} + \frac{27wa^4}{512} - \frac{27wa^4}{2048} \\
 Ely_{x=\frac{3}{4}a} &= -\frac{27wa^4}{2048}
 \end{aligned}$$

Por lo que la deflexión de la viga a una distancia de  $\frac{3a}{4}$  a la derecha del punto A es:

$$y = -\frac{27wa^4}{2048EI}$$

El signo negativo en la deflexión de la viga en el punto ubicado a una distancia de  $\frac{3a}{4}$  a la derecha del punto A indica que la curva elástica se encuentra en el eje vertical negativo, por lo que la deflexión de dicho punto es hacia abajo. Ahora, haciendo nula la pendiente en la Ecuación 29 de la pendiente de la curva elástica en el tramo 2-2 se tiene:

$$\begin{aligned}
 EI\theta(x) &= \frac{wx^3}{12} + \frac{wa^3}{96} \\
 EI * 0 &= \frac{wx^3}{12} + \frac{wa^3}{96} \\
 \frac{wx^3}{12} + \frac{wa^3}{96} &= 0 \\
 \frac{wx^3}{12} &= -\frac{wa^3}{96} \\
 x^3 &= -\frac{12a^3}{96} \tag{39}
 \end{aligned}$$

La solución de la Ecuación 39 es:

$$x = -\frac{a}{2}$$

El signo negativo en este valor indica que existe un punto de pendiente nula que no existe en la viga. Como en la curva elástica solo existe un punto de pendiente nula, ubicado a una distancia de  $\frac{3a}{4}$  a la derecha del punto A, la deflexión en ese punto es la máxima deflexión con un valor absoluto es  $\frac{27wa^4}{2048EI}$ .

Para encontrar la pendiente de la curva elástica en el punto B se puede utilizar la ecuación de la pendiente del tramo AB o BC; si se utiliza la Ecuación 29 de la pendiente de la curva elástica en el tramo 2-2 se logra:

$$EI\theta_B = \frac{wa^3}{48}$$

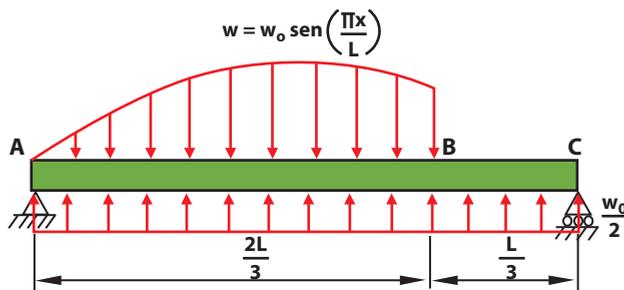
$$\theta_B = \frac{wa^3}{48EI}$$

El signo positivo de la pendiente de la viga en el punto B indica que la pendiente de la curva elástica en ese punto es manecillas contrarias al reloj tal como se muestra en la Figura 13.

## 1.2 Caso estudio

Una viga simplemente apoyada se carga, como se muestra en la Figura 14, al encontrar la ecuación de la curva elástica en los dos tramos de la viga.

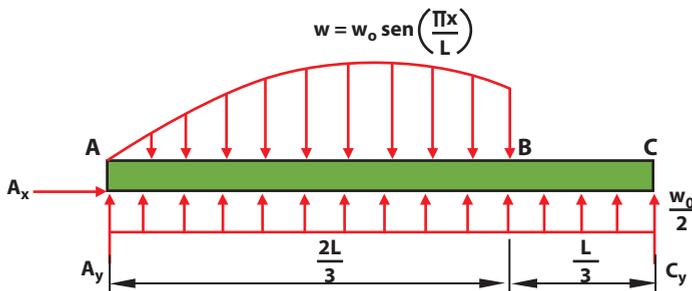
**Figura 14. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas**



Fuente: elaboración propia.

Las fuerzas aplicadas a la viga pueden verse en la Figura 15.

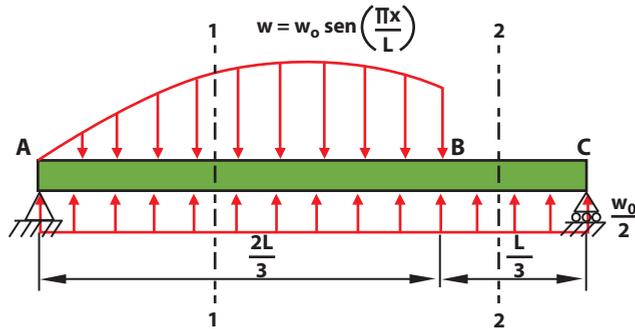
**Figura 15. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas e internas**



Fuente: elaboración propia.

Para encontrar la ecuación de la deflexión en los tramos de la viga es necesario encontrar la ecuación de carga distribuida que soporta cada tramo, para ello es necesario realizar las secciones o cortes de cada segmento de la viga para identificar qué cargas actúan en cada tramo, en las que, además, se encontrará la fuerza cortante, el momento flexionante, la pendiente y la ecuación de la curva elástica en cada tramo de la viga. Al realizar las secciones o cortes se elige la porción que posea la menor cantidad de fuerzas, en la Figura 16 se muestran las secciones a realizarse en la viga.

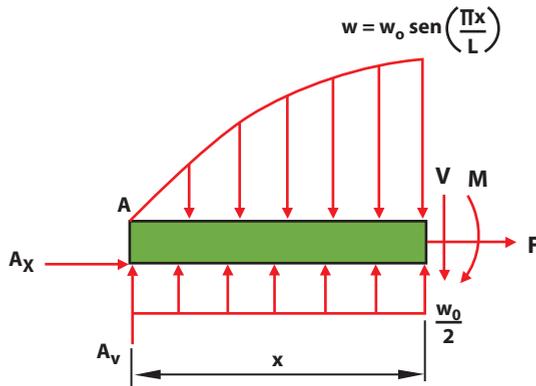
Figura 16. Secciones a realizar en los tramos de la viga



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 17 se indican las fuerzas que actúan en el segmento izquierdo realizado en la sección 1-1 de la viga.

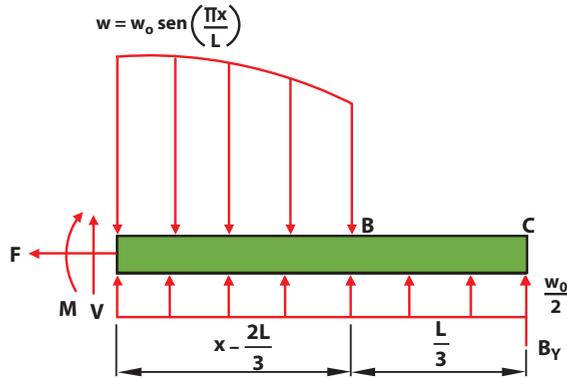
Figura 17. Diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga al realizar la sección 1-1



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 18 se indican las fuerzas que actúan en el segmento derecho realizado en la sección 1-1 de la viga.

**Figura 18. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga al realizar la sección 1-1**



Fuente: elaboración propia.

Para encontrar la variación de la carga distribuida en este tramo se eligió la porción izquierda de la sección 1-1. La ecuación de carga distribuida para el tramo AB está dada por la ecuación diferencial lineal de cuarto orden.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x)$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0}{2} \quad (40)$$

Integrando la Ecuación 40 de la carga distribuida en el tramo, se encuentra la ecuación de la fuerza cortante.

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \int -w(x) dx + C_1$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \int \left[ -w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0}{2} \right] dx + C_1$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \int \left[ -w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + \frac{w_0}{2} dx \right] + C_1$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \int -w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + \int \frac{w_0}{2} dx + C_1 \quad (41)$$

Para resolver la integral trigonométrica senoidal se hace el cambio de variable:

$$\int -w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \quad (42)$$

$$u = \frac{\pi x}{L}$$

Derivando la nueva variable se encuentra:

$$du = \frac{\pi}{L} dx$$

$$dx = \frac{L}{\pi} du$$

Reemplazando la nueva variable en la integral trigonométrica se logra:

$$\begin{aligned} \int -w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= \int -w_0 \operatorname{sen} u * \frac{L}{\pi} du \\ \int -w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= -\frac{w_0 L}{\pi} \int \operatorname{sen} u du \\ \int -w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= -\frac{w_0 L}{\pi} (-\cos u) \\ \int -w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= \frac{w_0 L}{\pi} \cos u \\ \int -w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= \frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (43)$$

Al sustituir la Ecuación 44 de la solución de la integral trigonométrica en la Ecuación 41 de la fuerza cortante en el tramo y resolver la integral de la carga uniformemente distribuida se encuentra:

$$\begin{aligned} EI \frac{d^3 y}{dx^3} &= \int -w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + \int \frac{w_0}{2} dx + C_1 \\ EI \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0 x}{2} + C_1 \end{aligned} \quad (44)$$

Al integrar la Ecuación 44 de la fuerza cortante en el tramo se encuentra la ecuación del momento flector.

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2 y}{dx^2} &= \int V(x) dx + C_2 \\ EI \frac{d^2 y}{dx^2} &= \int dx \int [w(x) + C_1] dx + C_2 \\ EI \frac{d^2 y}{dx^2} &= \int \left[ \frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0 x}{2} + C_1 \right] dx + C_2 \\ EI \frac{d^2 y}{dx^2} &= \int \left[ \frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + \frac{w_0 x}{2} dx + C_1 dx \right] + C_2 \\ EI \frac{d^2 y}{dx^2} &= \left[ \int \frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + \int \frac{w_0 x}{2} dx + \int C_1 dx \right] + C_2 \end{aligned} \quad (45)$$

Para resolver la integral trigonométrica cosenoidal se hace el cambio de variable:

$$\int \frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \quad (46)$$

$$u = \frac{\pi x}{L}$$

Derivando la nueva variable se encuentra:

$$du = \frac{\pi}{L} dx$$

$$dx = \frac{L}{\pi} du$$

Si se sustituye la nueva variable en la integral trigonométrica se logra:

$$\int \frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \int \frac{w_0 L}{\pi} \cos u * \frac{L}{\pi} du$$

$$\int \frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{w_0 L}{\pi} * \frac{L}{\pi} \int \cos u du$$

$$\int \frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} u$$

$$\int \frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (47)$$

Al cambiar la Ecuación 47 de la solución de la integral trigonométrica en la Ecuación 46 del momento flector en el tramo y resolver las otras integrales que se encuentran en esta se logra:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[ \int \frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + \int \frac{w_0 x}{2} dx + \int C_1 dx \right] + C_2$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0 x^2}{2 * 2} + C_1 x + C_2$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0 x^2}{4} + C_1 x + C_2 \quad (48)$$

Al integrar la Ecuación 46 del momento flector en el tramo, se encuentra la ecuación de la pendiente.

$$\begin{aligned}
 EI \frac{dy}{dx} &= \int M(x) dx + C_3 \\
 EI \frac{dy}{dx} &= \int dx \int [V(x) + C_2] dx + C_3 \\
 EI \frac{dy}{dx} &= \int \left[ \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) + \frac{w_0 x^2}{4} + C_1 x + C_2 \right] dx + C_3 \\
 EI \frac{dy}{dx} &= \int \left[ \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx + \frac{w_0 x^2}{4} dx + C_1 x dx + C_2 dx \right] + C_3 \\
 EI \theta(x) &= \left[ \int \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx + \int \frac{w_0 x^2}{4} dx + \int C_1 x dx + \int C_2 dx \right] + C_3 \quad (49)
 \end{aligned}$$

Utilizando la Ecuación 43 de la solución de la integral de la función trigonométrica senoidal y reemplazando en la Ecuación 47, se encuentra:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx &= -\frac{L^2}{\pi^2} * \frac{w_0 L}{\pi} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \\
 \int \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx &= -\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \quad (50)
 \end{aligned}$$

Se reemplaza la Ecuación 43 de la solución de la integral trigonométrica en la Ecuación 46 del momento flector en el tramo y resolver las otras integrales que se encuentran en esta se logra:

$$\begin{aligned}
 EI \theta(x) &= \left[ \int \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx + \int \frac{w_0 x^2}{4} dx + \int C_1 x dx + \int C_2 dx \right] + C_3 \\
 EI \theta(x) &= -\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) + \frac{w_0 x^3}{4 * 3} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\
 EI \theta(x) &= -\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) + \frac{w_0 x^3}{12} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (51)
 \end{aligned}$$

Se integra la Ecuación 51 de la pendiente en el tramo y se encuentra la ecuación de la deflexión.

$$\begin{aligned}
 EI y(x) &= \int \left[ \int M(x) dx + C_3 \right] dx + C_4 \\
 EI y(x) &= \int \left[ -\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) + \frac{w_0 x^3}{12} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \right] dx + C_4 \\
 EI y(x) &= \int \left[ -\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx + \frac{w_0 x^3}{12} dx + \frac{C_1 x^2}{2} dx + C_2 x dx + C_3 dx \right] + C_4 \\
 EI y(x) &= \int -\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx + \int \frac{w_0 x^3}{12} dx + \int \frac{C_1 x^2}{2} dx + \int C_2 x dx + \int C_3 dx + C_4 \quad (52)
 \end{aligned}$$

Al reemplazar la Ecuación 47 de la solución de la integral trigonométrica en la ecuación 52 de la deflexión en el tramo y resolver las otras integrales que se encuentran en esta se logra:

$$\int -\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L^2}{\pi^2} * \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\int -\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = -\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (53)$$

Al sustituir la Ecuación 47 de la solución de la integral trigonométrica en la Ecuación 52 de la deflexión en el tramo y resolver las otras integrales que se encuentran en esta se logra:

$$Ely(x) = \int -\frac{w_0 L^3}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx + \int \frac{w_0 x^3}{12} dx + \int \frac{C_1 x^2}{2} dx + \int C_2 x dx + \int C_3 dx$$

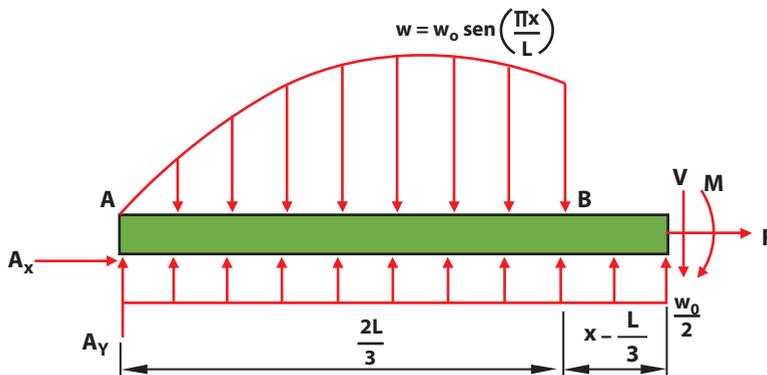
$$+ C_4$$

$$Ely(x) = -\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0 x^4}{12 * 4} + \frac{C_1 x^3}{2 * 3} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$Ely(x) = -\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0 x^4}{48} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (54)$$

En la Figura 19 se indican las fuerzas que actúan en el segmento izquierdo realizado en la sección 2-2 de la viga.

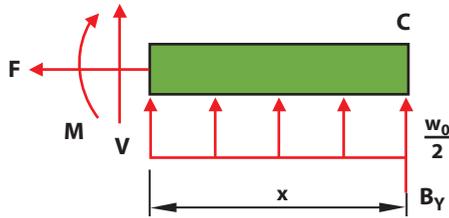
**Figura 19. Diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la viga al realizar la sección 2-2**



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 20 se indican las fuerzas que actúan en el segmento derecho realizado en la sección 2-2 de la viga.

**Figura 20. Diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la viga al realizar la sección 2-2**



Fuente: elaboración propia.

Para encontrar la variación de la carga distribuida en este tramo se eligió la porción derecha de la sección 2-2. La ecuación de carga distribuida para el tramo BC está dada por la ecuación diferencial lineal de cuarto orden.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x)$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{w_0}{2} \quad (55)$$

Integrando la Ecuación 55 de la carga distribuida en el tramo se encuentra la ecuación de la fuerza cortante.

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \int -w(x) dx + C_5$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \int \frac{w_0}{2} dx + C_5$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{w_0 x}{2} + C_5 \quad (56)$$

Al integrar la Ecuación 56 de la fuerza cortante en el tramo se encuentra la ecuación del momento flector.

$$\begin{aligned}
 EI \frac{d^2y}{dx^2} &= \int V(x)dx + C_6 \\
 EI \frac{d^2y}{dx^2} &= \int dx \int [w(x) + C_5] dx + C_6 \\
 EI \frac{d^2y}{dx^2} &= \int \left( \frac{w_0x}{2} + C_5 \right) dx + C_6 \\
 EI \frac{d^2y}{dx^2} &= \int \left( \frac{w_0x}{2} dx + C_5 dx \right) + C_6 \\
 EI \frac{d^2y}{dx^2} &= \int \frac{w_0x}{2} dx + \int C_5 dx + C_6 \\
 EI \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{w_0x^2}{2 * 2} + C_5x + C_6 \\
 EI \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{w_0x^2}{4} + C_5x + C_6 \tag{57}
 \end{aligned}$$

Si se integra la Ecuación 57 del momento flector en el tramo se encuentra la ecuación de la pendiente.

$$\begin{aligned}
 EI\theta(x) &= \int M(x)dx + C_7 \\
 EI \frac{dy}{dx} &= \int \left( \frac{w_0x^2}{4} + C_5x + C_6 \right) dx + C_7 \\
 EI \frac{dy}{dx} &= \frac{w_0x^3}{4 * 3} + \frac{C_5x^2}{2} + C_6x + C_7 \\
 EI\theta(x) &= \frac{w_0x^3}{12} + \frac{C_5x^2}{2} + C_6x + C_7 \tag{58}
 \end{aligned}$$

Al integrar la Ecuación 58 de la pendiente en el tramo se encuentra la ecuación de la deflexión.

$$\begin{aligned}
 EIy(x) &= \int \left[ \int M(x)dx + C_7 \right] dx + C_8 \\
 EIy(x) &= \int \left( \frac{w_0x^3}{12} + \frac{C_5x^2}{2} + C_6x + C_7 \right) dx + C_8 \\
 EIy(x) &= \frac{w_0x^4}{12 * 4} + \frac{C_5x^3}{2 * 3} + \frac{C_6x^2}{2} + C_7x + C_8 \\
 EIy(x) &= \frac{w_0x^4}{48} + \frac{C_5x^3}{6} + \frac{C_6x^2}{2} + C_7x + C_8 \tag{59}
 \end{aligned}$$

Para determinar las constantes de integración relacionadas en las ecuaciones de de fuerza cortante (momento flector, pendiente y curva elástica en cada tramo) es necesario conocer las condiciones de frontera de la viga. Las condiciones de

frontera de la viga son: en el punto A de la viga existe una articulación en la que el valor del momento flector y la deflexión es nula, por lo que:

$$M_A = 0 \quad (60)$$

$$y_A = 0 \quad (61)$$

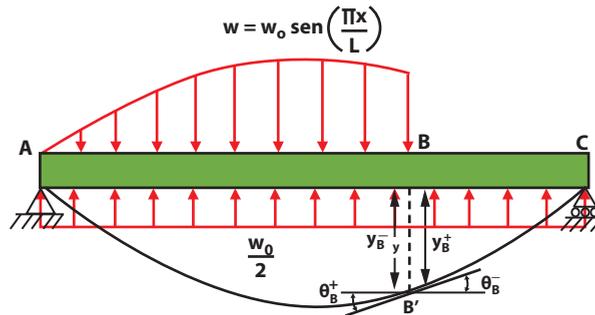
Además, la fuerza vertical que le ejerce el apoyo A a la viga es la condición inicial de la fuerza cortante en el punto A. En el punto C de la viga existe una articulación en la que el valor del momento flector y la deflexión es nula, por lo que:

$$M_C = 0 \quad (62)$$

$$y_C = 0 \quad (63)$$

Además, la fuerza vertical que le ejerce el apoyo C a la viga es la condición inicial de la fuerza cortante en el punto C. En el punto B la pendiente en el tramo AB de la viga es la misma que en el tramo BC de la viga, así como la deflexión en el tramo AB de la viga es la misma que en el tramo BC de la viga, véase la Figura 21.

**Figura 21. Condiciones de frontera de deflexión y pendiente de la viga**



Fuente: elaboración propia.

Para encontrar las constantes de integración se procede a reemplazar cada condición inicial en las ecuaciones que relacionan a estas. Al reemplazar la Ecuación 60 de condición inicial de momento flector nulo en el punto A de la viga donde  $x = 0$ , en la Ecuación 48 perteneciente al tramo AB, se tiene:

$$M(x) = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0 x^2}{4} + C_1 x + C_2$$

$$0 = \frac{w_0 L^2}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi * 0}{L}\right) + \frac{w_0 * 0^2}{4} + C_1 * 0 + C_2$$

$$0 = C_2$$

Por lo que la segunda constante de integración es nula.

$$C_2 = 0 \quad (64)$$

Si se sustituye la Ecuación 61 de condición inicial de deflexión nula en el punto A de la viga donde  $x = 0$ , en la Ecuación 50 perteneciente a la deflexión del tramo AB, se tiene:

$$Ely(x) = -\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0 x^4}{48} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$EI * 0 = -\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi * 0}{L}\right) + \frac{w_0 * 0^4}{48} + \frac{C_1 * 0^3}{6} + \frac{C_2 * 0^2}{2} + C_3 * 0 + C_4$$

$$0 = C_4$$

Por lo que la cuarta constante de integración es nula.

$$C_4 = 0 \quad (65)$$

Al cambiar la Ecuación 62 de la condición inicial de momento flector nulo en el punto C de la viga donde  $x = 0$ , en la Ecuación 55 perteneciente al momento flector del tramo BC, se logra:

$$M(x) = \frac{w_0 x^2}{4} + C_5 x + C_6$$

$$0 = \frac{w_0 * 0^2}{4} + C_5 * 0 + C_6$$

$$0 = C_6$$

Por lo que la sexta constante de integración es nula.

$$C_6 = 0 \quad (66)$$

Si se reemplaza la Ecuación 63 de la condición inicial de deflexión nula en el punto C de la viga donde  $x = 0$ , en la Ecuación 57 perteneciente a la deflexión del tramo BC, se encuentra:

$$Ely(x) = \frac{w_0 x^4}{48} + \frac{C_5 x^3}{6} + \frac{C_6 x^2}{2} + C_7 x + C_8$$

$$EI * 0 = \frac{w_0 * 0^4}{48} + \frac{C_5 * 0^3}{6} + \frac{C_6 * 0^2}{2} + C_7 * 0 + C_8$$

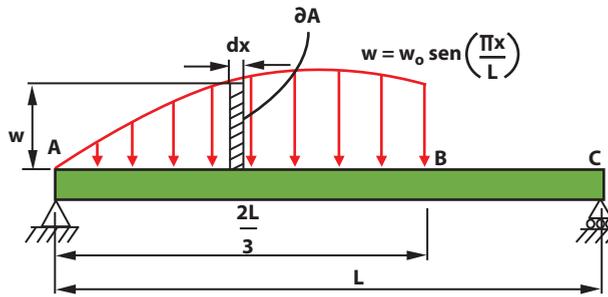
$$0 = C_8$$

Por lo que la octava constante de integración es nula.

$$C_8 = 0 \quad (67)$$

Para utilizar las condiciones de frontera de fuerza vertical que ejerce el apoyo A y C es necesario encontrar dichas reacciones. Para encontrar las reacciones que ejerce la articulación ubicada en el punto A y el rodillo ubicado en el punto C a la viga, es necesario concentrar la carga distribuida senoidal. “La carga distribuida sobre el tramo de la viga se representa, por tanto, como un sistema de fuerzas paralelas en número infinito y que actúan en elementos diferenciales de área separados  $A$ ” (Hibbeler, 2006, p. 464), por lo que la magnitud de la carga concentrada es igual al área comprendida bajo la curva de carga y se evalúa eligiendo un elemento diferencial de forma rectangular de base  $dx$  y altura  $w$ , véase la Figura 22.

**Figura 22. Elemento diferencial para obtener la magnitud de la carga distribuida**



Fuente: elaboración propia.

El módulo de la fuerza ejercida sobre el elemento diferencial de la viga de longitud  $dx$  es:

$$dW = w dx$$

Para concentrar la carga distribuida y encontrar la carga total que soporta de la viga se utiliza la ecuación:

$$\int dA = \int w dx \quad (68)$$

Integrando la Ecuación 68 de la carga distribuida se encuentra:

$$\int w dx = \int w_0 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \quad (69)$$

Al sustituir la Ecuación 43 de la solución de la integral trigonométrica en la Ecuación 69 de la carga distribuida senoidal se logra:

$$\int w_0 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = -\frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (70)$$

Al reemplazar los límites de la integral se tiene la magnitud de la carga distribuida senoidal.

$$\int w dx = -\frac{w_0 L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \Bigg|_0^{\frac{2L}{3}}$$

$$\int w dx = -\frac{w_0 L}{\pi} \left[ \cos\left(\frac{\pi * \frac{2L}{3}}{L}\right) - \cos\left(\frac{\pi * 0}{L}\right) \right]$$

$$\int w dx = -\frac{w_0 L}{\pi} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos 0 \right]$$

$$\int w dx = -\frac{w_0 L}{\pi} \left( -\frac{1}{2} - 1 \right)$$

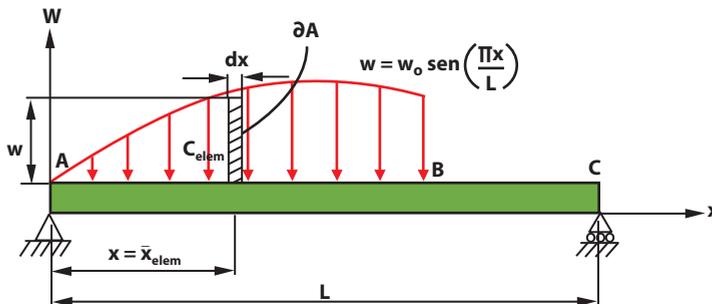
$$\int w dx = \frac{3w_0 L}{2\pi} \quad (71)$$

“La ubicación de la resultante de la carga concentrada está localizada en el centroide del área comprendida bajo la curva” (Meriam, 2002, p. 265) y se encuentra con la ecuación del momento de primer orden respecto al eje  $w$  del área comprendida bajo la curva de carga.

$$A\bar{x} = \int \bar{x} \partial A \quad (72)$$

La ubicación del centroide  $\bar{x}$  del elemento diferencial coincide con la variable dependiente  $x$ , vease la Figura 23, y al reemplazar en la Ecuación 72 se tiene:

**Figura 23. Ubicación del centroide de la carga distribuida**



Fuente: elaboración propia.

$$\begin{aligned}
 A\bar{x} &= \int xw dx \\
 A\bar{x} &= \int xw_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \\
 A\bar{x} &= w_0 \int x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \tag{73}
 \end{aligned}$$

La integral que se relaciona en la Ecuación 73 es una integral que se resuelve por partes, cuya solución es:

$$uv - \int vdu \tag{74}$$

Para la solución de esta integral se hace:

$$U = x \tag{75}$$

$$du = dx \tag{76}$$

$$\int dv = \int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \tag{77}$$

Al sustituir la Ecuación 43 de la solución de la integral trigonométrica en la Ecuación 77 se encuentra:

$$v = -\frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{78}$$

Al reemplazar las ecuaciones 75, 76 y 77 en la solución de la integral por partes de la Ecuación 74 se logra:

$$\begin{aligned}
 A\bar{x} &= w_0 \left\{ x \left[ -\frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] - \int -\frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \right\} \\
 A\bar{x} &= w_0 \left[ -\frac{Lx}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{L}{\pi} \int \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \right] \tag{79}
 \end{aligned}$$

Al sustituir la Ecuación 47 de la solución de la integral trigonométrica en la Ecuación 79 del momento de primer orden respecto al eje w del área comprendida bajo la curva de carga se tiene:

$$\begin{aligned}
 A\bar{x} &= w_0 \left[ -\frac{Lx}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{L}{\pi} * \frac{L}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \\
 A\bar{x} &= w_0 \left[ -\frac{Lx}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \tag{80}
 \end{aligned}$$

Al reemplazar los límites de la integral en la Ecuación 80 se encuentra el primer momento de inercia.

$$\begin{aligned}
 A\bar{x} &= w_0 \left[ -\frac{Lx}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \Bigg|_0^{\frac{2L}{3}} \\
 A\bar{x} &= w_0 \left\{ \left[ -\frac{L * \frac{2L}{3}}{\pi} \cos\left(\frac{\pi * \frac{2L}{3}}{L}\right) + \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi * \frac{2L}{3}}{L}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[ -\frac{L * 0}{\pi} \cos\left(\frac{\pi * 0}{L}\right) + \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi * 0}{L}\right) \right] \right\} \\
 A\bar{x} &= w_0 \left\{ \left[ -\frac{2L^2}{3\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] - [0] \right\} \\
 A\bar{x} &= w_0 \left[ -\frac{2L^2}{3\pi} * \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{L^2}{\pi^2} * \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] \\
 A\bar{x} &= w_0 \left( \frac{L^2}{3\pi} - \frac{\sqrt{3}L^2}{2\pi^2} \right) \\
 A\bar{x} &= \frac{w_0 L^2}{\pi} \left( \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right) \tag{81}
 \end{aligned}$$

Al reemplazar las ecuaciones 71 y 81 del área bajo la curva de la carga distribuida y el primer momento de primer orden respecto al eje  $w$  del área comprendida bajo la curva de carga en la Ecuación 74 de la ubicación del centroide de la carga distribuida se tiene:

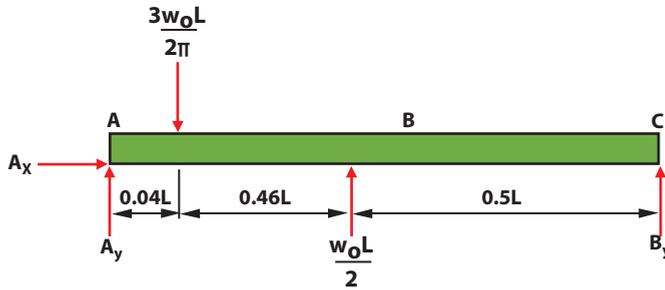
$$\begin{aligned}
 A\bar{x} &= \int \bar{x} \partial A \\
 \frac{3w_0 L}{2\pi} * \bar{x} &= \frac{w_0 L^2}{\pi} \left( \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)
 \end{aligned}$$

Por lo que la ubicación de la carga concentrada es:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{\frac{w_0 L^2}{\pi} \left( \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)}{\frac{3w_0 L}{2\pi}} \\
 \bar{x} &= \frac{2L}{3} \left( \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right) \\
 \bar{x} &= 0.04L
 \end{aligned}$$

En la Figura 24 se indican las fuerzas que actúan en la viga.

**Figura 24. Diagrama de cuerpo libre con cargas internas y concentración de fuerza distribuidas en la viga AC**



Fuente: elaboración propia.

Para determinar las reacciones de la viga es necesario utilizar las ecuaciones de equilibrio. Al aplicar la ecuación de equilibrio de momentos en la viga en el punto A se logra:

$$\begin{aligned}
 +\curvearrowright \sum M_A &= 0 \\
 -\left(\frac{3w_0L}{2\pi}\right) * (0.04L) + \left(\frac{w_0}{2} * L\right) * (0.5L) + (C_Y) * (L) &= 0 \\
 -(0.48w_0L) * (0.04L) + \left(\frac{w_0L}{2}\right) * (0.5L) + (C_Y) * (L) &= 0 \\
 -0.019w_0L^2 + 0.25w_0L^2 + C_YL &= 0 \\
 0.23w_0L^2 + C_YL &= 0 \\
 C_Y &= -0.23w_0L
 \end{aligned} \tag{82}$$

Aplicando la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales en la viga y reemplazando la Ecuación 82 de la componente vertical de fuerza en el punto C se tiene:

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 A_Y - \left(\frac{3w_0L}{2\pi}\right) + \left(\frac{w_0}{2} * L\right) + C_Y &= 0 \\
 A_Y + 0.023w_0L + (-0.23w_0L) &= 0 \\
 A_Y - 0.21w_0L &= 0 \\
 A_Y &= 0.21w_0L
 \end{aligned} \tag{83}$$

El valor encontrado de la fuerza vertical que le ejerce el apoyo A a la viga es la condición inicial de la fuerza cortante en el punto A y al reemplazar la Ecuación 83 de la componente de fuerza vertical que le ejerce el rodillo en el punto A a la viga donde  $x = 0$  en la Ecuación 46 de la fuerza cortante del tramo AB, se encuentra la primera constante de integración.

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = V(x)$$

$$V(x) = \frac{w_0L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0x}{2} + C_1$$

$$A_Y = \frac{w_0L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi * 0}{L}\right) + \frac{w_0 * 0}{2} + C_1$$

$$0.21w_0L = \frac{w_0L}{\pi} \cos 0 + C_1$$

$$0.21w_0L = \frac{w_0L}{\pi} + C_1$$

$$C_1 = -0.11w_0L$$

Por lo que la primera constante de integración es:

$$C_1 = -0.11w_0L \quad (84)$$

El valor encontrado de la fuerza vertical que le ejerce el apoyo C a la viga es la condición inicial de la fuerza cortante en el punto C y al reemplazar la Ecuación 82 de la componente de fuerza vertical que le ejerce la articulación en el punto C a la viga donde  $x = 0$  en la Ecuación 56 de la fuerza cortante del tramo BC se encuentra la quinta constante de integración.

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = V(x)$$

$$V(x) = \frac{w_0x}{2} + C_5$$

$$C_Y = \frac{w_0 * 0}{2} + C_5$$

$$-0.23w_0L = C_5$$

Por lo que la quinta constante de integración es:

$$C_5 = -0.23w_0L \quad (85)$$

Para utilizar la condición inicial de que la pendiente en el punto B del tramo AB de la viga es la misma que en el tramo BC de la viga. Al reemplazar la posición del punto B donde  $x = \frac{2L}{3}$  en el tramo AB, así como las ecuaciones 84 y 64 de la primera y segunda constante de integración en la Ecuación 49 de la pendiente del tramo AB, la pendiente del punto B un momento antes de este en el tramo AB es:

$$\begin{aligned}
 EI\theta(x) &= -\frac{w_0L^3}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0x^3}{12} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \\
 EI\theta_B^- &= -\frac{w_0L^3}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi * \frac{2L}{3}}{L}\right) + \frac{w_0}{12} * \left(\frac{2L}{3}\right)^3 + \frac{(-0.11w_0L)}{2} * \left(\frac{2L}{3}\right)^2 + 0 * \frac{2L}{3} + C_3 \\
 EI\theta_B^- &= -\frac{w_0L^3}{\pi^3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{w_0}{12} * \frac{8L^3}{27} + \frac{(-0.11w_0L)}{2} * \frac{4L^2}{9} + C_3 \\
 EI\theta_B^- &= -\frac{w_0L^3}{\pi^3} * \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2w_0L^3}{81} - \frac{11w_0L^3}{225} + C_3 \\
 EI\theta_B^- &= -0.0081w_0L^3 + C_3 \tag{86}
 \end{aligned}$$

Al reemplazar la posición del punto B para  $x = \frac{L}{3}$  en el tramo BC, así como las ecuaciones 85 y 66 de la quinta y sexta constante de integración en la Ecuación 58, la pendiente en el punto B un momento antes de este en el tramo BC es:

$$\begin{aligned}
 EI \frac{dy}{dx} &= \frac{w_0x^3}{12} + \frac{C_5x^2}{2} + C_6x + C_7 \\
 EI\theta_B^+ &= \frac{w_0x^3}{12} + \frac{C_5x^2}{2} + C_6x + C_7 \\
 EI\theta_B^+ &= \frac{w_0}{12} * \left(\frac{L}{3}\right)^3 + \frac{(-0.23w_0L)}{2} * \left(\frac{L}{3}\right)^2 + C_6 * 0 + C_7 \\
 EI\theta_B^+ &= \frac{w_0L^3}{324} - \frac{23w_0L^3}{1800} + C_7 \\
 EI\theta_B^+ &= -\frac{157w_0L^3}{16200} + C_7 \tag{87}
 \end{aligned}$$

Al igualar las ecuaciones 86 y 87 de la pendiente del punto B por la izquierda y por la derecha se encuentra:

$$\begin{aligned}
 EI\theta_B^- &= -0.0081w_0L^3 + C_3 \\
 EI\theta_B^+ &= -\frac{157w_0L^3}{16200} + C_7 \\
 -0.0081w_0L^3 + C_3 &= -\frac{157w_0L^3}{16200} + C_7 \\
 C_7 - C_3 &= 0.0016w_0L^3 \tag{88}
 \end{aligned}$$

Para utilizar la condición inicial de que la deflexión en el punto B del tramo AB de la viga es la misma que en el tramo BC de la viga. Al reemplazar la posición del punto B donde  $x = \frac{2L}{3}$  en el tramo AB, así como las ecuaciones 84, 64 y 65 de la primera, segunda y cuarta constante de integración en la Ecuación 50 de la curva elástica del tramo AB, la deflexión del punto B un momento antes de este en el tramo AB es:

$$\begin{aligned}
 Ely(x) &= -\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0 x^4}{48} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \\
 EI\delta_B^- &= -\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi * \frac{2L}{3}}{L}\right) + \frac{w_0 * \left(\frac{2L}{3}\right)^4}{48} + \frac{(-0.11w_0 L) * \left(\frac{2L}{3}\right)^3}{6} + \frac{0 * \left(\frac{2L}{3}\right)^2}{2} + C_3 * \left(\frac{2L}{3}\right) + 0 \\
 EI\delta_B^- &= -\frac{w_0 L^4}{\pi^4} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{w_0}{48} * \frac{16L^4}{81} + \frac{(-0.11w_0 L) * 8L^3}{162} + \frac{2LC_3}{3} \\
 EI\delta_B^- &= -\frac{w_0 L^4}{\pi^4} * \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{w_0 L^4}{243} - \frac{11w_0 L^3}{2025} + \frac{2LC_3}{3} \\
 EI\delta_B^- &= 0.010w_0 L^4 + \frac{2LC_3}{3} \tag{89}
 \end{aligned}$$

Al reemplazar la posición del punto B donde  $x = \frac{L}{3}$  en el tramo BC, así como las ecuaciones 85, 66 y 67 de la quinta, sexta y octava constante de integración en la Ecuación 59 de la curva elástica del tramo BC, la deflexión del punto B un momento antes de este en el tramo BC es:

$$\begin{aligned}
 Ely(x) &= \frac{w_0 x^4}{48} + \frac{C_5 x^3}{6} + \frac{C_6 x^2}{2} + C_7 x + C_8 \\
 EI\delta_B^+ &= \frac{w_0 * \left(\frac{L}{3}\right)^4}{48} + \frac{(-0.23w_0 L) * \left(\frac{L}{3}\right)^3}{6} + \frac{0 * 0^2}{2} + C_7 * \left(\frac{L}{3}\right) + 0 \\
 EI\delta_B^+ &= \frac{w_0 L^4}{3888} - \frac{23w_0 L^4}{16200} + \frac{C_7 L}{3} \\
 EI\delta_B^+ &= -\frac{113w_0 L^4}{97200} + \frac{C_7 L}{3} \tag{90}
 \end{aligned}$$

Al igualar las ecuaciones 89 y 90 de la deflexión del punto B por la izquierda y por la derecha se encuentra:

$$\begin{aligned}
 EI\delta_B^- &= 0.010w_0 L^4 + \frac{2LC_3}{3} \\
 EI\delta_B^+ &= -\frac{113w_0 L^4}{97200} + \frac{C_7 L}{3} \\
 0.010w_0 L^4 + \frac{2LC_3}{3} &= -\frac{113w_0 L^4}{97200} + \frac{C_7 L}{3}
 \end{aligned}$$

Dividiendo la ecuación anterior por 3L se logra:

$$-C_7 + 2C_3 = -0.034w_0 L^3 \tag{91}$$

Sumando las ecuaciones 88 y 91 se encuentra:

$$C_7 - C_3 = 0.0016w_0 L^3 \tag{88}$$

$$-C_7 + 2C_3 = -0.034w_0 L^3 \tag{91}$$

$$C_3 = -0.024w_0L^3$$

Reemplazando el valor de la tercera constante de integración en la ecuación se tiene:

$$C_7 = -0.014w_0L^3$$

La ecuación de la deflexión del tramo AB es:

$$EIy(x) = -\frac{w_0L^4}{\pi^4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{w_0x^4}{48} - \frac{0.11w_0Lx^3}{6} - 0.024w_0L^3x$$

La ecuación de la deflexión del tramo BC es:

$$EIy(x) = \frac{w_0x^4}{48} - \frac{0.23w_0Lx^3}{6} + -0.014w_0L^3x$$



## CAPÍTULO 2

# MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

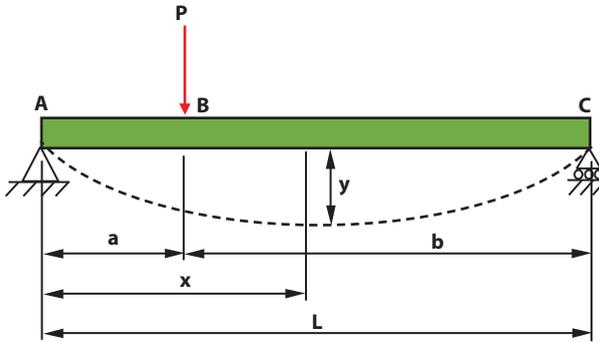
El método de superposición permitirá evaluar parámetros como deflexiones y pendientes en vigas, así como resolver “vigas continuas con más de dos apoyos eligiendo uno o más apoyos redundantes en los que las reacciones no pueden determinarse por las ecuaciones de la estática” (Pytel, 1994, p. 250).

Para utilizar el método de la superposición para encontrar las reacciones en los apoyos de una viga estáticamente indeterminada de primer grado se escoge, en primer lugar, una de las reacciones como redundante y se coloca en la viga la fuerza interna que genera el apoyo correspondiente, esta redundante se considera como una carga desconocida que, junto con las otras cargas aplicadas a la viga, producirán deformaciones con los apoyos originales. La pendiente o la deflexión donde está aplicada la redundante se determina evaluando por separado las pendientes y deformaciones causadas por todas las cargas aplicadas a la viga y la reacción redundante, luego se superponen los resultados obtenidos encontrando la redundante; ya evaluadas las reacciones en los apoyos puede evaluarse la pendiente y la deflexión en cualquier posición de la viga.

Si un patrón particular de carga y apoyo se puede separar en componentes, de modo que cada componente sea como uno de los casos para el cual se dispone de una fórmula, entonces la deflexión total en un punto de la viga es igual a la suma de las deflexiones provocadas por cada componente. (Mott, 1996, p. 439)

Las ecuaciones a utilizar para la aplicación del método pueden verse en las siguientes figuras:

**Figura 25. Pendiente y deflexión de una viga simplemente apoyada con carga concentrada aplicada en ( $a < x < L$ )**

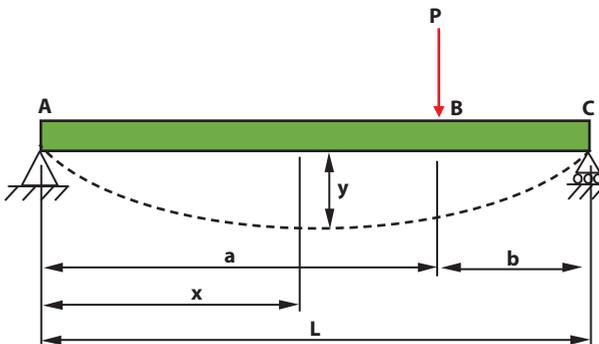


Fuente: elaboración propia.

La ecuación a utilizar de la deflexión es:

$$y(x) = \frac{Pbx}{6EI} (L^2 - x^2 - b^2) \quad (0 \leq x \leq a)$$

**Figura 26. Pendiente y deflexión de una viga simplemente apoyada con carga concentrada aplicada en ( $0 \leq x \leq a$ )**

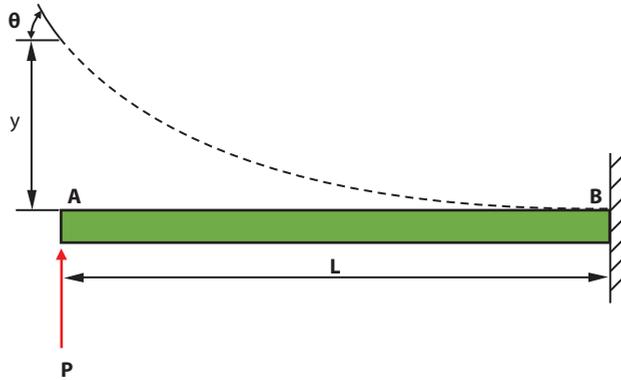


Fuente: elaboración propia.

La ecuación a utilizar de la deflexión es:

$$y(x) = \frac{Pbx}{6EI} (L^2 - x^2 - b^2) \quad (0 \leq x \leq a)$$

**Figura 27. Pendiente y deflexión en una viga empotrada con carga concentrada en el extremo**



Fuente: elaboración propia.

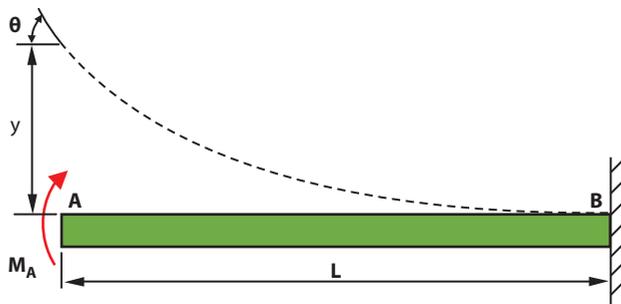
La ecuación de la máxima deflexión es:

$$y = \frac{PL^3}{3EI}$$

La ecuación de la pendiente en el extremo es:

$$\theta = \frac{PL^2}{2EI}$$

**Figura 28. Pendiente y deflexión en una viga empotrada con momento concentrado en el extremo**



Fuente: elaboración propia.

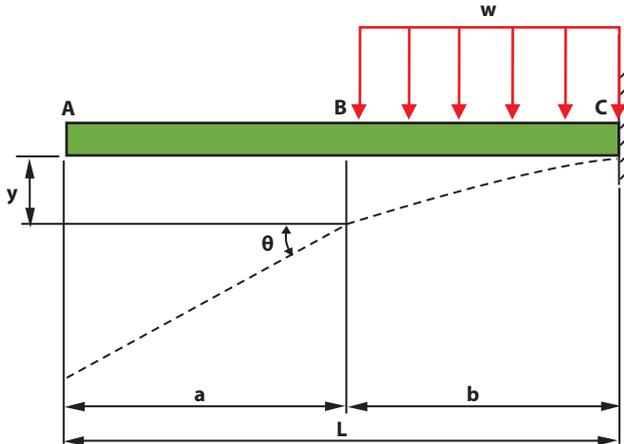
La ecuación de la máxima deflexión es:

$$y = \frac{ML^2}{2EI}$$

La ecuación de la pendiente en el extremo es:

$$\theta = \frac{ML}{EI}$$

**Figura 29. Pendiente y deflexión en una viga empotrada con carga distribuida**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación de la máxima deflexión es:

$$y = \frac{wL^4}{8EI}$$

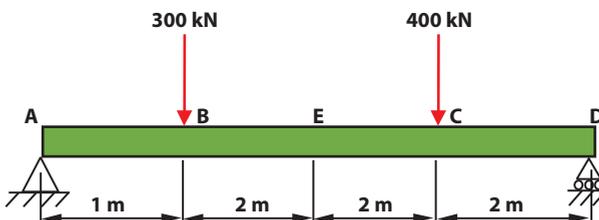
La ecuación de la pendiente en el extremo es:

$$\theta = \frac{wL^3}{6EI}$$

## 2.1 Caso estudio

Una viga simplemente apoyada se carga, como se muestra en la Figura 30, encontrando la deflexión de la viga en el punto E.

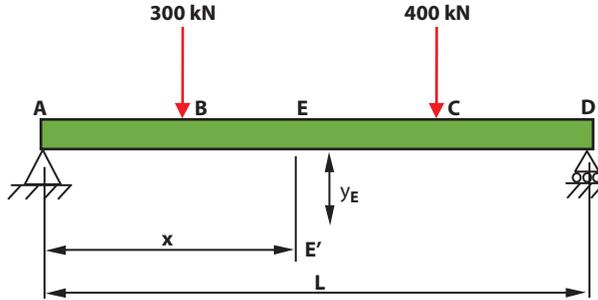
**Figura 30. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas**



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 31 se muestra la deflexión del punto E perteneciente a la viga.

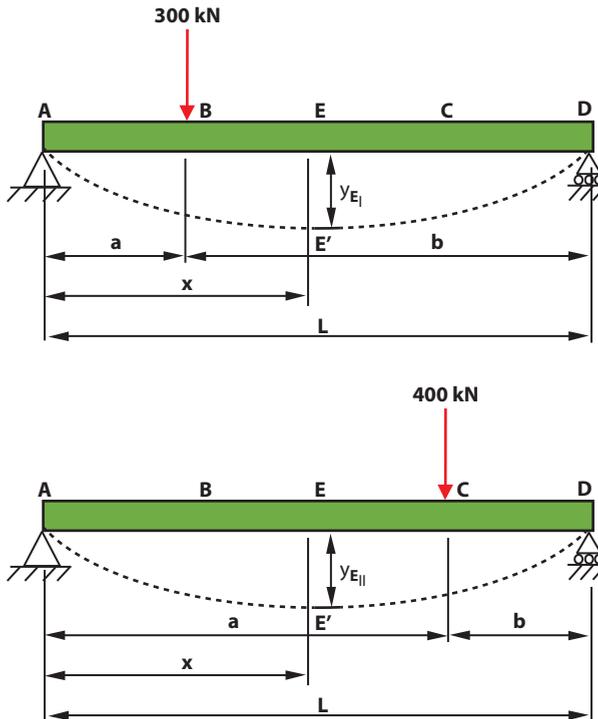
**Figura 31. Deflexión del punto E perteneciente a la viga**



Fuente: elaboración propia.

Para encontrar la deflexión del punto E, y como la viga se encuentra cargada, se puede dividir en dos subsistemas, véase la Figura 32.

**Figura 32. Subsistema de fuerzas que se generan en la viga**



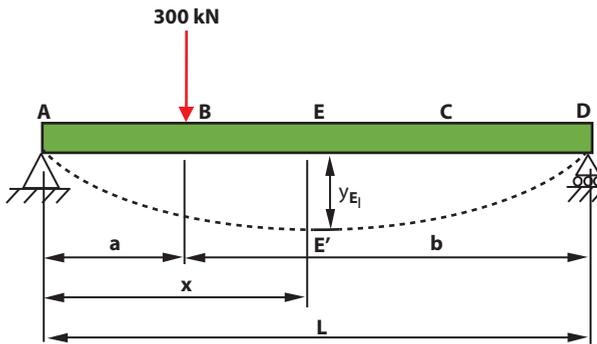
Fuente: elaboración propia.

La deflexión del punto E es:

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum y_E &= y_E^+ \\
 y_E &= -y_{E_I} - y_{E_{II}}
 \end{aligned}
 \tag{92}$$

La deflexión del punto E del subsistema I de una viga simplemente apoyada, soportando una carga concentrada, véase la Figura 33, es:

**Figura 33. Subsistema I de la viga simplemente apoyada, soportando una carga concentrada en el punto B**



Fuente: elaboración propia.

Para encontrar las deflexiones en el punto E se utilizan los resultados que pueden verse en la Figura 25. El punto E se encuentra a una distancia del origen de los ejes coordenados de  $x = 3$  m, por lo tanto, es mayor la distancia  $a = 1$  m, por lo que la ecuación a utilizar de la deflexión del punto E es:

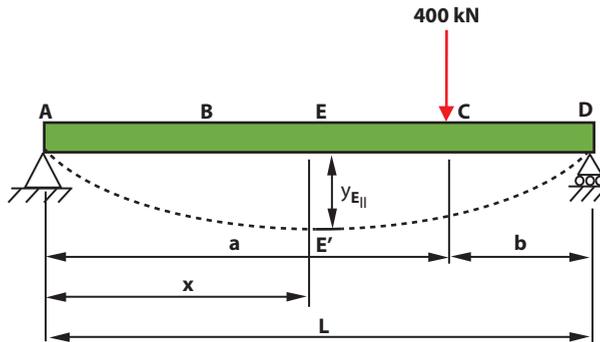
$$y(x) = \frac{Pbx}{6EI} \left[ \frac{L}{b}(x-a)^3 + (L^2 - b^2)x - x^2 \right] \quad (a < x < L)$$

Acondicionando la Ecuación 90, la deflexión del punto E del subsistema I que se encuentra en el rango es:

$$\begin{aligned}
 y_{E_1} &= \frac{300 \text{ kN} * 6 \text{ m}}{6EI * 7\text{m}} \left[ \frac{7 \text{ m}}{6 \text{ m}} (3 \text{ m} - 1 \text{ m})^3 + \{(7 \text{ m})^2 - (6 \text{ m})^2\} (3 \text{ m}) - (3 \text{ m})^3 \right] \\
 y_{E_1} &= \frac{300}{7EI} \left[ \frac{7}{6} * 8 + (49 - 36) * 3 - 27 \right] \\
 y_{E_1} &= \frac{300}{7EI} \left[ \frac{56}{6} + 13 * 3 - 27 \right] \\
 y_{E_1} &= \frac{300}{7EI} \left( \frac{28}{3} + 39 - 27 \right) \\
 y_{E_1} &= \frac{300}{7EI} * \frac{64}{3} \\
 y_{E_1} &= \frac{6400}{7EI} \tag{94}
 \end{aligned}$$

La deflexión del punto E del subsistema II de una viga simplemente apoyada soportando una carga concentrada, véase la Figura 34, es:

**Figura 34. Subsistema II de viga simplemente apoyada, soportando una carga concentrada en el punto C**



Fuente: elaboración propia.

El punto E se encuentra a una distancia del origen de los ejes coordenados de  $x=3 \text{ m}$ , por lo tanto, es mayor la distancia  $a = 5 \text{ m}$ , por lo que la ecuación a utilizar de la deflexión del punto E es:

$$y(x) = \frac{Pbx}{6EI} (L^2 - x^2 - b^2) \quad (0 \leq x \leq a) \tag{95}$$

Acondicionando la Ecuación 91, la deflexión del punto E del subsistema II que se encuentra en el rango  $(0 \leq x \leq a)$  es:

$$\begin{aligned}
 y_{E_{II}} &= \frac{400 \text{ kN} * 2 \text{ m} * 3 \text{ m}}{6EI * 7\text{m}} [(7 \text{ m})^2 - (3 \text{ m})^2 - (2 \text{ m})^2] \\
 y_{E_{II}} &= \frac{400}{7EI} (49 - 9 - 4) \\
 y_{E_{II}} &= \frac{400}{7EI} * 36 \\
 y_{E_{II}} &= \frac{14400}{7EI} \tag{96}
 \end{aligned}$$

Reemplazando las ecuaciones 94 y 96 de las deflexiones de cada uno de los subsistemas en la Ecuación 92, la deflexión del punto E se logra:

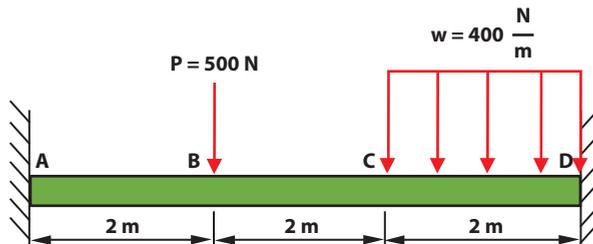
$$\begin{aligned}
 y_E &= -y_{E_I} - y_{E_{II}} \\
 y_{E_I} &= \frac{6400}{7EI} \\
 y_{E_{II}} &= \frac{14400}{7EI} \\
 y_E &= -\frac{6400}{7EI} - \frac{14400}{7EI} \\
 y_E &= -\frac{20800}{7EI}
 \end{aligned}$$

El signo negativo de la deflexión del punto E indica que la deflexión está por debajo del eje horizontal.

## 2.2 Caso estudio

Para la viga empotrada en sus extremos calcular las reacciones de sus apoyos, véase la Figura 35.

**Figura 35. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas**

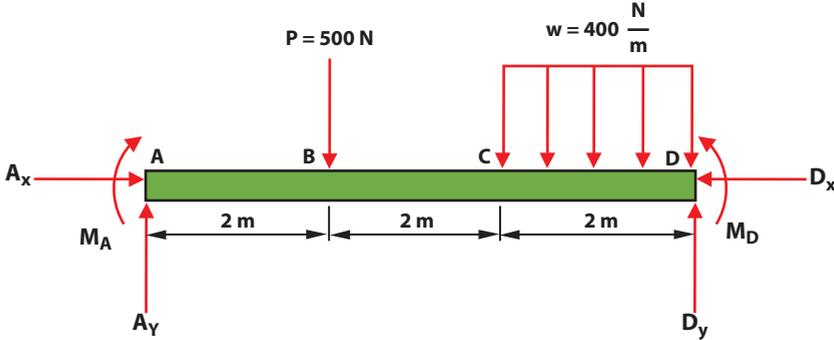


Fuente: elaboración propia.

Como la viga se encuentra empotrada en ambos extremos cada empotramiento le genera tres fuerzas internas a la viga, véase la Figura 36, que en total son seis

incógnitas con tres ecuaciones de equilibrio, por lo que la viga se encuentra estáticamente indeterminada.

**Figura 36. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas e internas**



Fuente: elaboración propia.

Al aplicar la ecuación de equilibrio de momentos en la viga en el punto A se tiene:

$$\begin{aligned}
 + \curvearrowright \sum M_A &= 0 \\
 -M_A - (P) * (2 \text{ m}) - (w * 2 \text{ m}) * \left(4 \text{ m} + \frac{2 \text{ m}}{2}\right) + (D_Y) * (6 \text{ m}) + M_D &= 0 \\
 -M_A - (500 \text{ N}) * (2 \text{ m}) - \left(400 \frac{\text{N}}{\text{m}} * 2 \text{ m}\right) * \left(4 \text{ m} + \frac{2 \text{ m}}{2}\right) + (D_Y) * (6 \text{ m}) + M_D &= 0 \\
 -M_A - (500 \text{ N}) * (2 \text{ m}) - (800 \text{ N}) * (5 \text{ m}) + (D_Y) * (6 \text{ m}) + M_D &= 0 \\
 -M_A - 1000 - 4000 + 6D_Y + M_D &= 0 \\
 -M_A - 5000 + 6D_Y + M_D &= 0 \\
 -M_A + 6D_Y + M_D &= 5000
 \end{aligned} \tag{97}$$

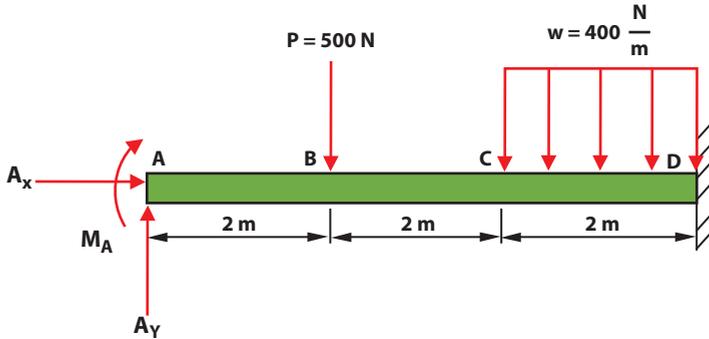
Aplicando la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales en la viga se tiene:

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 A_Y - P - (w * 2 \text{ m}) + D_Y &= 0 \\
 A_Y - 500 \text{ N} - \left(400 \frac{\text{N}}{\text{m}} * 2 \text{ m}\right) + D_Y &= 0 \\
 A_Y - 500 - 800 + D_Y &= 0 \\
 A_Y + D_Y &= 1300
 \end{aligned} \tag{98}$$

En estas dos ecuaciones de equilibrio se relacionan cuatro incógnitas, por lo que el grado de reacción que se presenta en la viga es de 2, así que hay que buscar dos ecuaciones adicionales para resolver la indeterminación. “Se escoge una de las reacciones como redundante y se elimina o modifica el apoyo correspondiente, la

reacción redundante se trata como una carga desconocida” (Beer, 2004, p. 560), para ello se escoge la redundante, en este caso se elige el punto A. Las fuerzas que actúan en la viga tomando como redundante el punto A pueden verse en la Figura 37.

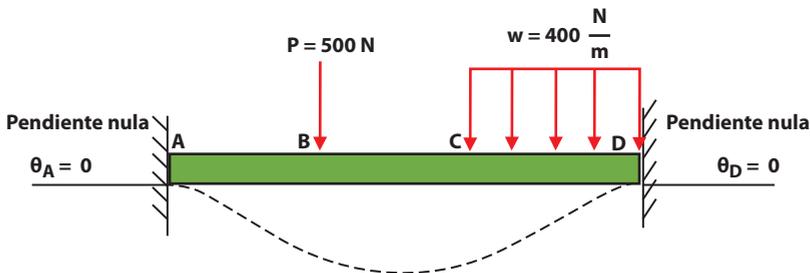
**Figura 37. Fuerzas externas y redundantes que actúan en la viga**



Fuente: elaboración propia.

Las dos ecuaciones adicionales se encuentran con las condiciones de frontera de deflexión y pendiente en el punto A elegido como la redundante de la viga. Como la viga en ese punto siempre hace contacto con el empotramiento, la deflexión es nula y la pendiente de la curva elástica es horizontal, lo que hace que su pendiente sea nula, véase la Figura 38.

**Figura 38. Condiciones de frontera de deflexión y pendiente en la redundante de la viga**



Fuente: elaboración propia.

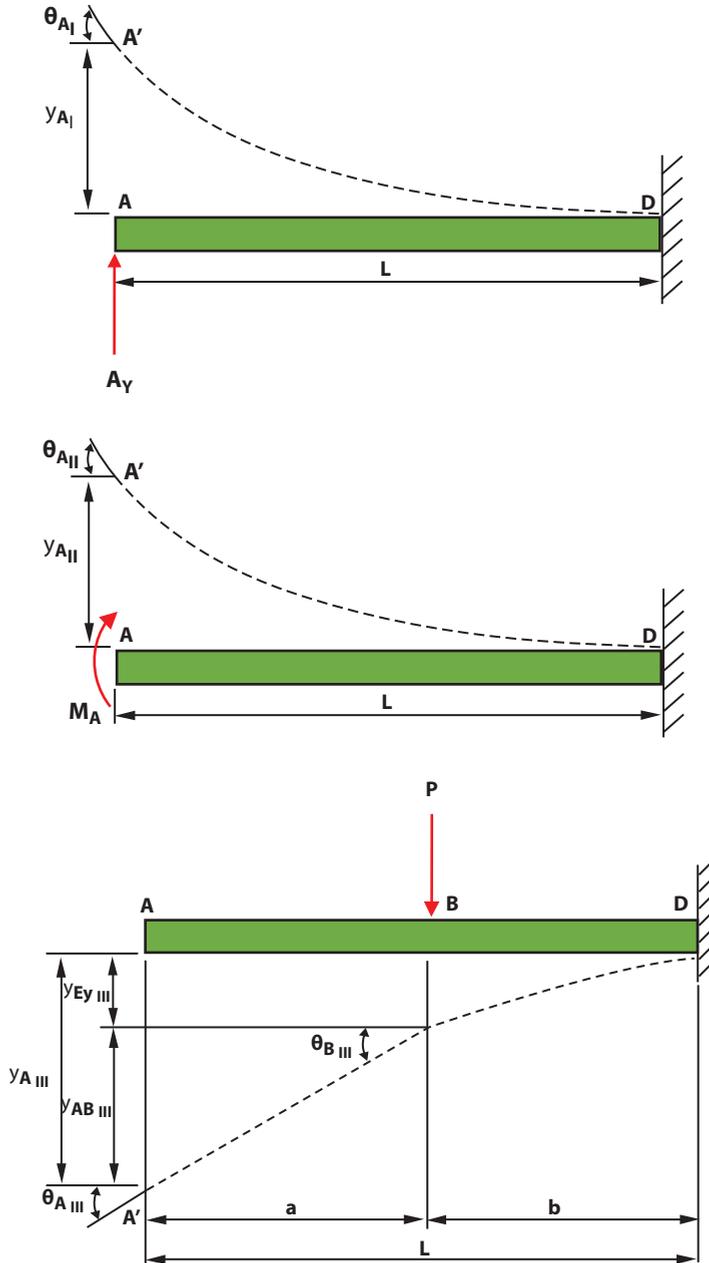
Las condiciones de frontera de la redundante ubicada en el punto A son:

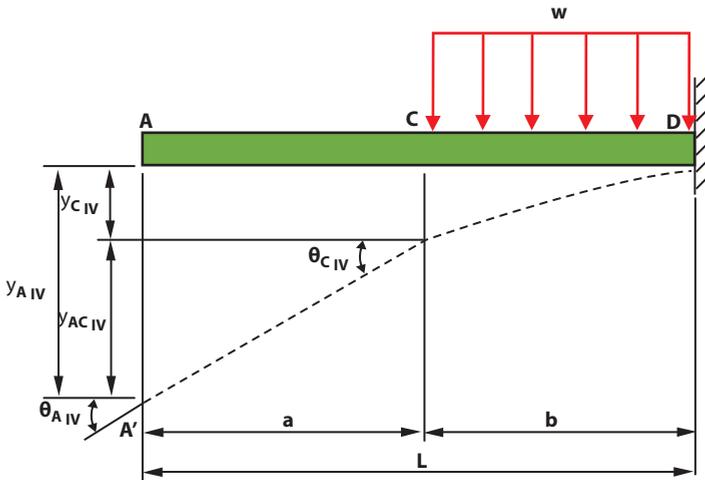
$$y_A = 0 \quad (99)$$

$$\theta_A = 0 \quad (100)$$

Como la viga se encuentra cargada se puede dividir en cuatro subsistemas: dos subsistemas hacen referencia a las cargas externas y dos subsistemas hacen referencia a las reacciones que genera la redundante, véase la Figura 39.

Figura 39. Subsistema de fuerzas que se generan en la viga





Fuente: elaboración propia.

Al utilizar la Ecuación 99 de la condición inicial de deflexión en el punto A de la redundante se tiene:

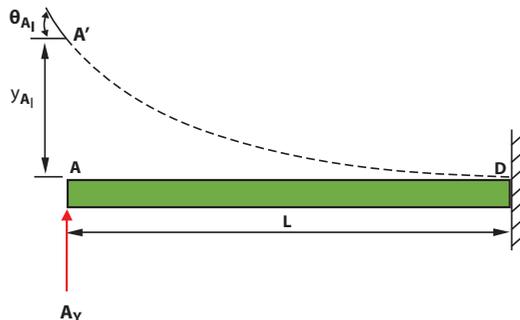
$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum y_A &= 0 \\
 y_{A I} + y_{A II} - y_{A III} - y_{A IV} &= 0 \tag{101}
 \end{aligned}$$

Al aplicar la Ecuación 100 de la condición inicial de pendiente en el punto A de la redundante se tiene:

$$\begin{aligned}
 + \sim \sum \theta_A &= 0 \\
 \theta_{A I} + \theta_{A II} - \theta_{A III} - \theta_{A IV} &= 0 \tag{102}
 \end{aligned}$$

Para encontrar las deflexiones y pendientes en el punto A se utilizan los resultados encontrados y pueden verse en las figuras 26, 27, 28 y 29. Para el subsistema I se tiene que la deflexión del punto A es la máxima deflexión, véase la Figura 40.

**Figura 40. Subsistema I de la componente vertical de la fuerza Ay de la redundante**



Fuente: elaboración propia.

La máxima deflexión del subsistema I es:

$$y_{A_I} = y_{\max_I}$$

La ecuación de la máxima deflexión para una viga empotrada con un voladizo L y una carga P en el extremo es:

$$y = \frac{PL^3}{3EI} \quad (103)$$

Acondicionando la deflexión del subsistema I a la Ecuación 103 se tiene:

$$y_{A_I} = \frac{A_Y(6 \text{ m})^3}{3EI}$$

$$y_{A_I} = \frac{72A_Y}{EI} \quad (104)$$

La ecuación de la pendiente en el extremo de una viga empotrada con un voladizo L y una carga P en el extremo es:

$$\theta = \frac{PL^2}{2EI} \quad (105)$$

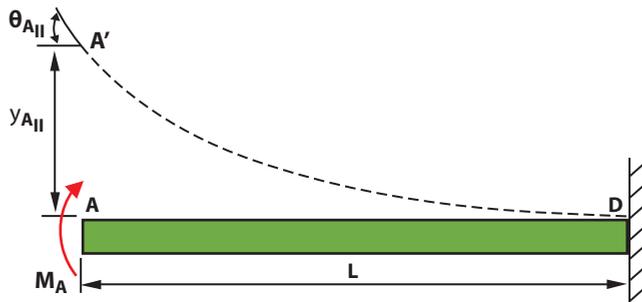
Acondicionando al subsistema I a la Ecuación 105 de la pendiente se tiene:

$$\theta = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\theta_{A_I} = \frac{18A_Y}{EI} \quad (106)$$

Para el subsistema II se tiene que la deflexión del punto A es la máxima deflexión, véase la Figura 41.

**Figura 41. Subsistema II del momento MA de la redundante**



Fuente: elaboración propia.

La máxima deflexión del subsistema II es:

$$y_{A_{II}} = y_{\max_{II}}$$

La ecuación de la máxima deflexión para una viga empotrada con un voladizo L y un momento M en el extremo es:

$$y = \frac{ML^2}{2EI} \quad (107)$$

Acondicionando la deflexión del subsistema II a la Ecuación 107 se tiene:

$$y = \frac{ML^2}{2EI}$$

$$y_{A_{II}} = \frac{18M_A}{EI} \quad (108)$$

La ecuación de la pendiente en el extremo de una viga empotrada con un voladizo L y un momento M en el extremo es:

$$\theta = \frac{ML}{EI} \quad (109)$$

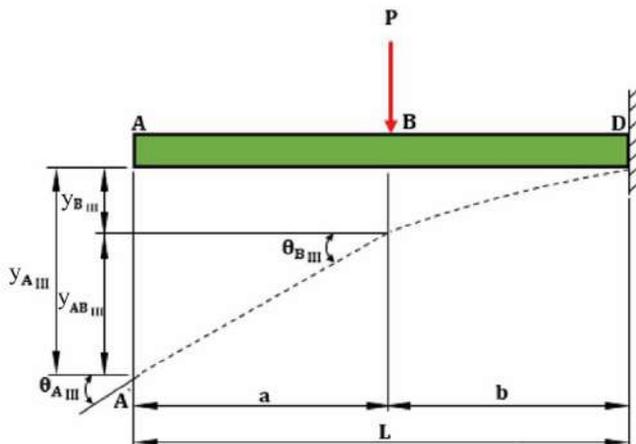
Acondicionando al subsistema II a la Ecuación 109 de la pendiente se tiene:

$$\theta_{A_{II}} = \frac{M_A(6 \text{ m})}{EI}$$

$$\theta_{A_{II}} = \frac{6M_A}{EI} \quad (110)$$

Para el subsistema III se tiene que la deflexión del punto A es la suma de la deflexión del punto B que es la máxima deflexión de una viga empotrada con una longitud que, en este caso, es de 4 m en la que actúa en su extremo una carga P y la deflexión del tramo AB, véase la Figura 42.

**Figura 42. Subsistema III de la fuerza externa concentrada P**



Fuente: elaboración propia.

La deflexión del punto A del subsistema III es:

$$y_{A\text{ III}} = y_{B\text{ III}} + y_{AB\text{ III}} \quad (111)$$

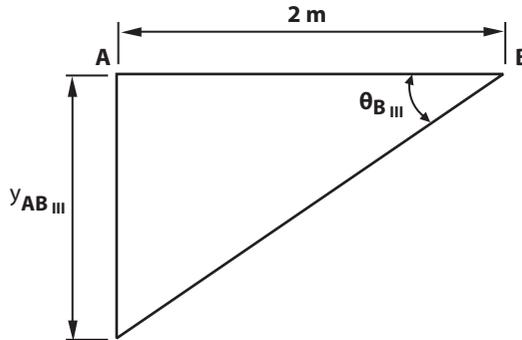
Para determinar la deflexión del punto B se utiliza la ecuación de la máxima deflexión para una viga empotrada con un voladizo L y una carga P en el extremo. Acondicionando la deflexión del subsistema III a la Ecuación 111 se tiene:

$$y_{B\text{ III}} = \frac{32000}{3EI}$$

$$y_{B\text{ III}} = \frac{500 \text{ N} * (4 \text{ m})^3}{3EI} \quad (112)$$

Para la deflexión del tramo AB véase el triángulo rectángulo de la Figura 43.

**Figura 43. Triángulo rectángulo formado entre los puntos A y B del subsistema III**



Fuente: elaboración propia.

Al utilizar la función trigonométrica en la Figura 43 se tiene:

$$\tan \theta_{B\text{ III}} = \frac{y_{AB\text{ III}}}{2 \text{ m}} \quad (113)$$

Para pendientes pequeñas se tiene que la función trigonométrica  $\tan \theta$  se puede considerar como el mismo argumento de la función trigonométrica, por lo que:

$$\tan \theta_{B\text{ III}} = \theta_{B\text{ III}}$$

De la Ecuación 113 la deflexión del tramo AB es:

$$\tan \theta_{B\text{ III}} = \frac{y_{AB\text{ III}}}{2 \text{ m}}$$

$$\theta_{B\text{ III}} = \frac{y_{AB\text{ III}}}{2 \text{ m}}$$

$$y_{AB\text{ III}} = 2\theta_{B\text{ III}} \quad (114)$$

Para la pendiente en el extremo de una viga empotrada con un voladizo L y una carga P en el extremo se utiliza la Ecuación 103 y acondicionándola al subsistema III se tiene:

$$\begin{aligned}\theta_{B_{III}} &= \frac{500 \text{ N} * (4 \text{ m})^2}{2 \text{ E I}} \\ \theta_{B_{III}} &= \frac{4000}{\text{E I}}\end{aligned}\quad (115)$$

Reemplazando la Ecuación 115 de la pendiente del punto B en la Ecuación 114 de la deflexión del tramo AB se tiene:

$$\begin{aligned}y_{AB_{III}} &= 2\theta_{B_{III}} \\ y_{AB_{III}} &= 2 * \frac{4000}{\text{E I}} \\ y_{AB_{III}} &= \frac{8000}{\text{E I}}\end{aligned}\quad (116)$$

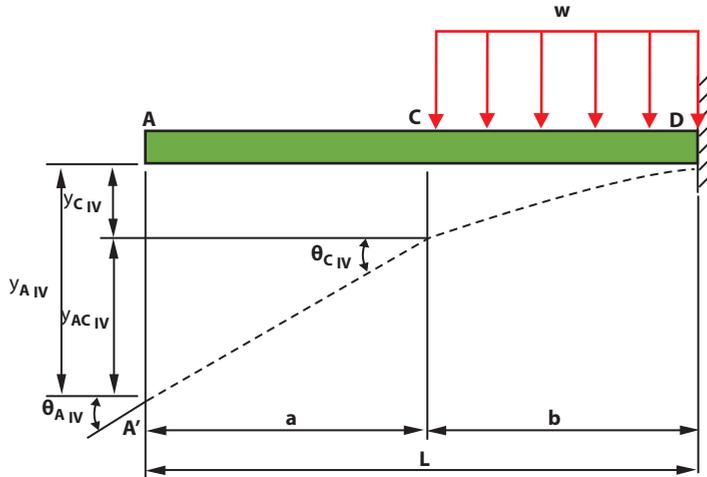
Al reemplazar las ecuaciones 112 y 116 en la Ecuación 111 de la deflexión del punto A del subsistema III es:

$$\begin{aligned}y_{A_{III}} &= y_{B_{III}} + y_{AB_{III}} \\ y_{A_{III}} &= \frac{32000}{3\text{E I}} + \frac{8000}{\text{E I}} \\ y_{A_{III}} &= \frac{56000}{3\text{E I}}\end{aligned}\quad (117)$$

Como en el tramo AB no hay ninguna carga, la curva elástica en este tramo es una línea recta, es decir, la pendiente en el punto B es igual a la pendiente del punto A, por lo que:

$$\begin{aligned}\theta_{B_{III}} &= \theta_{A_{III}} \\ \theta_{B_{III}} &= \frac{4000}{\text{E I}} \\ \theta_{A_{III}} &= \frac{4000}{\text{E I}}\end{aligned}\quad (118)$$

Para el subsistema IV se tiene que la deflexión del punto A es la suma de la deflexión del punto C, que es la máxima deflexión de una viga empotrada con una longitud, en este caso, de 2 m en la que actúa una carga uniformemente distribuida w y la deflexión del tramo AC, véase la Figura 44.

Figura 44. Subsistema IV de carga externa uniformemente distribuida  $w$ 

Fuente: elaboración propia.

La deflexión del punto A del subsistema IV es:

$$y_{A IV} = y_{C IV} + y_{AC IV} \quad (119)$$

Para determinar la deflexión del punto C se utiliza la ecuación de la máxima deflexión para una viga empotrada con un voladizo  $L$  y actuando en ella una carga uniformemente distribuida  $w$ , la cual es:

$$y = \frac{wL^4}{8EI} \quad (120)$$

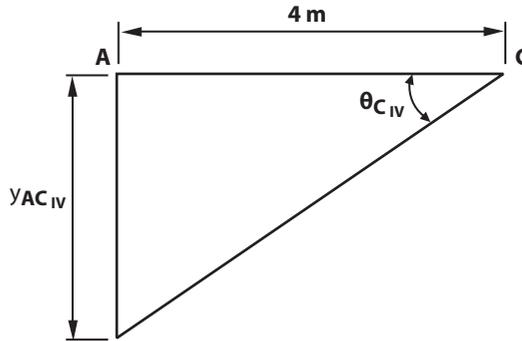
Acondicionando la deflexión del subsistema IV a la Ecuación 120 se tiene:

$$y_{C IV} = \frac{400 \frac{\text{N}}{\text{m}} * (2 \text{ m})^4}{8EI}$$

$$y_{C IV} = \frac{800}{EI} \quad (121)$$

Para la deflexión del tramo AC véase el triángulo rectángulo de la Figura 45.

Figura 45. Triángulo rectángulo formado entre los puntos A y C del subsistema IV



Fuente: elaboración propia.

Al utilizar la función trigonométrica en la Figura 45 se tiene:

$$\tan \theta_{C_{IV}} = \frac{y_{AC_{IV}}}{4 \text{ m}} \quad (122)$$

Para pendientes pequeñas se tiene que la función trigonométrica se puede considerar como el mismo argumento de la función trigonométrica, por lo que:

$$\tan \theta_{C_{IV}} = \theta_{C_{IV}}$$

De la Ecuación 122 la deflexión del tramo AC es:

$$\begin{aligned} \tan \theta_{C_{IV}} &= \frac{y_{AC_{IV}}}{4 \text{ m}} \\ \theta_{C_{IV}} &= \frac{y_{AC_{IV}}}{4 \text{ m}} \\ \delta_{AC_{IV}} &= 4\theta_{C_{IV}} \end{aligned} \quad (123)$$

La ecuación de la pendiente en el extremo de una viga empotrada con un voladizo L y una carga distribuida w en el extremo, la cual es:

$$\theta = \frac{wL^3}{6EI} \quad (124)$$

Acondicionando al subsistema IV a la Ecuación 124 de la pendiente se tiene:

$$\begin{aligned} \theta_{C_{IV}} &= \frac{400 \frac{\text{N}}{\text{m}} * (2 \text{ m})^3}{6EI} \\ \theta_{C_{IV}} &= \frac{1600}{3EI} \end{aligned} \quad (125)$$

Reemplazando la Ecuación 125 de la pendiente del punto C en la Ecuación 121 de la deflexión del tramo AC se tiene:

$$\begin{aligned}
 y_{AC\text{ IV}} &= 4 \theta_{C\text{ IV}} \\
 y_{AC\text{ IV}} &= 4 * \frac{1600}{3EI} \\
 y_{AC\text{ IV}} &= \frac{6400}{3EI}
 \end{aligned} \tag{126}$$

Al reemplazar las ecuaciones 121 y 126 en la Ecuación 119 de la deflexión del punto A del subsistema IV es:

$$\begin{aligned}
 y_{A\text{ IV}} &= y_{C\text{ IV}} + y_{AC\text{ IV}} \\
 y_{A\text{ IV}} &= \frac{800}{EI} + \frac{6400}{3EI} \\
 y_{A\text{ IV}} &= \frac{8800}{3EI}
 \end{aligned} \tag{127}$$

Como en el tramo AC no hay ninguna carga la curva elástica en este tramo es una línea recta, es decir, la pendiente en el punto C es igual a la pendiente del punto A, por lo que:

$$\begin{aligned}
 \theta_{C\text{ IV}} &= \theta_{A\text{ IV}} \\
 \theta_{C\text{ IV}} &= \frac{1600}{3EI} \\
 \theta_{A\text{ IV}} &= \frac{1600}{3EI}
 \end{aligned} \tag{128}$$

Al reemplazar las ecuaciones 104, 108, 117 y 127 de las deflexiones de cada uno de los subsistemas en la Ecuación 101 de la condición inicial de deflexión en el punto A se tiene:

$$\begin{aligned}
 y_{A\text{ I}} + y_{A\text{ II}} - y_{A\text{ III}} - y_{A\text{ IV}} &= 0 \\
 \frac{72A_Y}{EI} + \frac{18M_A}{EI} - \frac{56000}{3EI} - \frac{8800}{3EI} &= 0 \\
 \frac{72A_Y}{EI} + \frac{18M_A}{EI} - \frac{21600}{EI} &= 0
 \end{aligned} \tag{129}$$

Multiplicando la Ecuación 129 de la condición inicial de deflexión, por el módulo de rigidez de la viga se tiene:

$$72A_Y + 18M_A = 21600 \tag{130}$$

Al reemplazar las ecuaciones 106, 110, 118 y 128 de las pendientes de cada uno de los subsistemas en la Ecuación 102 de la condición inicial de pendiente en el punto A se tiene:

$$\begin{aligned}
 \theta_{A\text{ I}} + \theta_{A\text{ II}} - \theta_{A\text{ III}} - \theta_{A\text{ IV}} &= 0 \\
 \frac{18A_Y}{EI} + \frac{6M_A}{EI} - \frac{4000}{EI} - \frac{1600}{3EI} &= 0 \\
 \frac{18A_Y}{EI} + \frac{6M_A}{EI} - \frac{13600}{3EI} &= 0
 \end{aligned} \tag{131}$$

Multiplicando la Ecuación 131 de la condición inicial de pendiente, por el módulo de rigidez de la viga, se tiene:

$$18A_Y + 6M_A = \frac{13600}{3} \quad (132)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones 130 y 132 de la condición inicial de deflexión y pendiente en el punto A se tiene:

$$72A_Y + 18M_A = 21600 \quad (130)$$

$$18A_Y + 6M_A = \frac{13600}{3} \quad (132)$$

Para eliminar el momento en el empotramiento en el punto A se multiplica la Ecuación 132 de la condición inicial de pendiente por -3, por lo que las ecuaciones de condición inicial de deflexión y pendiente en el punto A quedan de la siguiente manera:

$$72A_Y + 18M_A = 21600 \quad (130)$$

$$-54A_Y - 18M_A = -13600 \quad (133)$$

Al sumar las dos ecuaciones 130 y 133 se tiene:

$$18A_Y = 8000$$

$$A_Y = \frac{4000}{9} \text{ N} \quad (134)$$

Reemplazando la Ecuación 134 de la componente vertical de fuerza en la redundante en el punto A en la Ecuación 130 de la condición inicial de deflexión se tiene:

$$72A_Y + 18M_A = 21600$$

$$72 * \frac{4000}{9} + 18M_A = 21600$$

$$32000 + 18M_A = 21600$$

$$18M_A = -10400$$

$$M_A = -\frac{52000}{9} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (135)$$

Al reemplazar la Ecuación 134 de la componente vertical de fuerza de la redundante en el punto A en la Ecuación 98 de la ecuación de equilibrio de fuerza vertical en la viga se tiene:

$$A_Y + D_Y = 1300$$

$$\frac{4000}{9} + D_Y = 1300$$

$$D_Y = \frac{7700}{9} \text{ N} \quad (136)$$

Al reemplazar las ecuaciones 135 y 136 del momento en el punto A y la componente vertical de fuerza que le ejerce el apoyo ubicado en el punto D de la Ecuación 97 de equilibrio de momentos en toda la viga se tiene:

$$\begin{aligned} -M_A + 6D_Y + M_D &= 5000 \\ -\left(-\frac{52000}{9}\right) + 6 * \frac{7700}{9} + M_D &= 5000 \\ \frac{52000}{9} + \frac{15400}{3} + M_D &= 5000 \\ M_D &= -\frac{53200}{9} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned} \tag{137}$$



## CAPÍTULO 3

# MÉTODO DE SINGULARIDAD

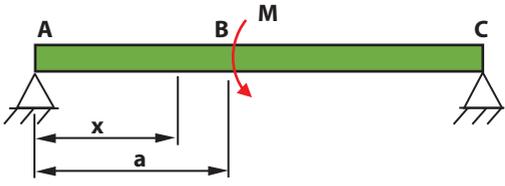
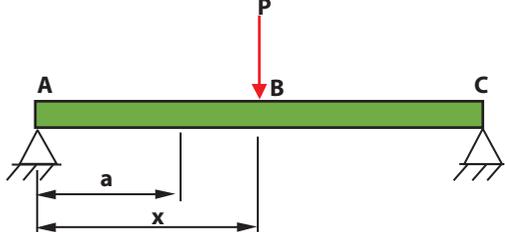
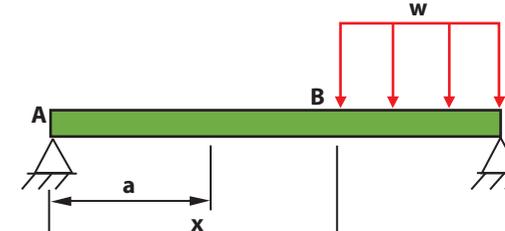
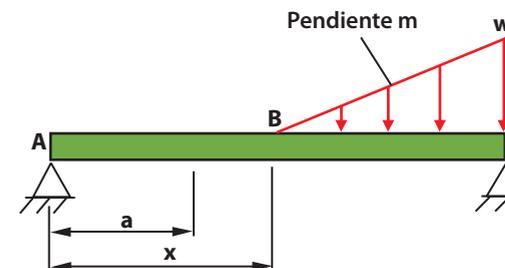
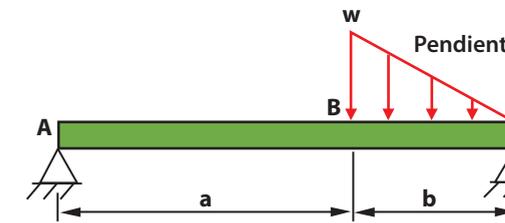
El método de la integración permite calcular la pendiente y la deflexión en cualquier posición de una viga, así como resolver vigas estáticamente indeterminadas siempre que pueda representarse el momento flector utilizando una función en términos de la posición  $x$ . Sin embargo, cuando a la viga se le aplican una serie de cargas, entre las que se encontrará la ecuación del momento flector, y se realiza la integración sucesiva para encontrar las ecuaciones de la pendiente y la deflexión por cada tramo, aparecerán dos constantes de integración requiriendo del mismo número de ecuaciones que se encontrarán con las condiciones de frontera en los apoyos, lo que hace que el procedimiento sea extensor; es por ello que es indispensable el uso de las funciones de singularidad que simplificarán los cálculos para determinar las constantes de integración.

Cuando la ecuación de la curva elástica de una viga puede expresarse como una función continua a todo lo largo de la viga. Sin embargo, si varias cargas diferentes actúan sobre la viga y deben escribirse funciones de momento para cada región entre cargas. (Hibbeler, 1997, p. 596)

Las funciones de singularidad reducen el procedimiento para la evaluación de pendientes y la deflexión de la curva elástica de la viga, ya que se requiere la evaluación de la ecuación del momento flector para toda la viga y no de sus ecuaciones ni de la determinación de las constantes de integración en cada tramo. El análisis de este método solo requiere aplicar dos integrales sucesivas a la variación del momento flector en toda la viga y la determinación de solo dos constantes de

integración. En la Figura 46 pueden verse las funciones de singularidad de varias cargas.

**Figura 46. Funciones de singularidad de diversas cargas**

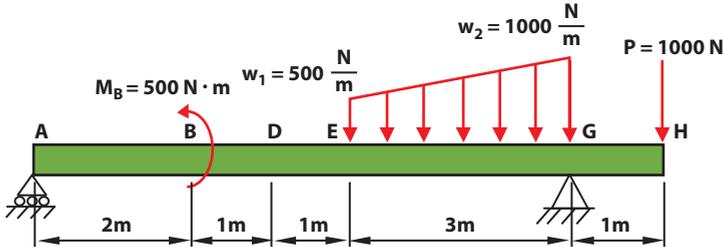
	$w_{(x)} = M (x - a)^2$ $M_{(x)} = -M (x - a)^0$
	$w_{(x)} = -P(x - a)^{-1}$ $M_{(x)} = -P(x - a)^1$
	$M_{(x)} = \frac{1}{2}W(x - a)^2$ $w_{(x)} = -w(x - a)^0$
	$M_{(x)} = -\frac{m}{6}(x - a)^3$ $w_{(x)} = \frac{w}{L}(x - a)^1$
	$w_{(x)} = w(x - a)^0$ $-\frac{w}{b}(x - a)^1$

Fuente: elaboración propia.

### 3.1 Caso estudio

Para la viga mostrada en la Figura 47, calcular las deflexiones en los puntos D y H.

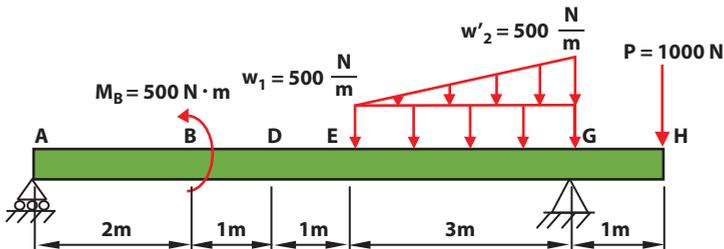
Figura 47. Diagrama de cuerpo libre de la viga AH con cargas externas y apoyos



Fuente: elaboración propia.

Para determinar las reacciones de la viga es necesario utilizar las ecuaciones de equilibrio y para concentrar la carga distribuida de forma trapezoidal se subdivide en una carga uniformemente distribuida de valor 500 N/m y una carga distribuida de forma triangular de valor 500 N/m, vease la Figura 48.

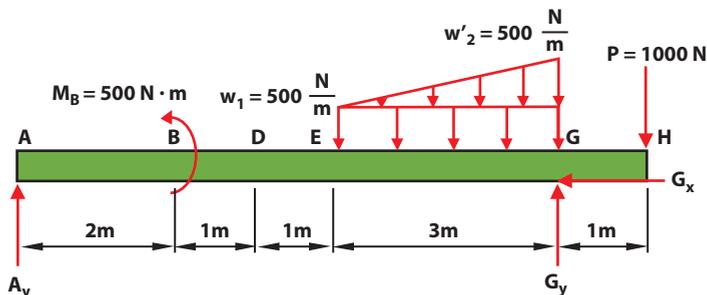
Figura 48. Subdivisión de la carga distribuida trapezoidal



Fuente: elaboración propia.

Las fuerzas aplicadas a la viga pueden verse en la Figura 49.

Figura 49. Diagrama de cuerpo libre de la viga con cargas externas e internas



Fuente: elaboración propia.

Para concentrar las cargas distribuidas producto de las subdivisiones de la carga trapezoidal, una subdivisión es la carga distribuida uniforme de valor 500 N/m que se ubica a una distancia de 1.5 m a la derecha del punto E y tiene una magnitud de:

$$W_1 = w_1 * 3 \text{ m} \quad (138)$$

$$W_1 = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} * 3 \text{ m}$$

$$W_1 = 1500 \text{ N} \quad (139)$$

Para la otra subdivisión es la carga distribuida triangular de valor 500 N/m que se ubica a una distancia de 2 m a la derecha del punto E y tiene una magnitud de:

$$w'_2 = w_2 - w_1 \quad (140)$$

$$w'_2 = 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}} - 500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

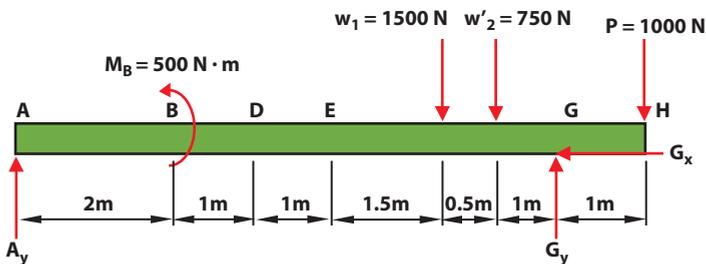
$$w'_2 = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (141)$$

$$W'_2 = \frac{500 \frac{\text{N}}{\text{m}} * 3 \text{ m}}{2}$$

$$W'_2 = 750 \text{ N} \quad (142)$$

Las cargas que actúan en la viga pueden verse en la Figura 50.

**Figura 50. Diagrama de cuerpo libre con cargas internas y concentración de fuerzas distribuidas en la viga AH**



Fuente: elaboración propia.

Al aplicar la ecuación de equilibrio de momentos en la viga en el punto A se tiene:

$$-\curvearrowright \sum M_A = 0$$

$$-M_B + (w_1 * 3 \text{ m}) * \left(4 \text{ m} + \frac{3}{2} \text{ m}\right) + \left(\frac{w_2' * 3 \text{ m}}{2}\right) * \left(4 \text{ m} + \frac{2 * 3 \text{ m}}{3}\right) - (G_Y) * (7 \text{ m}) + (P) * (8 \text{ m}) = 0$$

$$-500 \text{ N} \cdot \text{m} + \left(500 \frac{\text{N}}{\text{m}} * 3 \text{ m}\right) * (5.5 \text{ m}) + \left(\frac{500 \frac{\text{N}}{\text{m}} * 3 \text{ m}}{2}\right) * (6 \text{ m}) - (G_Y) * (7 \text{ m}) + (1000 \text{ N}) * (8 \text{ m}) = 0$$

$$-500 \text{ N} \cdot \text{m} + (1500 \text{ N}) * (5.5 \text{ m}) + (750 \text{ N}) * (6 \text{ m}) - (G_Y) * (7 \text{ m}) + (1000 \text{ N}) * (8 \text{ m}) = 0$$

$$-500 + 8250 + 4500 - 7G_Y + 8000 = 0$$

$$7G_Y = -500 + 8250 + 4500 + 8000$$

$$7G_Y = 20250$$

$$G_Y = \frac{20250}{7} \text{ N} \quad (143)$$

Aplicando la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales en la viga se tiene:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$A_Y - (w_1 * 3 \text{ m}) - \left(\frac{w_2' * 3 \text{ m}}{2}\right) + G_Y - P = 0 \quad (144)$$

Al reemplazar la Ecuación 143 de la componente vertical de fuerza que le ejerce la articulación G a la viga en la Ecuación 144 se tiene:

$$A_Y - \left(500 \frac{\text{N}}{\text{m}} * 3 \text{ m}\right) - \left(\frac{500 \frac{\text{N}}{\text{m}} * 3 \text{ m}}{2}\right) + \frac{20250}{7} \text{ N} - 1000 \text{ N} = 0$$

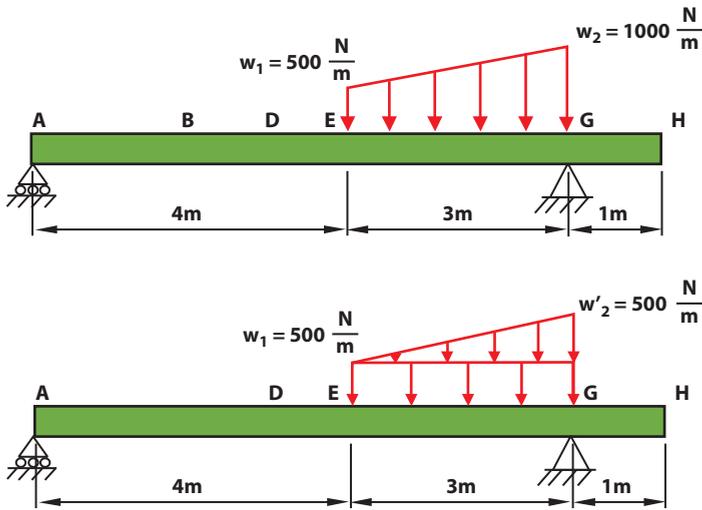
$$A_Y - 1500 - 750 + \frac{20250}{7} - 1000 = 0$$

$$A_Y - \frac{2500}{7} = 0$$

$$A_Y = \frac{2500}{7} \text{ N} \quad (145)$$

Para encontrar la variación del momento en toda la viga una solución es aplicar las funciones de singularidad y, de acuerdo a las cargas aplicadas a la viga, la única carga que no aparece en las tablas de funciones de singularidad es la carga distribuida trapezoidal, la cual se acondiciona haciendo una subdivisión con una carga uniformemente distribuida de valor  $w_1 = 500 \text{ N/m}$  actuando desde el punto E hasta el punto G y una carga distribuida de forma triangular iniciando en el punto E y terminando en el punto G con un valor de  $w_2 = 500 \text{ N/m}$ , vease la Figura 51.

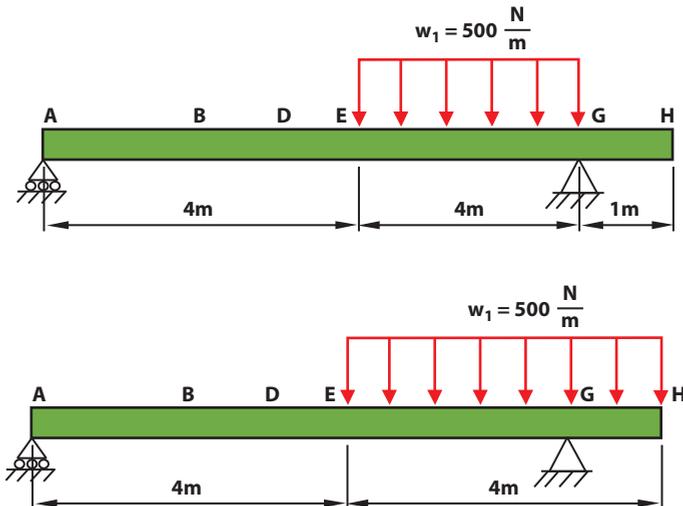
**Figura 51. Acondicionamiento de la carga distribuida trapezoidal que actúa en la viga AH**

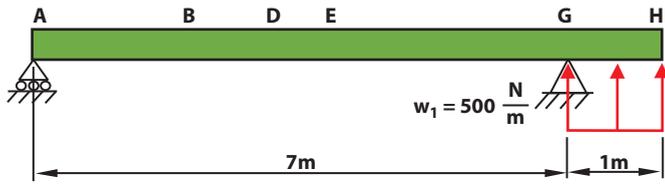


Fuente: elaboración propia.

Para acondicionar la carga uniformemente distribuida de valor  $w_1=500 \text{ N/m}$  que actúa desde el punto E hasta el punto G se genera una carga distribuida uniforme dirigida hacia abajo, actuando desde el punto E hasta el punto H, de magnitud  $w_1=500 \text{ N/m}$  y una carga distribuida uniforme dirigida hacia arriba actuando desde el punto G hasta el punto H, de magnitud  $w_1=500 \text{ N/m}$ , vease la Figura 52.

**Figura 52. Acondicionamiento de la carga distribuida uniforme que actúa desde el punto E al punto G**

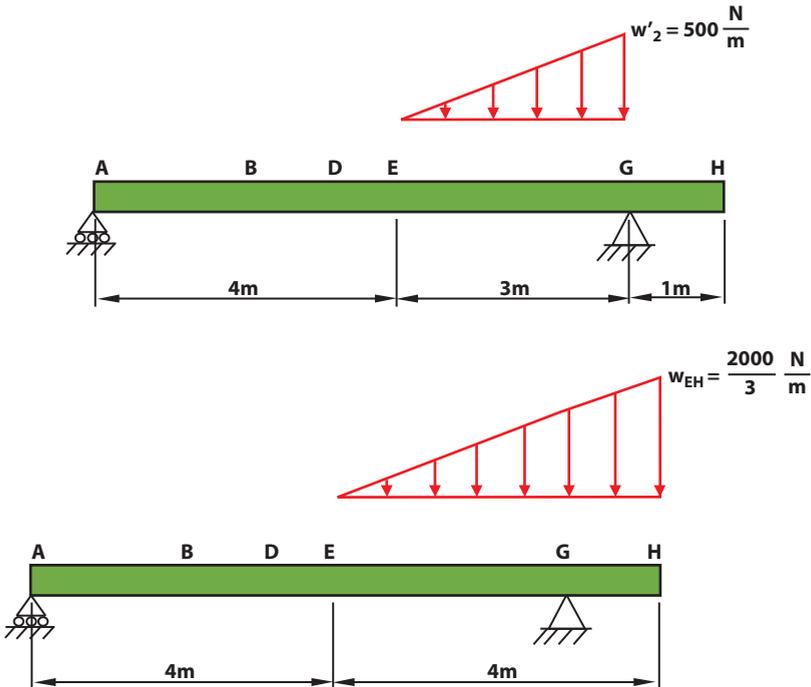


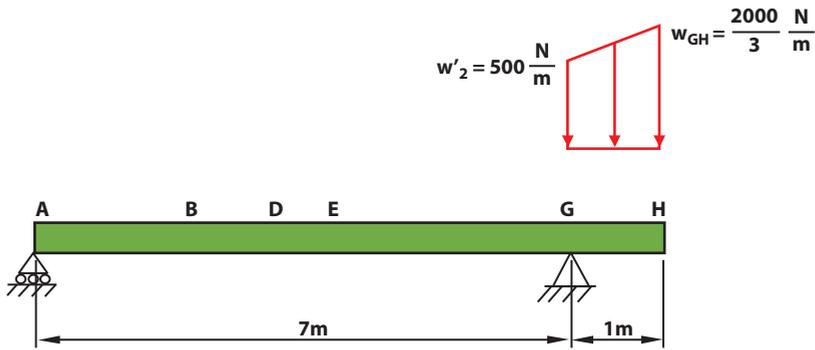


Fuente: elaboración propia.

Para acondicionar la carga distribuida de forma triangular dirigida hacia abajo, iniciando en el punto E y terminando en el punto G con un valor de  $w'_2 \leq 500 \text{ N/m}$ , se genera con una carga distribuida de forma triangular dirigida hacia abajo iniciando en el punto E y terminando en el punto H con un valor  $w_{EH}$ , pero al agregar esta carga triangular se le está sumando una carga trapezoidal dirigida hacia abajo actuando desde el punto G con un valor de  $w'_2 \leq 500 \text{ N/m}$  y terminando en el punto H con  $w_{EH}$ , vease la Figura 53.

**Figura 53. Acondicionamiento de la carga distribuida triangular que actúa desde el punto E al punto G**

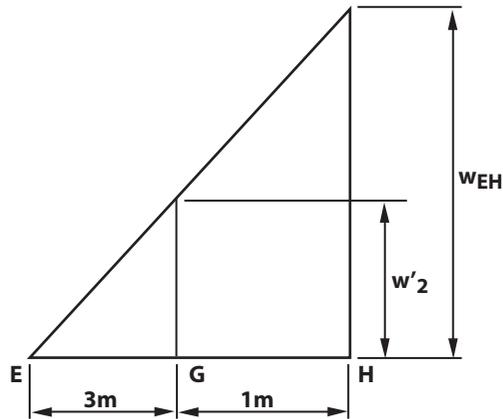




Fuente: elaboración propia.

Para encontrar el valor de la carga distribuida  $w_{EH}$  se hace la relación de triángulos semejantes formados entre los puntos E y G con E y G de la viga, véase la Figura 54.

**Figura 54. Relación de triángulos semejantes formados entre los puntos E y G con E y H**



Fuente: elaboración propia.

De la relación de triángulos semejantes se tiene:

$$\frac{w'_2}{3 \text{ m}} = \frac{w_{EH}}{4 \text{ m}} \quad (146)$$

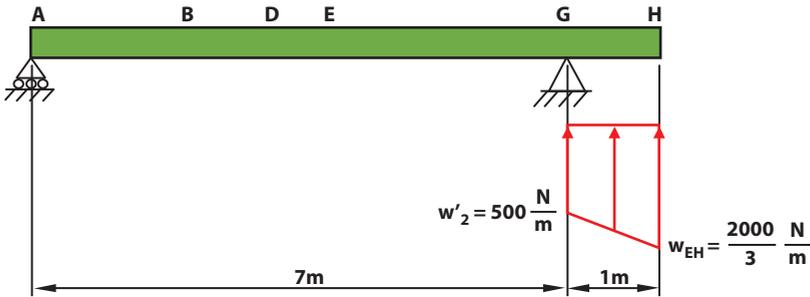
$$\frac{500 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{3 \text{ m}} = \frac{w_{EH}}{4 \text{ m}}$$

$$w_{EH} = \frac{500 * 4}{3}$$

$$w_{EH} = \frac{2000}{3} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (147)$$

Al acondicionar la carga distribuida triangular dirigida hacia abajo de valor  $w'_2 \leq 500 \text{ N/m}$  se agregó una carga trapezoidal dirigida hacia abajo actuando desde el punto G y terminando en el punto H, por tal motivo hay que agregarle esta carga distribuida trapezoidal actuando desde el punto G y terminando en el punto H, pero dirigida hacia arriba, vease la Figura 55.

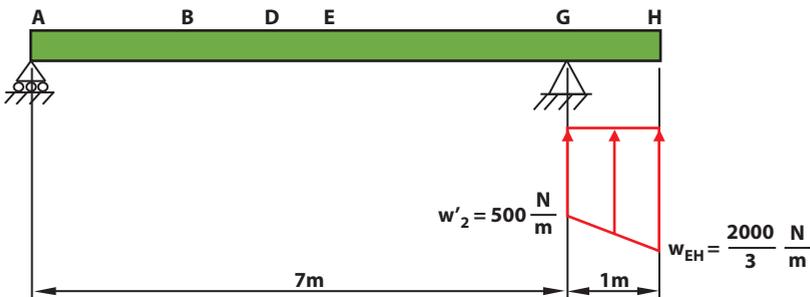
**Figura 55. Carga distribuida trapezoidal dirigida hacia arriba**

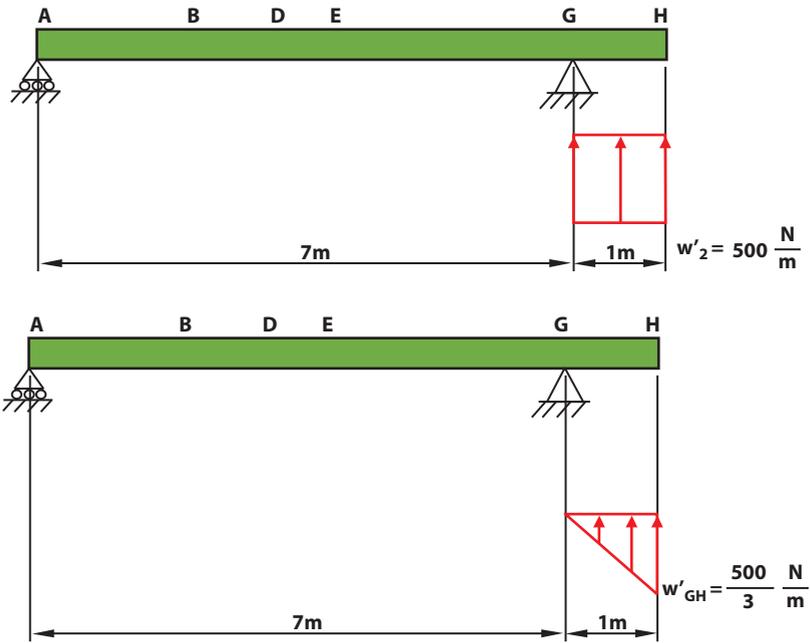


Fuente: elaboración propia.

Para acondicionar la carga distribuida de forma trapezoidal dirigida hacia arriba actuando desde el punto G y terminando en el punto H, se genera una carga distribuida uniforme dirigida hacia arriba de valor  $w'_2 \leq 500 \text{ N/m}$  iniciando en el punto G y terminando en el punto H y una carga distribuida de forma triangular dirigida hacia arriba iniciando en el punto G y terminando en el punto H con un valor de  $w'_{GH}$ , vease la Figura 56.

**Figura 56. Acondicionamiento de la carga distribuida trapezoidal que actúa desde el punto G al punto H**





Fuente: elaboración propia.

Para encontrar el valor de la carga distribuida  $w'_{GH}$  se hace la resta entre las cargas distribuidas  $w_{EH}$  y  $w'_2$ , véase la Figura 57.

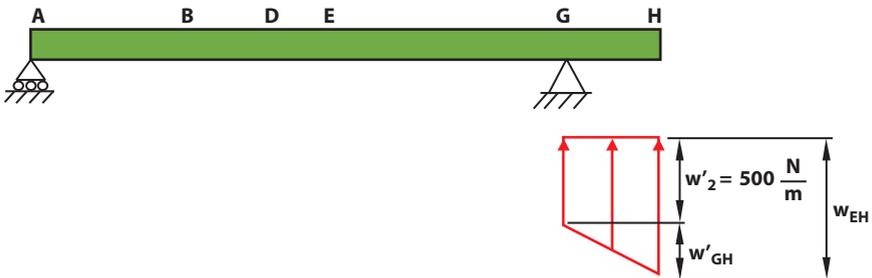
$$w_{EH} = w'_2 + w'_{GH} \tag{148}$$

$$\frac{2000}{3} \frac{N}{m} = 500 \frac{N}{m} + w'_{GH}$$

$$w'_{GH} = \frac{2000}{3} \frac{N}{m} - 500 \frac{N}{m}$$

$$w'_{GH} = \frac{500}{3} \frac{N}{m} \tag{149}$$

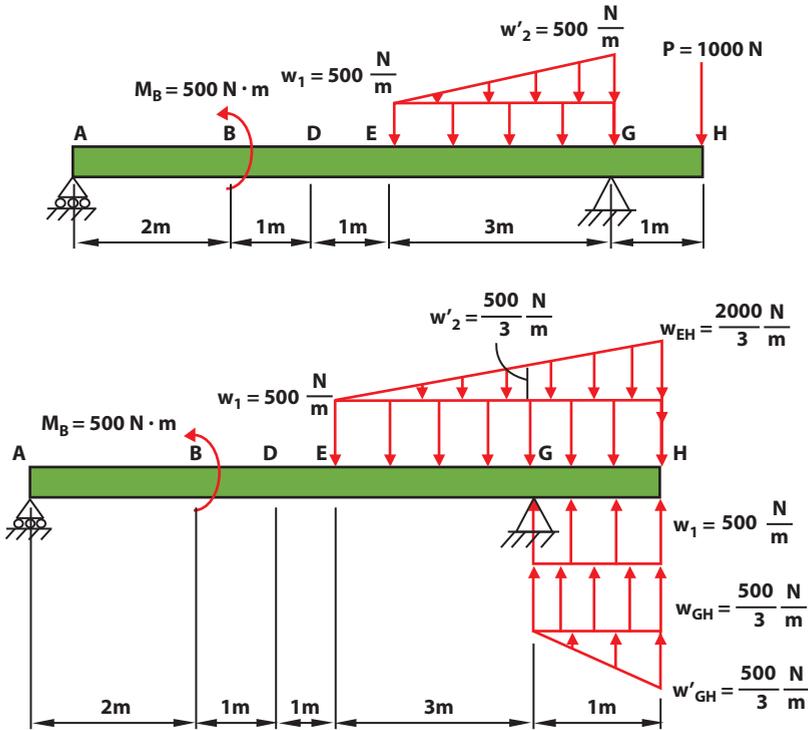
Figura 57. Relación de cargas distribuidas



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 58 se muestra el acondicionamiento de la viga completa.

**Figura 58. Acondicionamiento de la viga completa**



Fuente: elaboración propia.

Habiendo acondicionado las cargas de acuerdo a las tablas de funciones de singularidad, véase la Figura 46, la ecuación del momento flector en toda la viga es:

$$\begin{aligned}
 M(x) = & A_Y(x) - M_B \langle x - 2 \rangle^0 - \frac{w_1}{2} \langle x - 4 \rangle^2 + \frac{w_1}{2} \langle x - 7 \rangle^2 - \frac{w_{EH}}{6L_{EH}} \langle x - 4 \rangle^3 \\
 & + \frac{w'_2}{2} \langle x - 7 \rangle^2 + \frac{w_{GH}}{6L_{GH}} \langle x - 7 \rangle^3 + G_Y \langle x - 7 \rangle^1
 \end{aligned} \tag{150}$$

Al reemplazar las ecuaciones 143 y 145 de las componentes de fuerzas verticales que le ejercen los apoyos ubicados en los puntos G y A y los valores de las cargas distribuidas en la Ecuación 150 del momento flector en toda la viga se logra:

$$\begin{aligned}
 M(x) &= \frac{2500}{7} N(x) - 500 N \cdot m(x-2)^0 - \frac{500}{2} \frac{N}{m} \langle x-4 \rangle^2 + \frac{500}{2} \frac{N}{m} \langle x-7 \rangle^2 \\
 &\quad - \frac{2000}{3} \frac{N}{m} \langle x-4 \rangle^3 + \frac{500}{2} \frac{N}{m} \langle x-7 \rangle^2 + \frac{500}{6 * 1 m} \frac{N}{m} \langle x-7 \rangle^3 \\
 &\quad + \frac{20250}{7} N \langle x-7 \rangle^1 \\
 M(x) &= \frac{2500}{7} (x) - 500 \langle x-2 \rangle^0 - 250 \langle x-4 \rangle^2 + 250 \langle x-7 \rangle^2 - \frac{250}{9} \langle x-4 \rangle^3 \\
 &\quad + 250 \langle x-7 \rangle^2 + \frac{250}{9} \langle x-7 \rangle^3 + \frac{20250}{7} \langle x-7 \rangle^1 \\
 M(x) &= \frac{2500x}{7} - 500 \langle x-2 \rangle^0 - 250 \langle x-4 \rangle^2 + 500 \langle x-7 \rangle^2 - \frac{250}{9} \langle x-4 \rangle^3 \\
 &\quad + \frac{250}{9} \langle x-7 \rangle^3 + \frac{20250}{7} \langle x-7 \rangle^1 \tag{151}
 \end{aligned}$$

Integrando la ecuación del momento flector de la viga se encuentra la ecuación de la pendiente.

$$EI \frac{dy}{dx} = \int M(x) dx + C_1$$

Si se reemplaza la Ecuación 151 del momento flector en toda la viga se encuentra la ecuación de la pendiente de la viga:

$$\begin{aligned}
 EI \frac{dy}{dx} &= \int \left[ \frac{2500x}{7} - 500 \langle x-2 \rangle^0 - 250 \langle x-4 \rangle^2 + 500 \langle x-7 \rangle^2 - \frac{250}{9} \langle x-4 \rangle^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{250}{9} \langle x-7 \rangle^3 + \frac{20250}{7} \langle x-7 \rangle^1 \right] dx + C_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI \frac{dy}{dx} &= \int \left[ \frac{2500x}{7} dx - 500 \langle x-2 \rangle^0 dx - 250 \langle x-4 \rangle^2 dx + 500 \langle x-7 \rangle^2 dx \right. \\
 &\quad \left. - \frac{250}{9} \langle x-4 \rangle^3 dx + \frac{250}{9} \langle x-7 \rangle^3 dx + \frac{20250}{7} \langle x-7 \rangle^1 dx \right] + C_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI \frac{dy}{dx} &= \frac{2500x^2}{7 * 2} - 500 \langle x-2 \rangle^1 - \frac{250}{3} \langle x-4 \rangle^3 + \frac{500}{3} \langle x-7 \rangle^3 - \frac{250}{9 * 4} \langle x-4 \rangle^4 \\
 &\quad + \frac{250}{9 * 4} \langle x-7 \rangle^4 + \frac{20250}{7 * 2} \langle x-7 \rangle^2 + C_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI \frac{dy}{dx} &= \frac{2500x^2}{14} - 500 \langle x-2 \rangle^1 - \frac{250}{3} \langle x-4 \rangle^3 + \frac{500}{3} \langle x-7 \rangle^3 - \frac{250}{9 * 4} \langle x-4 \rangle^4 \\
 &\quad + \frac{250}{9 * 4} \langle x-7 \rangle^4 + \frac{20250}{14} \langle x-7 \rangle^2 + C_1
 \end{aligned}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{17857x^2}{100} - 500(x-2)^1 - \frac{250}{3}(x-4)^3 + \frac{500}{3}(x-7)^3 - \frac{250}{36}(x-4)^4 + \frac{250}{36}(x-7)^4 + \frac{20250}{14}(x-7)^2 + C_1 \quad (152)$$

Si se reemplaza la Ecuación 152 de la pendiente en toda la viga se encuentra la ecuación de la deflexión de la viga:

$$EIy(x) = \int \left[ \frac{17857x^2}{100} - 500(x-2)^1 - \frac{250}{3}(x-4)^3 + \frac{500}{3}(x-7)^3 - \frac{250}{36}(x-4)^4 + \frac{250}{36}(x-7)^4 + \frac{20250}{14}(x-7)^2 + C_1 \right] dx + C_2$$

$$EIy(x) = \frac{17857x^3}{100 * 3} - \frac{500}{2}(x-2)^2 - \frac{250}{3 * 4}(x-4)^4 + \frac{500}{3 * 4}(x-7)^4 - \frac{250}{36 * 5}(x-4)^5 + \frac{250}{36 * 5}(x-7)^5 + \frac{20250}{14 * 3}(x-7)^3 + C_1x + C_2$$

$$EIy(x) = \frac{17857x^3}{300} - \frac{500}{2}(x-2)^2 - \frac{250}{12}(x-4)^4 + \frac{500}{12}(x-7)^4 - \frac{250}{180}(x-4)^5 + \frac{250}{180}(x-7)^5 + \frac{20250}{42}(x-7)^3 + C_1x + C_2$$

$$EIy(x) = \frac{17857x^3}{300} - 250(x-2)^2 - \frac{125}{6}(x-4)^4 + \frac{125}{3}(x-7)^4 - \frac{25}{18}(x-4)^5 + \frac{25}{18}(x-7)^5 + \frac{144643}{300}(x-7)^3 + C_1x + C_2 \quad (153)$$

En el punto A, ubicado a una distancia  $x = 0$  de la viga, existe un rodillo, por lo que la condición inicial o de frontera es:

$$y_A = 0 \quad (154)$$

En el punto G ubicado a una distancia  $x = 7$  de la viga existe una articulación, por lo que la condición inicial o de frontera es:

$$y_G = 0 \quad (155)$$

Al reemplazar la Ecuación 154 de la condición inicial de deflexión en el punto A de la viga donde  $x = 0$  en la Ecuación 153 de la deflexión en toda la viga se tiene:

$$\begin{aligned}
 Ely(x) &= \frac{17857x^3}{300} - 250(x-2)^2 - \frac{125}{6}(x-4)^4 + \frac{125}{3}(x-7)^4 - \frac{25}{18}(x-4)^5 \\
 &\quad + \frac{25}{18}(x-7)^5 + \frac{144643}{300}(x-7)^3 + C_1x + C_2 \\
 EI * 0 &= \frac{17857 * 0^3}{300} - 250(0-2)^2 - \frac{125}{6}(0-4)^4 + \frac{125}{3}(0-7)^4 \\
 &\quad - \frac{25}{18}(0-4)^5 + \frac{25}{18}(0-7)^5 + \frac{144643}{300}(0-7)^3 + C_1 * 0 + C_2
 \end{aligned}$$

En la ecuación anterior, cuando las funciones de singularidad son negativas son nulas no se tienen en cuenta y corresponden a los términos desde el segundo al sexto término.

$$0 = C_2$$

Por lo que la segunda constante de integración es nula.

$$C_2 = 0 \quad (156)$$

Al reemplazar en la Ecuación 155 de la condición inicial de deflexión en el punto G de la viga donde  $x = 7$  m en la Ecuación 153 de la deflexión en toda la viga se encuentra:

$$\begin{aligned}
 Ely(x) &= \frac{17857x^3}{300} - 250(x-2)^2 - \frac{125}{6}(x-4)^4 + \frac{125}{3}(x-7)^4 - \frac{25}{18}(x-4)^5 \\
 &\quad + \frac{25}{18}(x-7)^5 + \frac{144643}{300}(x-7)^3 + C_1x + C_2 \\
 EI * 0 &= \frac{17857 * 7^3}{300} - 250(7-2)^2 - \frac{125}{6}(7-4)^4 + \frac{125}{3}(7-7)^4 \\
 &\quad - \frac{25}{18}(7-4)^5 + \frac{25}{18}(7-7)^5 + \frac{144643}{300}(7-7)^3 + C_1 * 7 + 0 \\
 0 &= \frac{17857 * 7^3}{300} - 250(7-2)^2 - \frac{125}{6}(7-4)^4 + 0 - \frac{25}{18}(7-4)^5 + 0 + 0 + 7C_1 \\
 0 &= \frac{6124951}{300} - 6250 - \frac{3375}{2} - \frac{675}{2} + 7C_1 \\
 0 &= \frac{6124951}{300} - 6250 - \frac{3375}{2} - \frac{675}{2} + 7C_1 \\
 0 &= \frac{6124951}{300} - 8275 + 7C_1 \\
 7C_1 &= -\frac{3642451}{300}
 \end{aligned}$$

Por lo que la primera constante de integración es:

$$C_1 = -\frac{3642451}{2100} \quad (157)$$

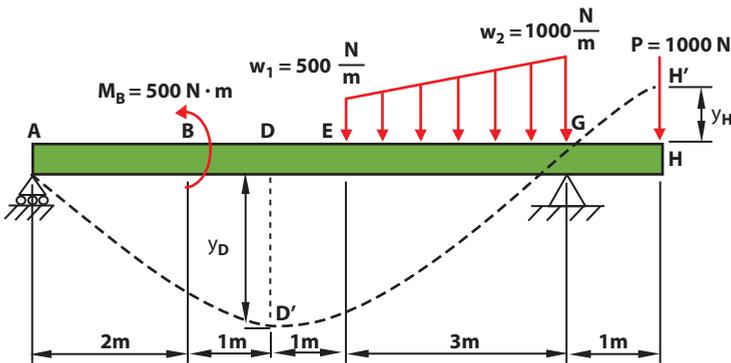
Al sustituir las ecuaciones 156 y 157 de los valores de las constantes de integración en la Ecuación de la curva elástica 153 se logra:

$$Ely(x) = \frac{17857x^3}{300} - 250(x-2)^2 - \frac{125}{6}(x-4)^4 + \frac{125}{3}(x-7)^4 - \frac{25}{18}(x-4)^5 + \frac{25}{18}(x-7)^5 + \frac{144643}{300}(x-7)^3 + \left(-\frac{3642451}{2100}\right)x + 0$$

$$Ely(x) = \frac{17857x^3}{300} - 250(x-2)^2 - \frac{125}{6}(x-4)^4 + \frac{125}{3}(x-7)^4 - \frac{25}{18}(x-4)^5 + \frac{25}{18}(x-7)^5 + \frac{144643}{300}(x-7)^3 - \frac{3642451x}{2100} \quad (158)$$

Para encontrar la deflexión en los puntos D y H se utiliza la Ecuación 158, dichas deflexiones pueden verse en la Figura 59.

Figura 59. Deflexiones en los puntos D y H



Fuente: elaboración propia.

Para encontrar la deflexión en el punto D se reemplaza en la Ecuación 158 la variable independiente por  $x = 3$  m.

$$Ely(x) = \frac{17857x^3}{300} - 250(x-2)^2 - \frac{125}{6}(x-4)^4 + \frac{125}{3}(x-7)^4 - \frac{25}{18}(x-4)^5 + \frac{25}{18}(x-7)^5 + \frac{144643}{300}(x-7)^3 - \frac{3642451x}{2100}$$

$$Ely_D = \frac{17857 \cdot 3^3}{300} - 250(3-2)^2 - \frac{125}{6}(3-4)^4 + \frac{125}{3}(3-7)^4 - \frac{25}{18}(3-4)^5 + \frac{25}{18}(3-7)^5 + \frac{144643}{300}(3-7)^3 - \frac{3642451 \cdot 3}{2100} \quad (159)$$

En la Ecuación 159 cuando las funciones de singularidad son negativas son nulas, no se tienen en cuenta y corresponden a los términos desde el tercer al séptimo término.

$$Ely_D = \frac{17857 * 3^3}{300} - 250(3 - 2)^2 - 0 + 0 - 0 + 0 + 0 - \frac{3642451 * 3}{2100}$$

$$Ely_D = \frac{482139}{300} - 250 - \frac{10927353}{2100}$$

$$y_D = -\frac{134623}{35EI}$$

El signo negativo de la deflexión del punto D indica que la deflexión está por debajo del eje negativo Y. Para encontrar la deflexión en el punto H se reemplaza en la Ecuación 158 la variable independiente por  $x = 8$  m.

$$Ely(x) = \frac{17857x^3}{300} - 250(x - 2)^2 - \frac{125}{6}(x - 4)^4 + \frac{125}{3}(x - 7)^4 - \frac{25}{18}(x - 4)^5$$

$$+ \frac{25}{18}(x - 7)^5 + \frac{144643}{300}(x - 7)^3 - \frac{3642451x}{2100}$$

$$Ely_H = \frac{17857 * 8^3}{300} - 250(8 - 2)^2 - \frac{125}{6}(8 - 4)^4 + \frac{125}{3}(8 - 7)^4 - \frac{25}{18}(8 - 4)^5$$

$$+ \frac{25}{18}(8 - 7)^5 + \frac{144643}{300}(8 - 7)^3 - \frac{3642451 * 8}{2100}$$

$$Ely_H = \frac{17857 * 8^3}{300} - 250(8 - 2)^2 - \frac{125}{6}(8 - 4)^4 + \frac{125}{3}(8 - 7)^4$$

$$- \frac{25}{18}(8 - 4)^5 + \frac{25}{18}(8 - 7)^5 + \frac{144643}{300}(8 - 7)^3 - \frac{3642451 * 8}{2100}$$

$$Ely_H = \frac{9142784}{300} - 9000 - \frac{16000}{3} + \frac{125}{3} - \frac{12800}{9} + \frac{25}{18} + \frac{144643}{300}$$

$$- \frac{29139608}{2100}$$

$$Ely_H = 1369.59$$

$$y_H = \frac{1369.59}{EI}$$

El signo positivo en la deflexión del punto H indica que la deflexión está por encima del eje positivo Y.



## EPÍLOGO



En el texto se hace un análisis de pendientes y deflexiones de vigas sometidas a cargas transversales donde se emplearon diferentes métodos. En la primera parte se usó un método matemático basado en el método de integración de la ecuación diferencial para obtener las pendientes y deflexiones en cualquier punto de la viga. Luego se utilizó el método de superposición, el cual consiste en determinar separadamente la pendiente y deflexión causadas por las diferentes cargas aplicadas a una viga y luego sumarlas. Estos métodos pueden usarse efectivamente con vigas estáticamente indeterminadas para calcular pendientes y deflexiones en su análisis y en las que el número de reacciones en los apoyos excede al número de ecuaciones de equilibrio disponibles.

Finalmente, se estudian las funciones de singularidad que reducen el procedimiento para la determinación de deflexiones de la curva elástica de la viga, ya que se requiere la evaluación de la ecuación del momento flector, la cual se representa por medio de una función analítica única para toda la viga y no requiere las ecuaciones del momento flector ni la determinación de las constantes de integración en cada tramo como sí se requería en el método de doble integración.



# GLOSARIO

**Articulación:** son estructuras que funcionan como un punto de unión con la viga y genera dos componentes de fuerza.

**Carga:** son las fuerzas que tienen que soportar los elementos.

**Condiciones de frontera:** se utilizan para encontrar deflexiones en vigas estáticamente determinadas donde se utiliza la ecuación de momentos flexionantes por medio de la resolución de ecuaciones diferenciales.

**Curva elástica:** es la deformación que experimenta la viga al aplicar una carga sobre ella.

**Deflexión:** es el grado en el que un elemento estructural se desplaza bajo la aplicación de una fuerza o carga.

**Equilibrio:** estado en el que el conjunto de acciones sobre un cuerpo no produce movimientos globales y en el que la resultante del sistema de fuerzas es nula.

**Funciones de singularidad:** estas funciones son apropiadas para representar cargas en vigas que permiten, por medio de integraciones sucesivas, determinar la fuerza cortante, el momento flector, la pendiente y la deflexión en vigas.

**Grado de libertad:** es el número de variables que se necesitan especificar para determinar completamente el número de reacciones en una viga.

**Método de doble integración:** es uno de los métodos que se basan en el análisis de deformaciones y consiste en integrar sucesivamente la ecuación diferencial de la curva elástica.

**Método de superposición:** establece que el efecto de un conjunto de cargas que actúa simultáneamente es el mismo cuando se suman los efectos de cada una de ellas actuando por separado.

**Pendiente:** es la inclinación de la curva elástica respecto al eje horizontal debido a la aplicación de cargas.

**Tramo:** en una viga continua es cada uno de los trozos entre dos apoyos o entre dos cargas consecutivas.

**Voladizo:** tramo de viga prolongado en continuidad de otro sin apoyo en el extremo.

**Viga:** es un elemento estructural diseñado para soportar cargas aplicadas a lo largo de esta.

## REFERENCIAS

- Beer, J., Jhonston, E. R. y Dewolf, J. T. (2004). *Mecánica de materiales*. Mc Graw Hill.
- Fitzgerald, R. W. (2010). *Mecánica de materiales*. Alfaomega.
- Gere, J. (1998). *Mecánica de materiales*. Tomson.
- Hibbeler, R. C. (1997). *Mecánica de materiales*. Pearson educacion.
- Hibbeler, R. C. (2010). *Mecánica para ingenieros Estatica*. Wiley.
- Meriam, J., y Kraige, L. (2002). *Engineering mechanics Statics*. Reverté.
- Mott, R. L. (1996). *Resistencia de materiales aplicada*. Pearson educacion.
- Popov, E. P. (2000). *Mecánica de sólidos*. Pearson educacion.
- Pytel, A., y Singer, F. L. (1994). *Resistencia de materiales*. Alfaomega.
- Timoshenko, S. (1997). *Resistencia de materiales*. Espasa Calpe.

# DEFLEXIÓN EN VIGAS

## PROBLEMAS RESUELTOS

En el libro se estudian los métodos para la determinación de deflexiones y pendientes en vigas incluyendo el análisis de vigas estáticamente indeterminadas y proporcionando a los estudiantes conceptos básicos tales como las condiciones de equilibrio y la evaluación de condiciones de frontera.

Inicia con el análisis del método de doble integración para encontrar la ecuación de la pendiente y la curva elástica, seguido del método de superposición para determinar por separado la pendiente y deflexión provocadas por la aplicación de diferentes cargas; por último, se estudian las funciones de singularidad que reducen el procedimiento para determinar pendientes y deflexiones.

Dirigido a los estudiantes de los programas de tecnología e ingeniería que requieren en su formación el estudio de la resistencia de materiales y para los docentes universitarios como material de apoyo para la preparación de sus clases.

## Incluye

- ▶ Problemas que describen situaciones reales, permitiendo que el estudiante
- ▶ parta de una descripción física y obtenga
- ▶ una representación simbólica.
- ▶ Desarrollo de capacidades de abstracción y habilidades de representación.
- ▶ Problemas agrupados en orden ascendente de dificultad, los cuales se solucionan de manera lógica.
- ▶ Temas de cálculo integral y ecuaciones diferenciales.

### Gustavo Guerrero Gómez

Magíster en Sistemas Energéticos Avanzado, especialista en Práctica Docente Universitaria e Ingeniero Mecánico. Ha desempeñado cargos como coordinador Plan de Estudios, jefe del Departamento de Ingeniería Mecánica y coordinador de Bienestar Universitario de la Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña. Investigador Junior del grupo de investigación GITYD.

### Nelson Afanador García

Doctor en Estructuras, magíster en Ingeniería Civil con énfasis en Estructuras, Ingeniero Civil y Licenciado en Matemáticas y Física. Desde 2003 a la fecha trabaja en la Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña, en el Departamento de Ingeniería Civil. Investigador Junior del grupo de investigación GITYD.

### Nelson Javier Cely Calixto

Ph. D. (c) en Ingeniería Sanitaria y Ambiental, magíster en Obras Hidráulicas, especialista en Agua y Saneamiento Ambiental e Ingeniero Civil. Docente de tiempo completo de la UFPS. Investigador Junior del grupo de investigación Hydros. Consultor con experiencia de más de 16 años en proyectos de ingeniería hidráulica y sanitaria.



Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Ocaña - Colombia  
Vigilada Mineducación



Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Vigilada Mineducación



HYDROS  
Grupo de Investigación en  
Hidrología y Recursos Hídricos

ISBN 978-958-503-562-1



e-ISBN 978-958-503-563-8