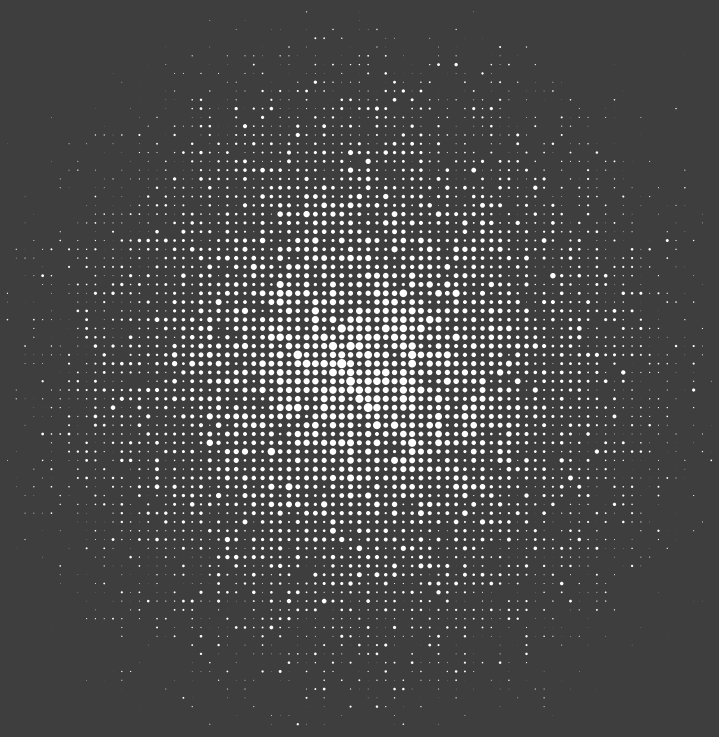
Mecánica vectorial para estudiantes de ingeniería

Dinámica

Sistemas discretos de partículas



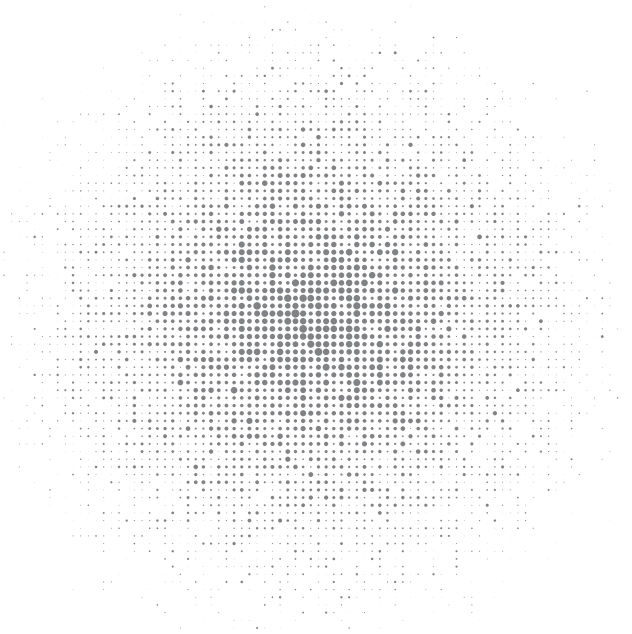
Universidad Francisco de Paula Santander
Ocaña - Colombia
Vigilada Mineducación

Juan Fernando Pérez Villegas
Eder Norberto Florez Solano
Edwin Edgardo Espinel Blanco

MECÁNICA VECTORIAL PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA. DINÁMICA.

SISTEMAS DISCRETOS DE PARTÍCULAS

Juan Fernando Pérez Villegas
Eder Norberto Florez Solano
Edwin Edgardo Espinel Blanco



Catalogación en la publicación - Biblioteca Nacional de Colombia

Pérez Villegas, Juan Fernando, autor

Mecánica vectorial para estudiantes de ingeniería : dinámica : sistemas discretos de partículas / Juan Fernando Pérez Villegas, Eder Norberto Florez Solano, Edwin Edgardo Espinel Blanco. -- Primera edición. -- Ocaña : Universidad Francisco de Paula Santander, 2025.

66 páginas.

ISBN 978-628-96731-2-8 (digital)

1. Newton, Isaac, 1642-1727 - Crítica e interpretación 2. Dinámica de fluidos - Fundamentos - Problemas, ejercicios, etc. 3. Mecánica de fluidos - Fundamentos - Problemas, ejercicios, etc. 4. Análisis vectorial - Problemas, ejercicios, etc. 5. Sistemas dinámicos diferenciales - Problemas, ejercicios, etc. 6. Mecánica analítica - Problemas, ejercicios, etc. I. Flórez Solano, Éder Norberto, autor II. Espinel Blanco, Edwin, autor

CDD: 532 ed. 23 CO-BoBN– a1145812

Primera edición:
Bogotá, marzo del 2025

e-ISBN: 978-628-96731-2-8

© Juan Fernando Pérez Villegas
© Eder Norberto Florez Solano
© Edwin Edgardo Espinel Blanco

© **Universidad Francisco de Paula Santander seccional Ocaña**
Vía Acolsure, Sede el Algodonal
Ocaña, Norte de Santander - Colombia
Teléfono: 5690088

Edición:
▹ **Campus Editorial SAS**
edicion@campuseditorial.com
www.campuseditorial.com
Carrera 51 # 103b-93
Bogotá, Colombia

Universidad Francisco de Paula Santander
Ocaña - Colombia
Vigilada Mineducación

Dirección editorial: Claudia Garay C.
Coordinación editorial: Paula Bermúdez Bello
Corrección de estilo: Tomás Collazos
Cubierta: Wilson Marulanda Muñoz
Diseño y diagramación: Wilson Marulanda Muñoz

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados

CONTENIDO

Prólogo xi

Introducción xiii

Sistemas de partículas. Sistemas discretos 1

1.1 Conceptos básicos 3

1.2 Aplicación de las leyes de Newton a un sistema de partículas 4

1.3 Trabajo y energía 8

1.4 Impulso y cantidad de movimiento 11

1.4.1 Cantidad de movimiento lineal 11

1.4.2 Cantidad de movimiento angular 13

1.4.3 Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas..... 14

1.5 Problemas propuestos..... 35

Glosario 55

Referencias 61

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Aplicación de la segunda ley de Newton a un sistema de partículas	5
Figura 1.2	Partícula m_i	8
Figura 1.3	Cantidad de movimiento angular de mi alrededor del punto O	12
Figura 1.4	Diagramas del principio de impulso y C.M.L. para el sistema del ejemplo 1/4d	23
Figura 1.5	Velocidades relativas de discos A y B	24
Figura 1.6	Vectores de posición de discos A y B	26
Figura 1.7a	Vectores de posición de discos A y B instante 1	29
Figura 1.7b	Vectores de posición de discos A y B instante 2	29

Figura P1. 1 35

Figura P1. 3 36

Figura P1. 5 37

Figura P1. 7 38

Figura P1. 9 39

Figura P1. 10 40

Figura P1.13 42

Figura P1. 16 44

Figura P1. 18 45

Figura P1. 19 45

Figura P1. 20 47

Figura P1. 22 48

Figura P1. 23 48

Figura P1. 25 49

Figura P1. 27 51

Figura P1. 29 52

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Velocidad de los vagones durante las colisiones 18

Tabla 2 Conversión de unidades 22

PRÓLOGO

Este contenido está dirigido a estudiantes de ingeniería, especialmente a aquellos interesados en la asignatura Dinámica. Su propósito es fortalecer los conocimientos adquiridos en las clases. Algunas secciones del texto pueden estar en otro idioma, por lo que se recomienda al estudiante realizar la respectiva traducción.

En muchos casos, el tiempo dentro del aula es muy corto para que el estudiante tenga una mayor comprensión sobre la información presentada en cada clase, demandando de él alguna herramienta útil que sirva de apoyo en su aprendizaje. Por tal razón, se le ofrece al estudiante la posibilidad de aclarar inquietudes y ampliar sus conocimientos sobre la asignatura a través de un documento que aborda los temas relacionados con Dinámica.

En este documento se exponen conceptos de sistemas de partículas con los que el estudiante podrá evidenciar los diferentes principios físicos, tales como la ley de movimiento, la cantidad de movimiento lineal y angular, el principio de trabajo y energía, entre otros, aplicados a un sistema de partículas.

INTRODUCCIÓN

Este capítulo se centra en el estudio de los sistemas de partículas, comenzando con los conceptos básicos que sirven como cimientos para todo lo demás. Comprender la aplicación de las leyes de Newton a un sistema de partículas es una herramienta fundamental para entender la interacción de múltiples cuerpos bajo la acción de diversas fuerzas.

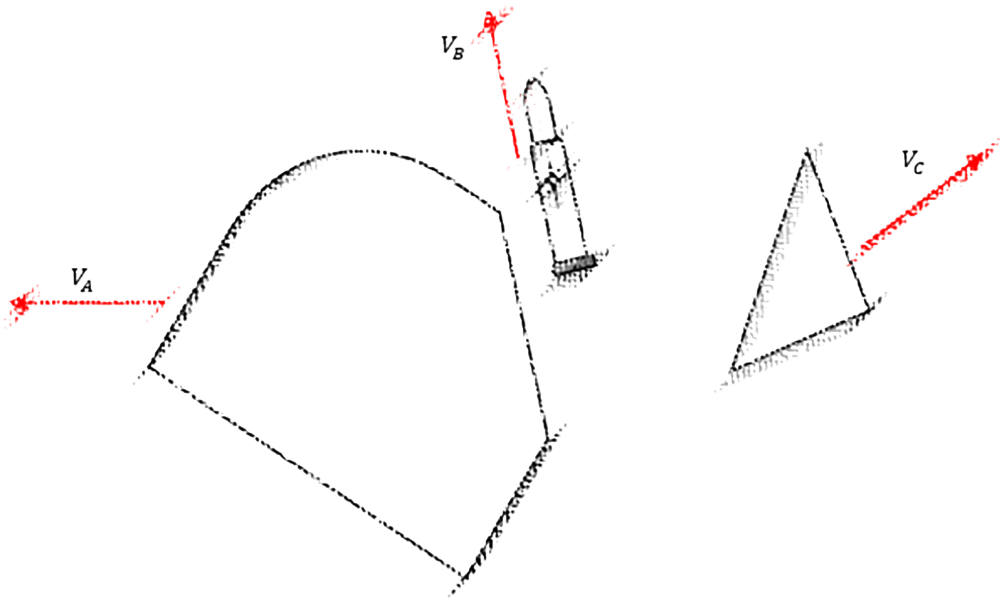
Posteriormente, se abordarán los conceptos de trabajo y energía, los cuales permiten analizar sistemas complejos de manera más intuitiva y eficiente. Seguidamente, se explorarán el impulso y la cantidad de movimiento, tanto lineal como angular, proporcionando una visión integral de cómo se mueve y rota un sistema de partículas bajo el efecto de fuerzas externas respecto a un sistema de referencia.

Se dedicará una sección específica al movimiento del centro de masa, un concepto clave que simplifica el análisis de sistemas al considerar su movimiento como si toda su masa estuviera concentrada en un punto. Finalmente, se presentará una serie de problemas propuestos que facilitarán

la práctica de los principios aprendidos y ayudarán a preparar a los estudiantes para evaluaciones como el examen Saber Pro.

Este capítulo está diseñado para fortalecer la comprensión y habilidades en Dinámica, asegurando la posibilidad de abordar los desafíos tanto académicos como profesionales con confianza. A medida que avancemos, se compartirán ejemplos prácticos y ejercicios que harán que estos conceptos complejos sean más accesibles y relevantes para los estudios en ingeniería.

SISTEMAS DE PARTÍCULAS. SISTEMAS DISCRETOS



1.1 Conceptos básicos

Así como se puede analizar el movimiento de masas puntuales e identificar su comportamiento, del mismo modo se puede estudiar la dinámica de un conjunto de masas o de un sistema material cualquiera. El análisis de estos sistemas conduce a las ecuaciones de traslación y rotación que describen el movimiento de los cuerpos tanto rígidos como deformables. Un transbordador espacial, con sus cohetes auxiliares y el combustible empleado, constituye un buen ejemplo de sistema no rígido con pérdida de masa.

Estudiaremos el movimiento de un gran número de partículas, considerándolas como un conjunto. En primera instancia, se analizan sistemas consistentes en partículas bien definidas y luego

Consulta

¿Fuerza efectiva de una partícula? ¿Qué es?

¿Qué es un sistema equipolente?

se considera el movimiento de sistemas de masas variables.

Las fuerzas externas que actúan sobre diversas partículas forman un sistema equipolente al sistema de las fuerzas efectivas, es decir, ambos sistemas tienen la misma resultante y el mismo momento resultante alrededor de cualquier punto dado. La resultante y el momento resultante de las fuerzas externas son iguales, respectivamente, a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal total y a la cantidad de movimiento angular total de las partículas del sistema (Beer *et al.*, 2016).

1.2 Aplicación de las leyes de Newton a un sistema de partículas

¿Sistema discreto?

¿Sistema continuo?

Si podemos escribir la segunda ley de Newton para cada partícula individual del sistema, se logra describir las ecuaciones de movimiento de un sistema de n partículas; estos sistemas se pueden clasificar en Sistemas Discretos o Sistemas Continuos.

En la Figura 1.1, se aprecia la fuerza ejercida sobre P_i por otra partícula P_j de un sistema de partículas, la cual se denomina *fuerza interna* y se denota por F_{ij}; por otro lado, la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre P_i se denomina F_j.

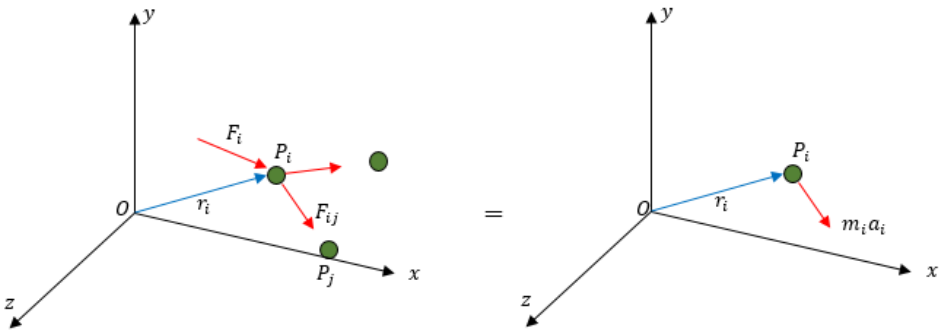


Figura 1.1 Aplicación de la segunda ley de Newton a un sistema de partículas

La segunda ley de Newton para este sistema de partículas se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} = m_i \ddot{\vec{r}}_i \qquad \textbf{(E1.2-1)}$$

Donde F_i es la suma vectorial de todas las fuerzas ejercidas por los agentes externos al sistema. Por otro lado, ΣF_{ij} es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas debidas a las acciones internas y a las reacciones entre los puntos materiales. En todo momento ΣF_{ij} es nula, pues las fuerzas internas son siempre opuestas y de igual magnitud (acción-reacción) (Beer *et al.*, 2024).

m_i es la masa de cada una de las partículas contenidas en el sistema y $\ddot{r}_i$ es la aceleración del centro de masa del sistema de partículas.

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

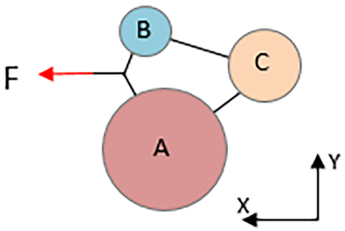
Fuerzas externas | Fuerzas internas | Fuerzas inerciales

La ecuación E1.2-1 es la generalización de la segunda ley de Newton aplicada a un sistema de partículas (*ecuación del movimiento de m*)

y puede expresarse en forma de componentes rectangulares de la forma:

(E1.2-2) $$\sum F_x = m\ddot{r}_x \qquad \sum F_y = m\ddot{r}_y \qquad \sum F_Z = m\ddot{r}_Z$$

Ejemplo 1/2a (pequeñas esferas conectadas bajo la acción de una fuerza)



Las tres esferitas A, B y C, de masas 600 g, 220 g y 475 g, respectivamente, están conectadas por cuerdas y descansan sobre una superficie horizontal lisa. Si a una de las cuerdas se aplica una fuerza de F = 5.7 N, determinar la aceleración del centro de masa de las esferas en el instante considerado.

Solución. Se requiere la aceleración en dicho instante y, para eso, buscamos una expresión que relacione la aceleración y las masas de las partículas, esto es, la ecuación E1.2-1.

Entonces,

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

En donde el segundo término de la expresión se anula y resulta:

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

Luego, se sustituye la información suministrada y queda:

$$5.7\,\hat{\imath}\ [\mathrm{N}] = (0.6 + 0.22 + 0.475)\ \ddot{\vec{r}}_i$$

De lo cual resulta que la aceleración del centro de masas de las esferas es:

$$\vec{r}\,'' = \mathbf{4.4015}\ \hat{\imath}\ \mathbf{[m/s^2]}$$

Ejemplo 1/2b (retomando el ejemplo 1/2a)

Al analizar el sistema de partículas y teniendo en cuenta los principios físicos, se deduce que:

A. El segundo término de la ecuación es idénticamente nulo siempre.

B. El centro de masa lo determina la proporción de la magnitud de la fuerza externa.

C. Las fuerzas externas siempre deben pasar por el centro de masa del sistema.

D. Al aumentar la fuerza externa provoca un cambio en la ubicación del centro de masa.

Pista (A)

Resulta que el término $\vec{F}_i$ se convierte en la suma (vectorial) de todas las fuerzas que los agentes externos al sistema ejercen sobre todos los puntos materiales del sistema aislado, mientras que $\vec{F}_{ij}$ se convierte en la suma (vectorial) de todas las fuerzas que actúan sobre todos los puntos materiales debidas a las acciones internas y a las reacciones entre los puntos materiales, y se dice que las fuerzas interiores aparecen dos a dos opuestas, pues son acción y reacción.

1.3 Trabajo y energía

En el sistema de la Figura 1.2, la relación entre trabajo y energía para el punto material de masa m_i es $(U_{1\to2})_i = \Delta T_i$ donde $(U_{1\to2})_i$ es el trabajo efectuado sobre por todas las fuerzas externas e internas aplicadas al sistema. La energía cinética de m_i es $T_i = \frac{1}{2} \Sigma\, m_i v_i^2$ donde v_i es el módulo de la velocidad $\vec{v}_i = \vec{r}_i$.

Para todo el sistema, la suma de las ecuaciones correspondientes al teorema de las fuerzas vivas aplica a cada uno de sus puntos y puede representarse mediante la ecuación E1.3-1.

(E1.3-1) $$U_{1-2}\,\Delta T;\; T_1 + U_{1-2} = T_2$$

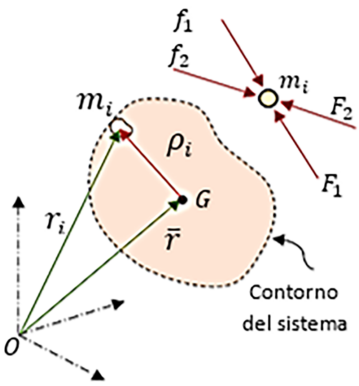


Figura 1.2
Partícula m_i

Donde U_{1-2} es el trabajo realizado desde la posición 1 hasta la posición 2 por todas las fuerzas sobre todos los puntos materiales y ΔT es la variación de la energía cinética total.

Además, si el sistema material no pierde energía debido a fuerzas de rozamiento interno que realizan un trabajo negativo o debido a elementos no elásticos que disipan energía al recorrer ciclos, se dice que el sistema es *conservativo* (Meriam y Kraige, 2015).

Si durante un intervalo del movimiento no hay fuerzas exteriores (gravitatorias u otras que deriven de un potencial) que realicen trabajo sobre un sistema conservativo, no se pierde energía del sistema, entonces la ecuación E1.3-1 se puede expresar como:

(E1.3-2) $$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0$$

También puede escribirse la ecuación E1.3-2 como se muestra a continuación:

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1} = T_2 + V_{g2} + V_{e2} \qquad \textbf{(E1.3-3)}$$

Donde T_1 es la energía cinética. La energía potencial gravitacional asociada con las fuerzas internas y externas que actúan sobre las partículas del sistema se denota por V_g y el término V_e se refiere a la energía potencial elástica. Los subíndices 1 y 2 se relacionan con las posiciones de interés en el análisis.

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2$$

Energía cinética

La ecuación E1.3-3 enuncia el principio de *Conservación de la energía* para un sistema de partículas.

Analizando la expresión $T= \frac{1}{2} \Sigma\, m_i v_i^2$ y según las ecuaciones de movimiento relativo, la velocidad de cualquiera de los puntos del sistema puede escribirse como: $\vec{v}_i = \overline{v} + \dot{\rho}_i$, siendo $\overline{v}$ la velocidad del centro de masa G y $\dot{\rho}_i$ la velocidad de respecto a un sistema de referencia que se mueva con el centro de masa G (Hibbeler, R. C., 2016).

Partiendo desde el punto que $v_i^2 = v_i \cdot v_i$, podemos decir que:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2$$

$$T = \frac{1}{2} \Sigma\, m_i (v_i \cdot v_i) = \frac{1}{2} \Sigma m_i (\overline{v} + \dot{\rho}_i) \cdot (\overline{v} + \dot{\rho}_i)$$

$$T = \frac{1}{2} \Sigma\, m_i \overline{v}_i^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i |\dot{\rho}_i|^2 + \Sigma m_i \overline{v} \cdot \dot{\rho}_i$$

Sabemos que $\dot{\rho}_i$ se mide desde el centro de masa, es $\Sigma m_i \rho_i = 0$ y el tercer término es $\bar{v} \cdot \Sigma m_i \dot{\rho}_i$, entonces,

$$\bar{v} \cdot \Sigma m_i \dot{\rho}_i = \bar{v} \cdot \frac{d}{dt} \Sigma (m_i \rho_i) = 0$$

Además,

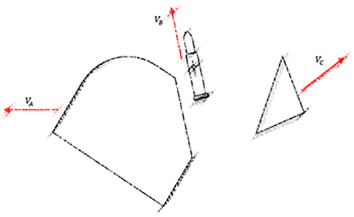
$$\frac{1}{2} \Sigma m_i \bar{v}_i^2 = \frac{1}{2} \bar{v}_i^2 \Sigma m_i = \frac{1}{2} m \bar{v}_i^2$$

Por lo tanto, la energía cinética total se expresa como:

(E1.3-4)

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}_i^2 + \Sigma \frac{1}{2} m_i |\dot{\rho}_i|^2$$

La ecuación E1.3-4 expresa que la energía cinética total de un sistema de masas es igual a la energía de traslación del centro de masa del sistema en conjunto más la energía debida al movimiento de todos los puntos respecto al centro de masa.



La energía cinética también puede expresarse en términos de la cantidad de movimiento, teniendo en cuenta que, para una masa constante, la energía cinética es proporcional al cuadrado de la cantidad de movimiento.

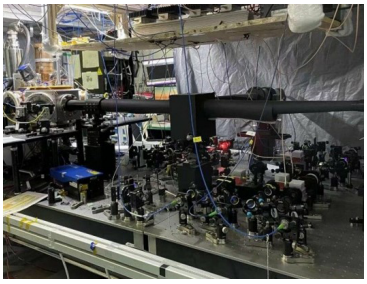
$$T = \frac{L^2}{2m}$$

Estudio de caso: "Motor de energía oculta"

El motor desarrollado por investigadores de la Universidad de Kaiserslautern-Landau, en colaboración con la Universidad de Stuttgart y el Instituto Japonés de Ciencia y Tecnología de Okinawa, utiliza una «energía oculta» no convencional. Su innovación radica en replicar el movimiento de un pistón, similar al de un motor

de combustión interna, pero transformando una fuente de energía distinta a las tradicionales como los combustibles fósiles o la electricidad.

Este motor sigue los principios fundamentales de la conservación de la energía y la cantidad de movimiento. Aunque utiliza fuentes como la energía térmica cuántica o potencial de partículas subatómicas, convierte esta energía en movimiento mecánico de manera similar a los motores convencionales, donde la energía química se transforma en térmica y luego en cinética.



Fuente: Zhou, F. *et al*. (2024).

El principio de conservación de la cantidad de movimiento también se aplica: el impulso generado por la energía oculta mueve el pistón y su cantidad de movimiento se transfiere al eje del motor, al igual que en motores tradicionales. Así, la energía se conserva y se convierte en movimiento útil sin importar la fuente de energía.

Este avance demuestra que, aunque las fuentes de energía sean distintas, los principios físicos de conservación de la energía y la cantidad de movimiento siguen siendo universales en todos los sistemas mecánicos (Cadena SER, 2025).

1.4 Impulso y cantidad de movimiento

1.4.1 Cantidad de movimiento lineal

La cantidad de movimiento de un punto material cualquiera del sistema descrito en la Figura 1.2 es $\vec{L}_i = m_i \vec{v}_i$, siendo $\vec{v}_i$ $\vec{r}_i$ la velocidad de m_i.

$$\vec{L} = \Sigma m_i \vec{v}_i$$

La cantidad de movimiento del sistema se define como la suma vectorial de las cantidades de movimiento de todos los puntos materiales del mismo, es decir, $\vec{L} = \Sigma m_i \vec{v}_i$.

Al sustituir velocidad relativa $v_i = \overline{v} + \dot{\rho}_i$ y sabiendo que $\Sigma(m_i \rho_i) = m\overline{\rho} = 0$, se tiene que:

$$\vec{L} = \Sigma m_i (\overline{v} + \dot{\rho}_i) = \Sigma m_i \overline{v} + \frac{d}{dt} \Sigma m_i \dot{\rho}_i$$

Al sustituir el valor de $m\overline{\rho} = 0$, resulta que:

(E1.4-1)
$$\vec{L} = m\overline{v}$$

Entonces, la cantidad de movimiento de todo el sistema material de masa constante se considera como el producto de la masa por la velocidad de su centro de masa. La derivada de L con respecto al tiempo es $m\dot{v}$ y $m\bar{a}$ la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es igual al vector $m\bar{a}$. Entonces:

(E1.4-2)
$$\Sigma F = \dot{L}$$

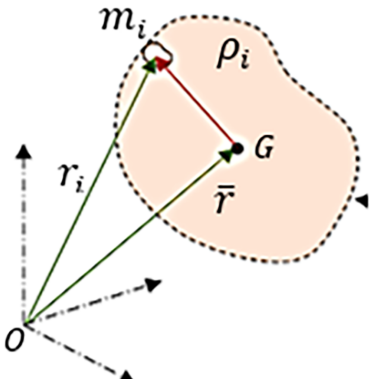


Figura 1.3 Cantidad de movimiento angular de m_i alrededor del punto O

La ecuación E1.4-2 no es válida para sistemas cuya masa varíe con el tiempo, pues en dicha ecuación la masa total del sistema se mantiene constante durante la diferenciación respecto al tiempo (Pytel y Kiusalaas, 2010).

Si para un cierto intervalo de tiempo la resultante de las fuerzas externas que se ejercen sobre un sistema material, conservativo o no, es idénticamente igual a cero, la ecuación E1.4-2 exige que $\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow (\vec{L}) = 0$. Por lo tanto, durante ese intervalo se tiene que:

(E1.4-3)
$$\overrightarrow{L_1} = \overrightarrow{L_2}$$

La ecuación E1.4-3 se conoce como la "*conservación del movimiento lineal*".

1.4.2 Cantidad de movimiento angular

El momento cinético respecto a un punto fijo en el sistema de referencia newtoniano del sistema de masas involucrado es la suma vectorial de los momentos respecto a dicho punto de las cantidades de movimiento lineal de todos los puntos materiales que componen el sistema. Si el punto fijo es O, la cantidad de movimiento angular se expresa como:

$$\overrightarrow{H_O}=\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i) \qquad \textbf{(E1.4-4)}$$

Donde H_O es la cantidad de movimiento angular respecto al punto fijo O, r_i es el vector de posición de cada partícula respecto al punto O y $m_i\vec{v}_i$ es la cantidad de movimiento lineal de cada partícula del sistema (Meriam y Kraige, 2015).

En términos generales, el momento resultante alrededor del punto fijo O de las fuerzas externas es igual a las razones de cambio de la cantidad de movimiento angular alrededor de O del sistema de partículas, y puede expresarse como:

$$\Sigma\overrightarrow{M_O}=(\overrightarrow{\dot{H}_O}) \qquad \textbf{(E1.4-5)}$$

De la misma manera que la cantidad de movimiento lineal se conserva si no existen fuerzas externas que alteren al sistema de partículas, es decir, $\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow (\overrightarrow{H_o}) = 0$, la cantidad de movimiento angular se conserva, esto es:

$$(\overrightarrow{H_O})_1 = (\overrightarrow{H_O})_2 \qquad \textbf{(E1.4-6)}$$

La ecuación E1.4-6 se conoce como la "*conservación del movimiento angular*".

1.4.3 Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas

La ecuación E1.4-5 se puede expresar en una forma alternativa si se considera el *centro de masa* del sistema de partículas. El centro de masa del sistema es el punto G definido por el vector de posición $\bar{r}$, el cual satisface la relación:

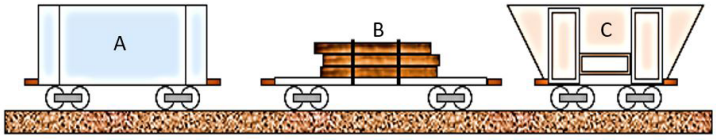
(E1.4-7)
$$m\bar{r} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i$$

Donde m es la masa total del sistema de partículas, $\bar{r}$ es el vector de posición del centro de masa del sistema, m_i y r_i son, respectivamente, la masa y el vector de posición de cada partícula del sistema.

Ejemplo 1/4a (colisión entre vagones)

Los tres vagones de carga ruedan por una vía horizontal con las velocidades indicadas. Después de chocar, quedan enganchados y se mueven con una velocidad común. Los vagones A, B y C con sus cargas tienen masas respectivas de 58, 40 y 72 Mg. Hallar el porcentaje de energía perdida en el proceso de enganche.

Vagón	Velocidad	Sentido
A	1.8 km/h	Derecha
B	23.6 cm/s	Izquierda
C	1.2 km/h	Izquierda



Solución. En primer lugar, lo que se requiere es el porcentaje de energía perdida, por lo que necesitamos conocer los valores de la energía inicial y final (antes y después del choque).

Sabemos que existe la energía cinética (T), energía potencial gravitacional y elástica (V), de las cuales se entiende que las energías potenciales no presentan cambio alguno, entonces la pérdida se presenta en la energía cinética.

El porcentaje de energía perdida puede deducirse como:

$$\% \text{ Pérdida} = \frac{|\Delta T|}{T_1} = \frac{|T_2 - T_1|}{T_1}$$

La energía cinética se expresa como $T=\frac{1}{2}\Sigma mv^2$, luego en el instante inicial la energía cinética es:

$$T_1 = \frac{1}{2}\left[m_A(v_{A1})^2 + m_B(v_{B1})^2 + m_C(v_{C1})^2\right]$$

Sustituyendo la información dada:

$$T_1=\frac{1}{2}\left[(58x10^3kg)(0.5m/s)^2+(40x10^3kg)(0.236m/s)^2+(72x10^3kg)(0.3333m/s)^2\right]$$

$$\mathbf{T_1 = 12363.12\ [J]}$$

Para encontrar la energía cinética debemos conocer las velocidades después de los acoplamientos. Por lo que,

$$T_2 = \frac{1}{2}\left[m_A(v_{A2})^2+m_B\,(v_{B2})^2+m_C\,(v_{C2})^2\right]$$

Donde las velocidades v_{A2},v_{B2} y v_{C2} son idénticas, porque inmediatamente después del choque los vagones quedan acoplados. Entonces:

$$T_2 = \frac{1}{2}(v)^2\left[m_A + m_B + m_C\right]$$

Pero no conocemos la magnitud de la velocidad con la que se mueven los vagones después del choque. Por lo tanto, debemos usar alguna expresión que relacione dichas velocidades.

Si retomamos la consideración planteada en la ecuación E1.4-2 en la que, de no existir fuerzas externas en el sistema, entonces $\Sigma F=\dot{L}=0$. Luego se analiza un instante antes y otro después del impacto de los vagones y queda:

$$m_A\overrightarrow{v_{A1}}+m_B\overrightarrow{v_{B1}}+m_C\overrightarrow{v_{C1}}=m_A\overrightarrow{v_{A2}}+m_B\overrightarrow{v_{B2}}+m_C\overrightarrow{v_{C2}}$$

Al recordar que $v_{A2}=v_{B2}=v_{C2}=v$, la relación anterior queda:

$$m_A\overrightarrow{v_{A1}}+m_B\overrightarrow{v_{B1}}+m_C\overrightarrow{v_{C1}}=(m_A+m_B+m_C)\,\vec{v}$$

Sustituyendo la información suministrada, se tiene:

$$(58x10^3)(0.5\hat{\imath})+(40x10^3)(-0.236\hat{\imath})+(72x10^3)(-0.3333\hat{\imath})=(58x10^3+40x10^3+72x10^3)(\vec{v})$$

Nota: Las unidades de masa y velocidad están expresadas en kilogramos y m/s respectivamente.

Además, se asume el eje positivo horizontal "x" hacia la derecha.

Dicho esto, la velocidad de los vagones luego del impacto es:

$$(\vec{v}) = -0.0261\,\hat{\imath}\ [\text{m/s}]$$

Al conocer la velocidad con la cual se mueven los vagones después del choque, se puede determinar la energía cinética en ese instante, es decir:

$$T_2 = \frac{1}{2}(v)^2\,[m_A + m_B + m_C]$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(0.0261)^2\,[58x10^3 + 40x10^3 + 72x10^3] \rightarrow T_2 = 57.9029[J]$$

Entonces, el porcentaje de pérdida de energía cinética resulta ser:

$$\%\text{Pérdida}\ \frac{|\Delta T|}{T_1} \times (100) = \frac{|T_2 - T_1|}{T_1} \times (100) = \frac{|57.9029J - 12363.12|}{12363.12J} \times (100)$$

Energía perdida = 99.5317 %

Al ocurrir la colisión entre los vagones A, B y C y quedar unidos luego del choque, el sistema pierde aproximadamente el 99 % de la energía inicial.

Ejemplo 1/4b (colisión entre vagones)

Se ha visto que, en el problema 1/4a, el vagón A golpea al vagón B antes de que ocurra la colisión entre los vagones B y C. Luego de colisionarse las tres partículas se registran las velocidades (en m/s) después de cada colisión y se muestran en la Tabla 1. El coeficiente de restitución es (e=0.7).

Tabla 1
Velocidad de los vagones durante las colisiones

Vagón	Masa (Mg)	Velocidades				
		Inicio	Colisión 1	Colisión 2	Colisión 3	Colisión 4
A	58	+ 0.5000	- 0.0107	- 0.0107	- 0.2886	- 0.2886
B	40	- 0.2360	+ 0.5045	- 0.4112	- 0.0083	- 0.0083
C	72	- 0.3333	- 0.3333	+ 0.1754	+ 0.1754	+ 0.1754

Nota: El signo (+) indica que el vagón se mueve hacia la derecha y el signo (-) indica que el vagón se mueve hacia la izquierda.

A partir de la información de la Tabla 1, un ingeniero dice que, después de la colisión 2, los vagones A y B pueden alcanzar la misma velocidad. Que suceda lo que afirma el ingeniero es:

A. Imposible, pues la diferencia entre las velocidades de los vagones A y B es menor a 0.5 m/s.

B. Poco probable, pues en la colisión 3 el vagón B tiene una diferencia en la velocidad del vagón A inferior a 0.3 m/s.

C. Incierto, porque los datos presentados predicen el comportamiento de los vagones solo hasta la colisión 4.

D. Seguro, pues la magnitud de la velocidad de A y B se iguala entre las colisiones 2 y 3.

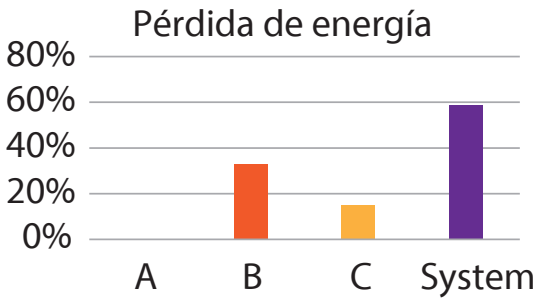
Pista (D)

Para que exista un cambio en la orientación (sentido) del movimiento de los vagones, sus velocidades deben pasar por cero. Del mismo modo, para que exista una colisión entre dos vagones, los sentidos deben ser opuestos o, si resulta que las velocidades presentan los mismos sentidos, en algún momento deben adquirir la misma velocidad.

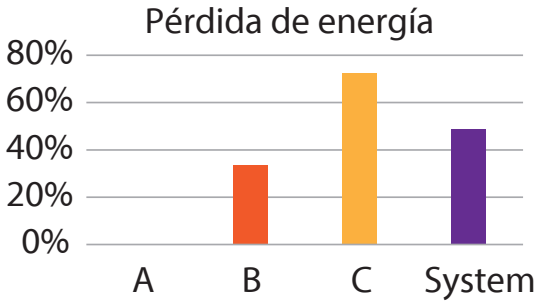
Ejemplo 1/4c (colisión entre vagones)

Teniendo en cuenta la Tabla 1 del Ejemplo 1/4b, la figura que mejor representa la pérdida de energía cinética entre las colisiones 1 y 2 para cada vagón y para el sistema completo es:

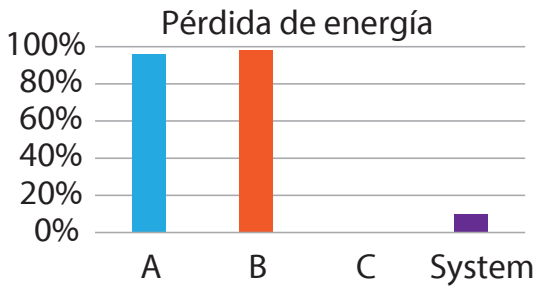
A.



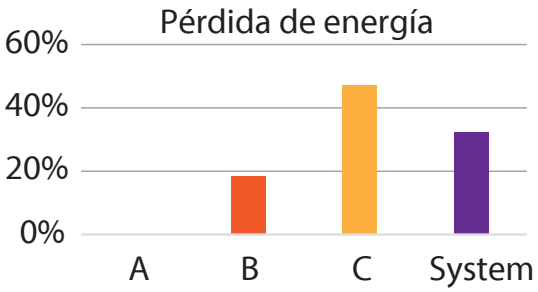
B.



C.



D.



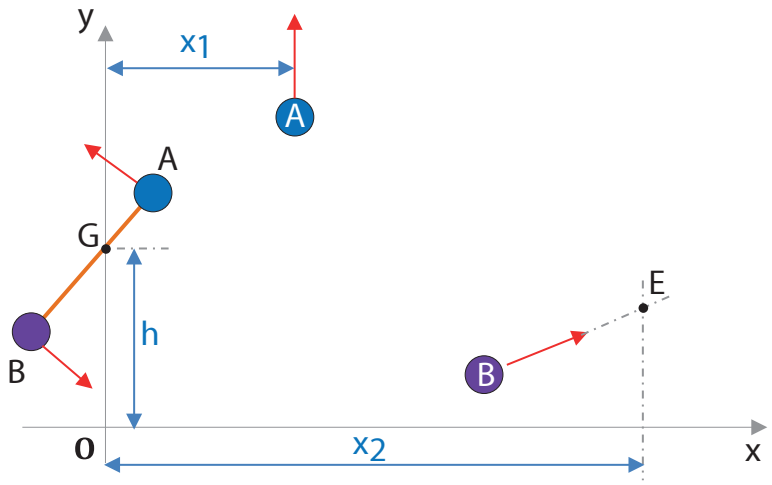
Pista (B)

En primera instancia se puede descartar la figura C, pues el vagón A no presenta pérdida en su energía cinética entre las colisiones 1 y 2. También se puede descartar la opción A porque el vagón B no presenta más pérdida en la energía que el vagón C.

Dicho esto, quedan las opciones B y D. Observando los datos de la Tabla 1, se puede notar que el vagón C pierde más de la mitad de su energía, por lo que la opción D no representa más del 50 % de energía perdida del vagón C.

Ejemplo 1/4d (momento angular de dos discos)

Los discos A y B, de 8 mm de diámetro, se pueden deslizar sobre una superficie horizontal sin fricción, están conectados mediante una cuerda de 30 pulgadas de largo y giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de su centro de masa G, a razón de 9.4248 rad/s.



En t = 0, las coordenadas de G son (x_0, h) y su velocidad es v_0. Poco tiempo después se rompe la cuerda; se observa que el disco A se mueve a lo largo de una trayectoria paralela al eje vertical y que el disco B lo hace por una trayectoria que cruza por el punto E a una distancia x_2 desde el punto O.

Si se cuenta con la siguiente información,

m_A=2.5kg m_B=1.7kg x_2=280in h=80in $\vec{v}_0=4\hat{i}+3\hat{j}$ [ft/s]

Determine:

1. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de A y B después de que se rompe la cuerda?

2. ¿Qué valor toma la distancia para satisfacer los valores hallados en la pregunta 1?

Solución. Antes de iniciar la resolución del problema, se presenta la Tabla 2, en donde se plasman las conversiones de unidades necesarias.

Tabla 2
Conversión de unidades

Sistema	x_2	h	m_A	m_B	v	ω
S.I.			2.5 kg	1.7 kg		
S. Inglés	280 in	80 in			$4\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$[ft/s]	

Nota: si desea resolver el problema ordenadamente, usted debe completar la tabla 2 llenando los espacios en blanco.

1. Para determinar la magnitud de la velocidad de A y B después de romperse la cuerda, se puede emplear el principio de impulso y cantidad de movimiento lineal. Teniendo en cuenta que no existen fuerzas externas, es decir $\Sigma F=\dot{L}=0$, entonces la conservación del momento lineal para el sistema en las posiciones de interés puede representarse como se muestra en la figura 1.4.

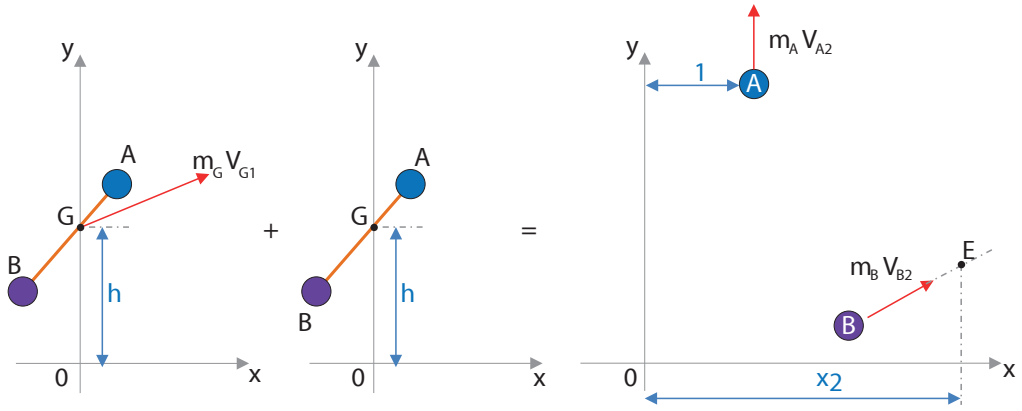


Figura 1.4
Diagramas del principio de impulso y C.M.L. para el sistema del ejemplo 1/4d

Si se plantea $\dot{L} = 0$ como $m_G\vec{V}_{G1}=m_A\vec{V}_{A2}+m_B\vec{V}_{B2}$, entonces resulta que:

$$(2.5+1.7)(1.2192\hat{\imath}+0.9144\hat{\jmath}) =(2.5)(V_{A2}\hat{\jmath})+(1.7)[(V_{B2})_x\hat{\imath}+(V_{B2})_y\hat{\jmath}]$$

"Nota: las unidades de masa y la velocidad están expresadas en kg y m/s, respectivamente."

Al realizar la igualación de los componentes horizontales y verticales de la relación anterior, se tiene:

$$\hat{\imath} = \hat{\imath} \rightarrow 5.1206 = 1.7(V_{B2})_x \qquad (1)$$

$$\hat{\jmath} = \hat{\jmath} \rightarrow 3.8405=2.5V_{A2}+1.7(V_{B2})_y \qquad (2)$$

De lo anterior se puede deducir que $(V_{B2})_x$=3.0121 m/s.

Al utilizar la ecuación (2), se cuenta con una (1) ecuación y dos (2) incógnitas, lo que conlleva a emplear otro principio que relacione las incógnitas presentes en la ecuación mencionada.

Como no existen fuerzas externas en el sistema y la superficie donde se desplazan los discos no presenta fricción, se puede emplear el principio de conservación de la energía. Esto es:

$$T_1+V_{g1}+V_{e1}=T_2+V_{g2}+V_{e2}$$

Si las partículas se desplazan en una superficie horizontal, no existe un cambio en su elevación, por lo que la energía potencial gravitacional es nula, $V_{g1} = V_{g2} = 0$.

Del mismo modo, al no existir resortes o elementos elásticos en el sistema, la energía potencial elástica es igual a cero, $V_{e1}=V_{e2}= 0$. Entonces se tiene que, $T_1=T_2$.

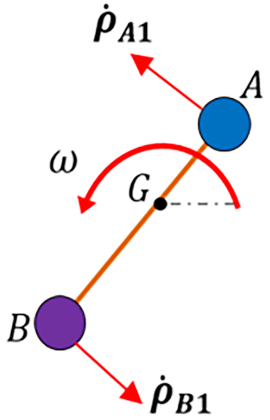


Figura 1.5
Velocidades relativas de discos A y B

Donde $T_1=T_2$ y son la energía cinética del sistema antes y después de romperse la cuerda, respectivamente T_1 se obtiene de la siguiente forma,

$$T_1 = \tfrac{1}{2}\, m(\bar{v}_1)^2 + \Sigma\tfrac{1}{2}\, m_i|\dot{\rho}_i|^2$$

De lo cual resulta:

$$T_1= \tfrac{1}{2}\, m_G V_G^{\,2} + \tfrac{1}{2}\, m_A(\dot{\rho}_{A1})^2+ \tfrac{1}{2}\, m_B(\dot{\rho}_{B1})^2$$

En la figura 1.5 se muestran las velocidades relativas de A y B respecto a G ($\dot{\rho}_{A1}$ y $\dot{\rho}_{B1}$), las cuales deben relacionarse con la velocidad angular a la que giran los discos respecto a G.

Se sabe que los discos giran a ω = 9.4248 rad/s. Además, se tiene que V = ωr, donde *V* es la velocidad relativa (tangencial), *r* es la velocidad angular y es la distancia desde el punto *G* hasta el punto a analizar.

Dicho esto y antes de proceder a determinar las velocidades relativas de los discos, se debe conocer la distancia desde el centro de gravedad G y el centro de cada disco.

Por lo tanto, se procede a emplear el principio del movimiento del centro de masa, el cual relaciona las posiciones mencionadas anteriormente. Entonces, retomando la ecuación E1.4-7, se tiene:

$$m_G\overrightarrow{r_{G/O}} = m_A\overrightarrow{r_{A/O}} + m_B\overrightarrow{r_{B/O}}$$

Sabemos que la coordenada del punto G es {0, h} = {0, 80in} = {0, 2.032m}, por lo que $\overrightarrow{r_{G/O}} = 2.032\,\hat{\jmath}$ [m].

El valor de $\overrightarrow{r_{A/O}}$ y $\overrightarrow{r_{B/O}}$ se establece tomando como referencia lo mostrado en la Figura 1.6.

$$\overrightarrow{r_{A/O}} = r_{Ax}\hat{\imath} + [r_{Ay}+h]\hat{\jmath}$$

Se puede decir que:

$$\overrightarrow{r_{Ax}} = r_A \cos\theta;\ r_{Ay} = r_A \operatorname{Sen}\theta$$

Entonces:

$$\overrightarrow{r_{A/O}} = r_A \cos\theta\hat{\imath} + [r_A \operatorname{Sen}\theta + h]\hat{\jmath}$$

De acuerdo con la Figura 1.6, el vector de posición de la partícula B respecto al punto O es igual a:

$$\overrightarrow{r_{B/O}} = -r_{Bx}\hat{\imath} + [d]\hat{\jmath}$$

También se puede decir que:

$$r_{Bx} = r_B\, Cos\theta;\ r_{By} = r_B\, Sen\theta;\ d = h - r_{By}$$

Sustituyendo lo anterior, se obtiene:

$$\overrightarrow{r_{B/O}} = -r_B \operatorname{Cos}\theta \hat{\imath} + [h - r_B \operatorname{Sen}\theta]\hat{\jmath}$$

Al sustituir los datos encontrados, resulta que:

$$(2.5+1.7)(2.032\hat{\jmath}) = 2.5(r_A \operatorname{Cos}\theta \hat{\imath} + [r_A \operatorname{Sen}\theta + h]\hat{\jmath}) + 1.7(-r_B \operatorname{Cos}\theta \hat{\imath} + [h - r_B \operatorname{Sen}\theta]\hat{\jmath})$$

Al realizar la igualación de los componentes horizontales y verticales de los vectores de posición anterior, se tiene que:

$$\hat{\imath} = \hat{\imath} \rightarrow 0 = 2.5(r_A \operatorname{Cos}\theta) - 1.7(r_B \operatorname{Cos}\theta) \qquad (3)$$

$$\hat{\jmath} = \hat{\jmath} \rightarrow 8.5344 = 2.5[r_A \operatorname{Sen}\theta + h] + 1.7[h - r_B \operatorname{Sen}\theta] \qquad (4)$$

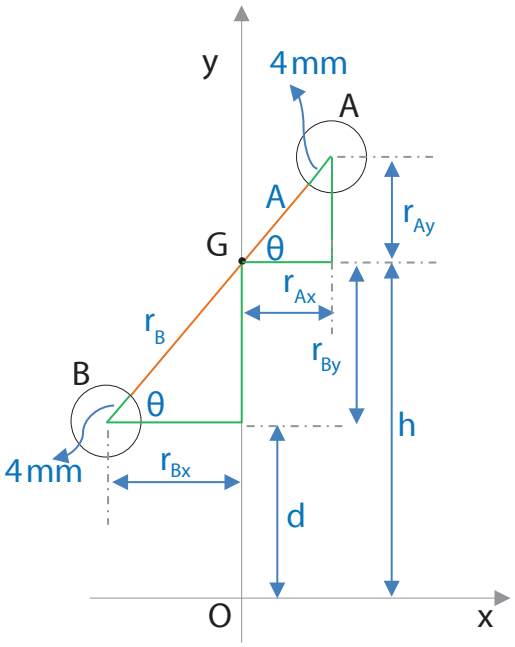


Figura 1.6 Vectores de posición de discos A y B

De la ecuación (3) se tiene que $r_A = 0.68 r_B$ y de la ecuación (4) no se puede encontrar otra relación útil, por lo que se recurre a relacionar r_A y r_B mediante la longitud de la cuerda.

Si la longitud de la cuerda es de 30 pulgadas que equivalen a 0.762 metros aproximadamente, entonces:

$$r_A + 4x10^{-3} + r_B + 4x10^{-3} = 0.762 \text{ [m]}$$

Sustituyendo la relación obtenida de la ecuación (3), se tiene:

$$0.68 r_B + 4x10^{-3} + r_B + 4x10^{-3} = 0.762$$

De donde, $\mathbf{r_B = 0.4488\ m}$ y $\mathbf{r_A = 0.3052\ m}$

Conociendo el valor de las distancias del punto G a cada uno de los discos, se dice que:

$$\dot{\rho}_{A1} = \omega_A r_A = (9.4248 \tfrac{\text{rad}}{\text{s}})(0.3052\text{m}) \rightarrow \dot{\rho}_{A1} = \mathbf{2.8764\ m/s}$$

$$\dot{\rho}_{B1} = \omega_B r_B = (9.4248 \tfrac{\text{rad}}{\text{s}})(0.4488\text{m}) \rightarrow \dot{\rho}_{A1} = \mathbf{4.2299\ m/s}$$

Retomando la información obtenida anteriormente y sabiendo que la velocidad del centro de masa es $V_G = \sqrt{4^2+3^2} = 5\text{ft/s} \approx 1.524\text{m/s}$ se procede a determinar la energía cinética en el instante antes de romperse la cuerda, esto es:

$$T_1 = \tfrac{1}{2} m_G V_G^2 + \tfrac{1}{2} m_A (\dot{\rho}_{A1})^2 + \tfrac{1}{2} m_B (\dot{\rho}_{B1})^2$$

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(4.2)(1.524)^2 + \tfrac{1}{2}(2.5)(2.8764)^2 + \tfrac{1}{2}(1.7)(4.2299)^2$$

$$\mathbf{T_1 = 30.4278\ [J]}$$

La energía cinética luego de romperse la cuerda T_2 se encuentra mediante la siguiente ecuación:

$$T_2 = \tfrac{1}{2} m_A V_{A2}^2 + \tfrac{1}{2} m_B V_{B2}^2$$

Luego:

$$T_1 = T_2 \rightarrow 30.4278 = \tfrac{1}{2} m_A V_{A2}^2 + \tfrac{1}{2} m_B V_{B2}^2$$

De la ecuación (2) sabemos que $(V_{B2})_y = 2.2591 - 1.4706 V_{A2}$ y de la ecuación (1) se tiene que $(V_{B2})_x = 3.0121$ m/s, entonces la conservación de la energía se puede escribir como:

$$30.4278 = \tfrac{1}{2} m_A V_{A2}^2 + \tfrac{1}{2} m_B \{[(V_{B2})_x]^2 + [(V_{B2})_y]^2\}$$

Sustituyendo el valor de $(V_{B2})_x$ y $(V_{B2})_y$, se obtiene:

$$30.4278=\frac{1}{2}(2.5)\ V_{A2}{}^2+\frac{1}{2}(1.7)[(3.0121)^2+(2.2591-1.4706V_{A2})^2]$$

Simplificando la expresión, queda:

$$30.4278=1.25V_{A2}{}^2+(0.85)[(3.0121)^2+(2.2591)^2-6.6445V_{A2}+(1.4706V_{A2})^2]$$

$$30.4278=1.25V_{A2}{}^2+12.0498-5.6478V_{A2}+1.8383V_{A2}{}^2$$

$$3.0883V_{A2}{}^2-5.6478V_{A2}-18.378=0$$

Al resolver la ecuación utilizando la calculadora *Casio fx-570ES*, en el menú MODE, en la opción 5 (EQN), opción 3 ($ax^2+bx+c=0$), se tienen los siguientes valores:

$$(V_{A2})_1=3.5196\text{ m/s};\ (V_{A2})_2=-1.6908\text{ m/s}$$

De lo cual se define que la magnitud de la velocidad del disco A, luego de romperse la cuerda, es aproximadamente $V_{A2}=3.5196$ m/s.

Para conocer el valor de la velocidad del disco B luego de romperse la cuerda, se debe encontrar la magnitud de la componente vertical, esto es:

$$(V_{B2})_y=2.2591-1.4706V_{A2}=2.2591-1.4706(3.5196)\rightarrow \mathbf{(V_{B2})_y=-2.9168\ m/s}$$

Lo cual quiere decir que el disco B va dirigido hacia abajo y no hacia arriba como se había estipulado inicialmente. Por lo tanto:

$$V_{B2}=\sqrt{([(V_{B2})_x]^2+[(V_{B2})_y]^2)}=\sqrt{(3.0121)^2+(2.9168)^2)}\rightarrow \mathbf{V_{B2}=4.1929\ m/s}$$

2. Si deseamos saber qué valor toma la distancia x_1 para satisfacer los valores hallados en la pregunta 1, recurriremos al principio de la

conservación de la cantidad de movimiento angular alrededor del punto O.

$$(\overrightarrow{H_O})_1=(\overrightarrow{H_O})_2$$

Donde $(H_O)_1$ es la cantidad de movimiento angular con respecto al punto O antes de romperse la cuerda, como se muestra en la Figura 1.7a.

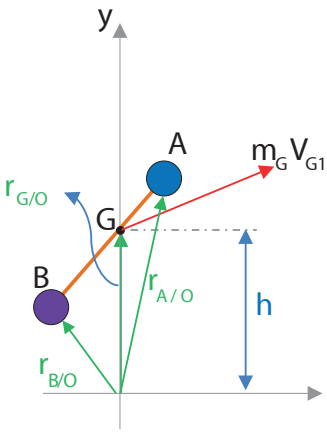


Figura 1.7a
Vectores de posición
de discos A y B instante 1

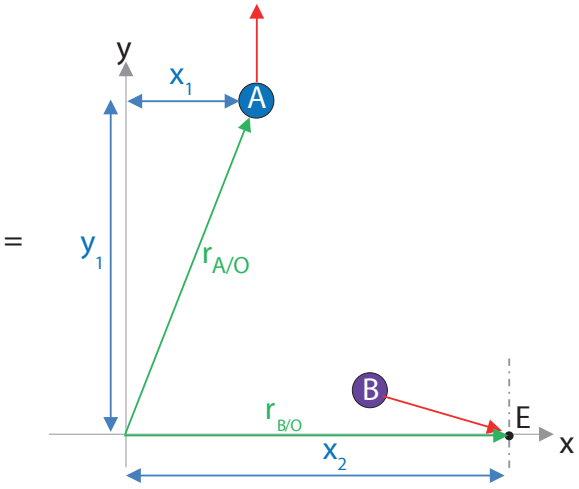


Figura 1.7b
Vectores de posición
de discos A y B instante 2

$(\overrightarrow{H_O})_1$ se determina mediante la expresión $(\overrightarrow{H_O})_1=(\overrightarrow{r_{G/O}}\times m_G\overrightarrow{V_{G1}}+(\overrightarrow{H_G})_1$, donde $(H_G)_1$ es la cantidad de movimiento angular de los discos respecto a su centro de masa en G antes de romperse la cuerda.

Entonces:

$$(\overrightarrow{H_O})_1=(2.032\hat{j})\times[(4.2)(1.2192\hat{i}+0.9144\hat{j})]+(H_G)_1$$

$$(\overrightarrow{H_O})_1=-10.4051\hat{k}+(\overrightarrow{H_G})_1\ [\text{kg m}^2/\text{s}]$$

Ahora debemos conocer el valor de $(\overrightarrow{H_G})_1$, y lo podemos encontrar de la siguiente forma:

$$(\overrightarrow{H_G})_1=(\overrightarrow{r_{A/G}})_1\times m_A(\overrightarrow{\dot{\rho}_{A1}})+(\overrightarrow{r_{B/G}})_1\times m_B\overrightarrow{\dot{\rho}_{B1}}$$

Note que, si desea expresar las velocidades relativas en forma vectorial, el proceso puede volverse algo tedioso. Por el contrario, sabemos que el producto cruz entre los vectores garantiza que exista una perpendicularidad entre ellos, por lo que resulta más útil apreciar que los vectores de las velocidades y la distancia del centro G a cada disco forman ángulos rectos (90°). Dicho esto, podemos decir que:

$$(\overrightarrow{H_G})_1=(\overrightarrow{r_A})\times(m_A)(\overrightarrow{\dot{\rho}_{A1}})+(\overrightarrow{r_B})\times(m_B)(\overrightarrow{\dot{\rho}_{B1}})$$

$$(\overrightarrow{H_G})_1=\{(0.3052)\times(2.5)(2.8764\ )+(0.4488)\times(1.7)(4.2299)\}\ [\hat{k}]$$

$$\mathbf{(\overrightarrow{H_G})_1=5.4219\ \hat{k}\ [kg\ m^2/s]}$$

Luego, la cantidad de movimiento angular antes de romperse la cuerda es:

$$(\overrightarrow{H_O})_1=-10.4051\hat{k}+5.4219\hat{k}\rightarrow\mathbf{(\overrightarrow{H_O})_1=-4.9832\hat{k}[kg\ m^2/s]}$$

Ahora, la cantidad de movimiento angular después de romperse la cuerda está dada por:

$$(\overrightarrow{H_O})_2=(\overrightarrow{r_{A/O}})_2\times m_A\overrightarrow{V_{A2}}+(\overrightarrow{r_{B/O}})_2\times m_B\overrightarrow{V_{B2}}$$

Se muestra en la Figura 7b que los vectores de posición entre las partículas A y B respecto al punto O son:

$$(\overrightarrow{r_{A/O}})_2=x_1\hat{\imath}+y_1\hat{\jmath}\ [m]\ ;\ (\overrightarrow{r_{B/O}})_2=7.1120\hat{\imath}\ [m]$$

También se conocen las magnitudes de las velocidades de las partículas después de romperse la cuerda, las cuales son:

$$V_{A2}=3.5196 \text{ m/s}, (V_{B2})_x=3.0121 \text{ m/s y}$$

$$(V_{B2})_y=2.9168 \text{ m/s}$$

Por lo que la cantidad de movimiento angular después de romperse la cuerda es:

$$\overrightarrow{(H_O)}_2=(x_1\,\hat{i}+y_1\,\hat{j})\times(2.5)(3.5196\hat{j})+(7.1120\hat{i})\times(1.7)(3.0121\hat{i}-2.9168\hat{j})$$

$$\mathbf{\overrightarrow{(H_O)}_2=8.7990x_1\,\hat{k}-35.265\hat{k}\ [kg\ m^2/s]}$$

De acuerdo con el principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular alrededor del punto O planteado anteriormente, se tiene que:

$$\overrightarrow{(H_O)}_1=\overrightarrow{(H_O)}_2$$

$$-4.9832\,\hat{k}=8.7990x_1\,\hat{k}-35.265\hat{k}$$

$$x_1=3.4415 \text{ m}$$

Por último, se puede decir que la distancia horizontal desde el punto O a la cual se encuentra la partícula A es aproximadamente 3.4415 metros.

Ejemplo 1/4e (momento angular de dos discos) Razona

Se han propuesto dos casos para el problema 1/4d, en los que se establece que para el Caso I la masa del disco A iguala la masa del disco B y para el Caso II la masa del disco B iguala la masa del disco A. Si se busca la analogía existente entre los casos I y II relacionados con la velocidad horizontal de

la partícula B después de romperse la cuerda, se puede decir que:

A. Para ambos casos el resultado es el mismo, pues la velocidad en mención no depende de la masa de las partículas.

B. El Caso I provoca una velocidad menor comparado con el Caso II por reducción de masa.

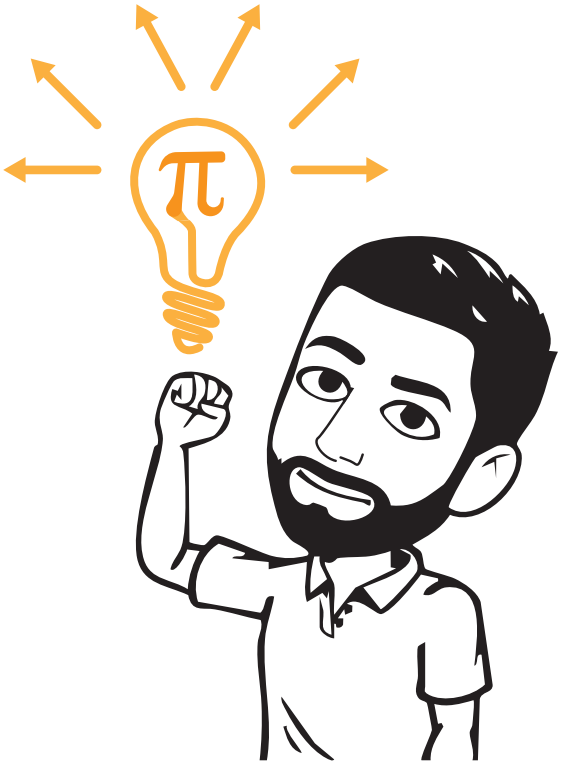
C. El Caso I provoca una velocidad mayor comparado con el Caso II por incremento de masa.

D. No existe semejanza entre los Casos I y II debido a la variación en las masas.

Pista (A)

Teniendo en cuenta que no existen fuerzas externas, es decir, $\Sigma F=\dot{L}=0$, se puede obtener fácilmente $2m\,\vec{V}_{G1}=m\,\vec{V}_{A2}+m\,\vec{V}_{B2}$.

Involucrando solo los componentes horizontales se tiene que $2m(1.2192)=(m)(V_{B2})_x$, de lo cual se encuentra la magnitud de la velocidad que equivale a $(V_{B2})_x=2.4384$ m/s, lo cual confirma que la componente horizontal de la velocidad después de romperse la cuerda de la partícula B no depende de la masa de las partículas.



PROBLEMAS PROPUESTOS

1.5 Problemas propuestos

Responda los problemas P1.1 – P1.2 teniendo en cuenta la siguiente información:

El movimiento del vehículo de 1.5 Mg se produce por cohetes, los cuales le proporcionan el empuje mostrado en la Figura P1.1.

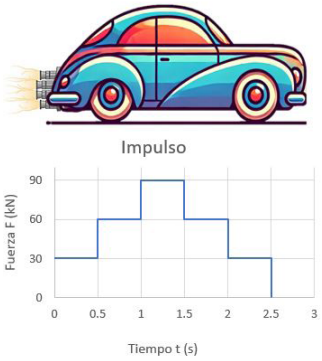


Figura P1. 1

Nota: inicialmente, el vehículo está en reposo. Desprecie la fricción y la pérdida de masa debido al consumo de combustible.

P1.1. El impulso del trineo hasta alcanzar su velocidad máxima es 45 000 N·s. La afirmación es:

A. Correcta, pues en $1 \leq t \leq 1.5$ s la fuerza presenta la mayor magnitud y la velocidad es máxima.

B. Incorrecta, porque en $0 \leq t \leq 2.5$ s el impulso hasta la máxima velocidad es igual al área bajo la curva en el intervalo indicado.

C. Incorrecta, pues en $1 \leq t \leq 1.5$ s la fuerza presenta la mayor magnitud y la velocidad es mínima.

D. Correcta, porque en $0 \leq t \leq 2.5$ s el impulso ocurre luego de expulsar todo el combustible.

P1.2. Cuando se ha expulsado todo el combustible, el trineo tiene una velocidad $\vec{V}=90\ \hat{\imath}$[m/s]. Esto puede determinarse al aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal mediante la expresión $m_1\vec{v}_1 + \Sigma\vec{F}\Delta t = m_1\vec{v}_2$. Que suceda lo anterior es:

Nota: ciertas preguntas presentadas son de selección múltiple con única respuesta, en las cuales se presentan el enunciado y cuatro opciones de respuesta. Solo una de estas es correcta y válida respecto a la situación planteada.

Si en algún momento encuentra algo irregular, no dude en comunicarse a:

jfperezv@ufpso.edu.co

A. Imposible, pues en el sistema existen fuerzas externas.

B. Incierto, pues a partir de los datos no se predice el comportamiento de la velocidad del trineo.

C. Seguro, pues cuando no existen fuerzas externas la cantidad de momento lineal se conserva.

D. Poco probable, porque cuando F=90 kN la velocidad en ese instante tiene una magnitud de 60 m/s.

Responda los problemas P1.3 – P1.4 teniendo en cuenta la siguiente información:

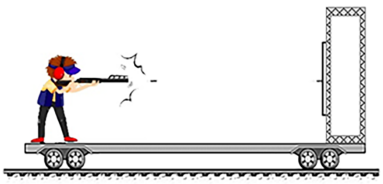


Figura P1. 3

P1.3. El hombre de 68 kg de la Figura P1.3 dispara la bala de 90 g con una velocidad de salida horizontal de 900 m/s relativa con el carro de 272 kg. Durante el disparo, el hombre permanece en la misma posición sobre el carro, como se muestra.

La resistencia al balanceo del carro puede ignorarse.

P1.3. Es correcto afirmar que, inmediatamente después de disparar la bala:

A. La velocidad del carro es nula, pues la masa de la bala es muy pequeña.

B. El carro se mueve hacia la izquierda con una velocidad aproximada de 238 m/s.

C. El impulso del disparo es mayor a 370 N.s.

D. El carro se mueve hacia la izquierda con una velocidad aproximada de 24 cm/s.

P1.4. Si luego de impactar el objetivo la bala queda incrustada, la velocidad del carro es:

A. Cero, pues la cantidad de movimiento lineal es igual en todos los instantes.

B. Aproximadamente 238 m/s, debido a que la bala y el carro presentan un impacto elástico.

C. Impredecible, porque la bala y el carro presentan un impacto plástico.

D. Aproximadamente 900 m/s, porque la bala y el carro presentan un impacto elástico.

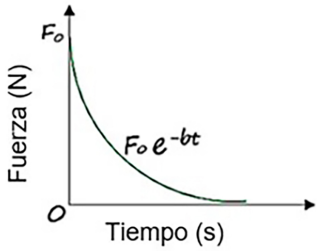
P1.5. Con el deseo de aprender jugando, un niño de 32 kg quiere impulsarse mediante el lanzamiento horizontal de ladrillos. Para iniciar el experimento, el niño se sube y se sienta en una carretilla de jardín de 10 kg, la cual está detenida y tiene tres ladrillos de 1 kg cada uno; pero antes de empezar, se asegura que la carretilla esté en una superficie plana y en donde las fuerzas horizontales sobre las ruedas puedan ignorarse.



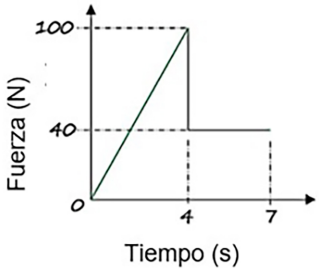
Figura P1. 5



(a)



(b)



(c)

Figura P1. 7

Si el niño lanza los ladrillos uno a la vez con una velocidad horizontal a 5 m/s respecto a la carretilla, ¿qué velocidad alcanza el niño y la carreta cuando se ha lanzado el último ladrillo?

P1.6. ¿Qué velocidad alcanza el niño y la carreta del problema P1.5 si lanza los tres ladrillos al tiempo? Compare sus resultados.

P1.7. El carro de la Figura P1.7(a) está inmóvil en el instante t=0. El carro de 8 kg transporta un material de 2 kg y es sometido a una fuerza F como se muestra.

Si la fuerza F varía como se muestra en la Figura P1.7(b) y la fricción entre el carro y la superficie de contacto es despreciable, determine su velocidad y el desplazamiento en función del tiempo. ¿Cuál es el valor de la velocidad para valores grandes del tiempo?

P1.8. El carro de la Figura P1.7 está inmóvil en el instante t=0. El carro de 8 kg transporta un material de 2 kg y es sometido a una fuerza F como se muestra.

Si la fuerza F se aplica por 7 segundos y varía como lo indica la Figura P1.7(c) y los coeficientes de fricción estático y dinámico son 0.5, calcule la máxima velocidad alcanzada por el bloque y el tiempo total durante el cual el bloque está en movimiento.

P1.9. La bola B de la Figura P1.9 pesa 19.62 N y viaja horizontalmente a 10 m/s cuando golpea a la bola A de 2 kg, la cual está inicialmente en reposo y está unida a un resorte con constante de rigidez de 100 N/m y su longitud sin deformar es 120 cm.

Sabiendo que el coeficiente de restitución entre A y B es de 0.8 y la fricción entre todas las superficies es despreciable, determine la fuerza normal entre A y la superficie cuando pasa por el punto F.

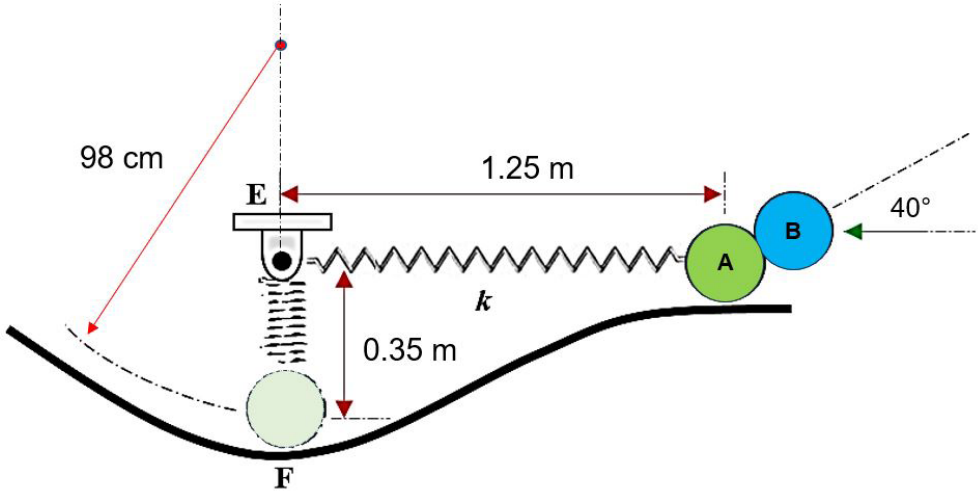


Figura P1. 9

Responda los problemas P1.10 – P1.12 teniendo en cuenta la siguiente información:

La fuerza del resorte y el principio de trabajo-energía relacionan las energías cinética y potencial mediante las expresiones $F_R=k(\delta)$ y $T_1+U_{1-2})=T_2$. Cuando no existen fuerzas no conservativas en el sistema, se conserva la energía y la ecuación de trabajo-energía se reduce a $T_1+V_1=T_2+V_2$.

Donde es T_1 energía cinética; U_{1-2} es trabajo; F_r es la fuerza de resorte; δ es la deformación del resorte; T_1 er energía cinética; V_1 es energía potencial; U_{1-2} es el trabajo y k es la rigidez del resorte.

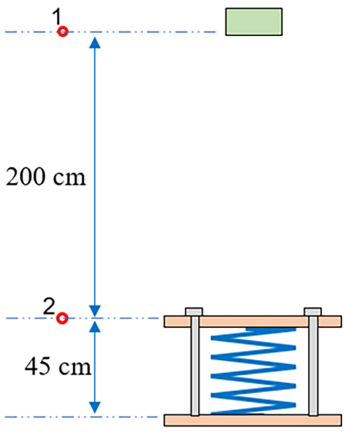


Figura P1. 10

En la Figura P1.10 se muestra un bloque B de 10 kg que se suelta desde el reposo a 200 cm por encima de la placa A de 5 kg, la cual puede deslizarse libremente a lo largo de las guías verticales lisas y está en contacto con el resorte de rigidez 15 N/cm.

P1.10. La energía cinética, potencial gravitacional y potencial elástica pueden obtenerse a partir de de 0.5 mv^2, mgh, y 0.5 $k\delta^2$, respectivamente. Si el resorte tiene una longitud sin deformar de 600 mm, se afirma que la energía cinética en el punto 2 (justo antes de golpear la placa) es igual a la energía potencial gravitacional en el punto 1. La afirmación es:

A. Incorrecta, porque el resorte está deformado y existe energía potencial elástica.

B. Correcta, pues la energía se conserva en todos los instantes del movimiento.

C. Incorrecta, porque la energía cinética presenta un aumento al acercarse a la plataforma.

D. Correcta, pues en el punto 2 existe energía potencial elástica y gravitacional.

P1.11. En una colisión, cuando no existen fuerzas impulsivas, la cantidad de movimiento lineal se conserva a lo largo de la línea de impacto y las velocidades (antes y después de la colisión) de las partículas pueden relacionarse con el coeficiente de restitución por medio de la expresión

$$e = \frac{v_{A2} - v_{B2}}{v_{B1} - v_{A1}}$$

Siendo los subíndices 1 y 2 el instante antes y después de la colisión, respectivamente.

Si la plataforma se mueve con una velocidad de 8 m/s luego de colisionar con el bloque y conociendo que el coeficiente de restitución del impacto es 0.8, la velocidad del bloque es aproximadamente:

A. 6 m/s dirigida hacia abajo.

B. 3 m/s dirigida hacia abajo.

C. 3 m/s dirigida hacia arriba.

D. 6 m/s dirigida hacia arriba.

P1.12. La energía cinética, potencial gravitacional y potencial elástica pueden obtenerse a partir de $0.5\ mv^2$, mgh, y $0.5\ k\delta^2$, respectivamente. Si la plataforma luego del impacto empieza a moverse a 6 m/s y el resorte tiene una longitud sin deformar de 600 mm, la deformación máxima del resorte es:

A. Aproximadamente 432 mm.

B. Equivalente al doble de la deformación inicial del resorte.

C. Despreciable, pues el resorte se comprime una distancia mínima.

D. Aproximadamente 50 cm.

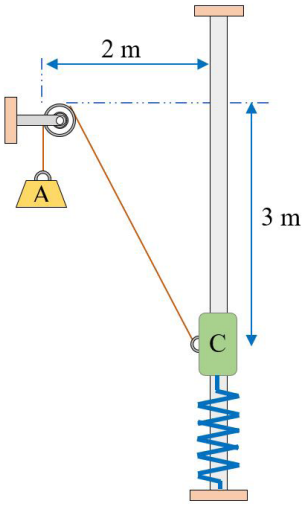


Figura P1.13

Responda los problemas P1.13 – P1.15 teniendo en cuenta la siguiente información:

El resorte que se muestra en la Figura P1.13 está conectado al piso y al collarín C de 90 kg. El collarín está en reposo y se encuentra soportado por el resorte, cuando la caja A de 135 kg se suelta desde el reposo en la posición mostrada. La constante de rigidez del resorte es 300 N/m.

La fuerza del resorte, el principio de trabajo-energía y la conservación de la energía relacionan las energías cinética y potencial mediante las expresiones:

$$F_R=k(\delta);\ T_1+U_{1-2}=T_2;\qquad T_1+V_1=T_2+V_2$$

Donde T_1 es la energía cinética; U_{1-2} es el trabajo; F_R es la fuerza del resorte; δ: es la deformación del resorte; T_1 es la energía cinética; V_1 es la energía potencial; U_{1-2} es trabajo; *k* y es la rigidez del resorte.

P1.13. Si consideramos al collarín, la caja y la polea como un solo sistema, este se considera conservativo. La afirmación es:

A. Incorrecta, pues el resorte se opone al movimiento del collarín, disminuyendo su velocidad.

B. Correcta, porque la fuerza del resorte cuando la cuerda está horizontal es igual a 900 N.

C. Incorrecta, porque el trabajo realizado por los pesos en un circuito cerrado es nulo.

D. Correcta, pues el trabajo es realizado solo por la fuerza del resorte y los pesos de la caja y el collarín.

P1.14. Conociendo que la energía producida por un resorte se relaciona mediante $V_e=0.5k\delta^2$, donde δ es la deformación del resorte y k es la rigidez del mismo, es correcto afirmar que:

A. Cuando la caja B ha caído 1 m, la energía potencial del resorte es aproximadamente 390 J.

B. La energía potencial elástica es nula cuando la caja B ha caído 3 m.

C. Cuando la caja B ha caído 1 m, la energía potencial del resorte es aproximadamente 150 J.

D. La energía potencial elástica es aproximadamente 1350 J cuando la caja B ha caído 3 m.

Fuerza de resorte

$$F_R=k(\delta)$$

P1.15. La razón de cambio de la posición con respecto al tiempo se conoce como velocidad. Dicho esto, la velocidad del collarín A cuando la caja B se mueve a 2.5 m/s es:

A. Idéntica a la velocidad de la caja B pues ambos cuerpos de mueven verticalmente.

B. Aproximadamente 4 m/s.

C. Igual a 1.67 m/s pues la relación entre sus masas es de 3 a 2.

D. Despreciable, porque el resorte ocasiona que el movimiento del collarín sea muy lento.

Trabajo - energía

$$T_1+U_{1-2}=T_2$$

Conservación de energía

$$T_1+V_1=T_2+V_2$$

Responda los problemas P1.16 – P1.17 teniendo en cuenta la siguiente información:

La energía cinética y la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas pueden determinarse, respectivamente, mediante las expresiones:

$$T_1=\frac{1}{2}m_i\bar{v}_i^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv'^2_i;\ L=\sum_{i=1}^{n}m_iv_i$$

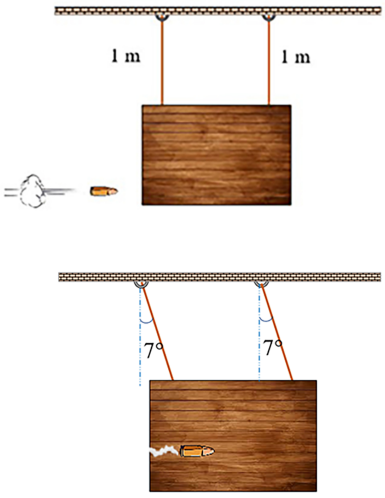


Figura P1. 16

Donde el término $\frac{1}{2}m_iv'^2_i$ de la energía cinética puede ignorarse si no existe un movimiento relativo al centro de masa.

En la Figura P1.16 se muestra una bala de 28 g que golpea un bloque de madera colgante de 45 kg y se incrusta en él. Los alambres de los que cuelga el bloque oscilan a través de un ángulo de 7° como consecuencia del impacto.

P1.16. La energía cinética del sistema inmediatamente después que la bala golpea al bloque es:

A. Mayor a 15 J, porque el bloque absorbe la energía de la bala.

B. Aproximadamente 5.3 J.

C. Nula, porque la bala transmite su energía al bloque.

D. Aproximadamente 3.3 J.

P1.17. Si la longitud de los alambres se reduce a la mitad, la cantidad de movimiento lineal de la bala antes de golpear la caja es aproximadamente:

P1.18. El collarín de 0.6 kg se desliza sobre un riel curvo en un plano vertical con fricción despreciable, bajo la acción de una fuerza constante en la cuerda guiada por una pequeña polea en A, como se muestra en la Figura P1.18.

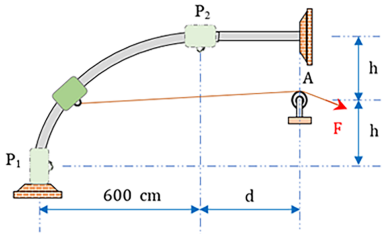


Figura P1. 18

Si el collarín es liberado desde el reposo en P_1, determine el valor de la fuerza F para el cual el collarín llegue al punto P_2 con una velocidad de 4 m/s. Nota: Tome d=h=200 mm.

P1.19. En una pista plana regular con poca resistencia al movimiento en su superficie, se mueven dos carros A y B con sentidos contrarios, (+) y (−), respectivamente. Un tercer carro C se encuentra en reposo entre A y B. El carro A golpea a C antes de que se choque con B.

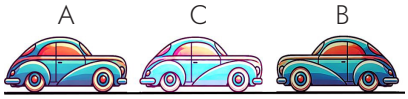


Figura P1. 19

Luego de colisionarse las tres partículas, se registran las velocidades (en ft/s) después de cada colisión y se muestran a continuación. (Asuma el coeficiente de restitución e=0.7).

Partícula	Masa (kg)	Inicio	Colisión 1	Colisión 2	Colisión 3	Colisión 4
A	240	+2.0000	+0.2320	+0.2320	-0.7553	-0.7553
B	235	-1.5000	-1.5000	+1.3467	+1.3467	+1.3467
C	260	0.0000	+1.6880	-0.8849	+0.0265	+0.0265

El signo (−) indica que el movimiento es hacia la izquierda y el signo (+) indica que el movimiento es hacia la derecha

A partir de los datos indicados, Juan afirma que la partícula A golpea a la partícula C en dos ocasiones a lo largo de todo el movimiento. Que suceda lo que afirma Juan es:

A. Imposible, pues la velocidad de C luego de la colisión 1 no es mayor que la velocidad de B.

B. Poco probable, porque la partícula A vuelve a colisionar con C sino después de la colisión 4.

C. Incierto, pues a partir de los datos presentados no se predice el comportamiento de las partículas.

D. Seguro, pues los sentidos de las velocidades son contrarios luego en la colisión 3.

Responda los problemas P1.120 – P1.21 teniendo en cuenta la siguiente información:

El hombre de la Figura P1.20 de 80 kg puede lanzar una caja de 20 kg con una velocidad de 4 m/s cuando permanece en el suelo. Si el hombre, el bote y la caja se consideran como un solo sistema, las fuerzas horizontales entre el hombre y el bote y el hombre y la caja se vuelven internas al sistema, y entonces el momento lineal se conservará a lo largo del eje horizontal. Lo anterior se puede relacionar con la expresión

$$m\vec{v}_1+\Sigma\vec{F}\Delta t=m\vec{v}_2$$

P1.20. Si el hombre se para firmemente en el bote de 120 kg y lanza la caja como se muestra en la Figura 1.19, se puede afirmar que, sin considerar la resistencia del agua:

A. La velocidad del bote equivale al 25 % de la velocidad de la caja.

B. El bote se mueve aproximadamente a 4.5 cm/s hacia la derecha.

C. La velocidad del bote equivale al 10 % de la velocidad de la caja.

D. La caja se mueve a 4 cm/s hacia la izquierda.

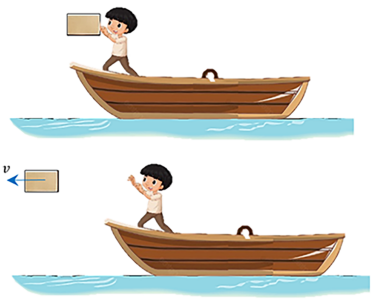


Figura P1. 20

1.21. Despreciando la fuerza tangencial producida por el agua sobre el bote y considerando una desaceleración en el bote de 10 cm/s^2, es correcto decir que el bote:

A. Se desplaza aproximadamente 88 cm hacia la derecha cuando han transcurrido tres segundos.

B. Tarda cinco segundos en alcanzar un desplazamiento de 88 cm hacia la derecha.

C. Tarda cinco segundos en alcanzar un desplazamiento de 64 cm hacia la derecha.

D. Se desplaza aproximadamente 64 cm hacia la derecha cuando han transcurrido tres segundos.

A(1800, 0,1250) [m]

B(−500,0, 975) [m]

C(x_A,0, z_A) [m]

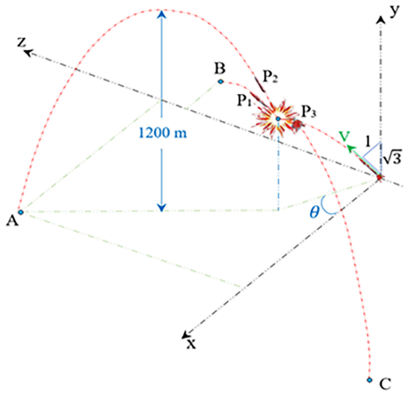


Figura P1. 22

P1.22. Un objeto de 45 kg se lanza desde el punto O con una velocidad inicial de 125 m/s a lo largo de la trayectoria indicada en la Figura P1.22. El cohete explota 10 s después del lanzamiento y se fragmenta en tres partes P_1, P_2 y P_3 con masas de 12, 9 y 24 kg, respectivamente.

Las piezas P_1 y P_2 se recuperan en las ubicaciones que se muestran. Los datos indican que la pieza P_2 alcanzó una altura máxima de 2000 m después de la explosión y que la pieza P_1 golpeó el suelo 12 s después de la explosión. ¿Cuáles son las coordenadas de impacto para la parte P_3? **Nota:** desprecie la resistencia del aire.

P1.23. El niño de 35 kg mostrado en la Figura P1.23 se desliza hacia abajo del tobogán, iniciando su movimiento desde el reposo en el punto B. Encuentre la energía cinética del niño en el punto A.

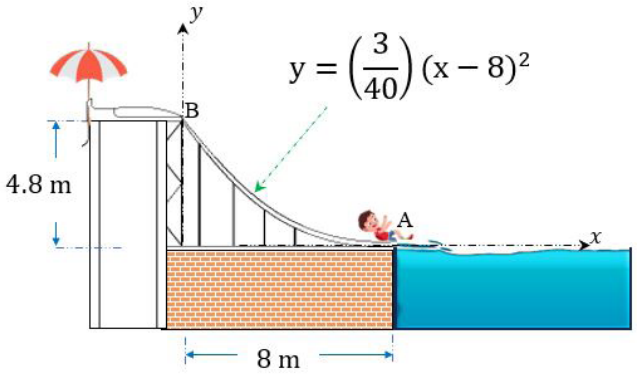


Figura P1. 23

P1.24. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce el suelo sobre el niño del problema P1.22 al pasar por el punto B? Lo anterior si se conoce que el radio de curvatura se relaciona con la pendiente de la curva mediante la expresión:

$$P=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

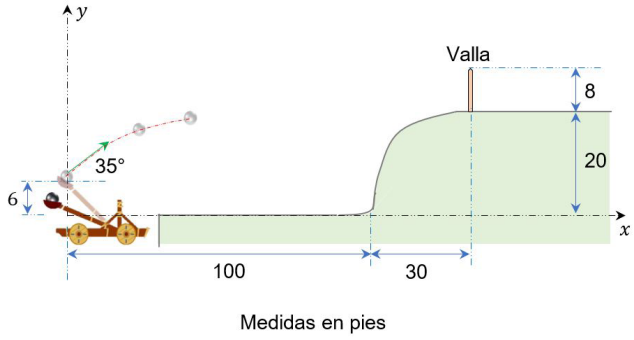


Figura P1. 25

Responda los problemas P1.25 – P1.26 teniendo en cuenta la siguiente información:

Una catapulta es un instrumento bélico utilizado en la antigüedad para el lanzamiento a distancia de grandes objetos a modo de proyectiles. En la Figura P1.25 se muestra una catapulta pequeña diseñada por estudiantes de ingeniería para lanzar esferas de acero de 8 Lb. La velocidad de lanzamiento es 80 ft/s, el ángulo de lanzamiento es de 35° sobre la horizontal y la posición de lanzamiento está a 6 ft sobre el nivel del suelo.

Los estudiantes usan un campo deportivo con una pendiente que tiene una valla de 8 ft en la parte más alta.

A. Las esferas golpean la valla en la posición (130, 20) ft.

B. La velocidad horizontal inicial es igual a 56.35 ft/s.

C. El tiempo de vuelo de la esfera es aproximadamente 2 s.

D. Las esferas pasan por encima de la valla.

P1.25. Si se ignora el efecto de la resistencia del aire, es correcto afirmar que:

A. La altura máxima alcanzada por la esfera es 39 ft.

B. El punto de impacto de la esfera es (130, 25) ft.

C. El punto de impacto de la esfera es (164, 0) ft.

D. La altura máxima alcanzada por la esfera es 28 ft. P1.26. Si se ignora la resistencia del aire y la velocidad de lanzamiento se reduce a 75 ft/s, se puede mencionar que:

Responda los problemas P1.27 – P1.28 teniendo en cuenta la siguiente información:

La velocidad y aceleración de una partícula son el cambio en la posición y velocidad de la misma con respecto al tiempo, respectivamente; es decir:

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} \quad o \quad a = v\frac{dv}{dx}$$

La caja de la Figura P1.27 viaja a lo largo de una banda transportadora industrial, iniciando su movimiento desde el reposo en el punto P_1 e incrementando su velocidad de tal forma que su aceleración es $a = 0.2\ t\ [m/s^2]$, donde t es el tiempo y está dado en segundos.

La ecuación para la velocidad y posición de la caja en función del tiempo son, respectivamente:

$$v=0.1t^2\ [m/s] \text{ y } x=0.0333\ t^3\ [m]$$

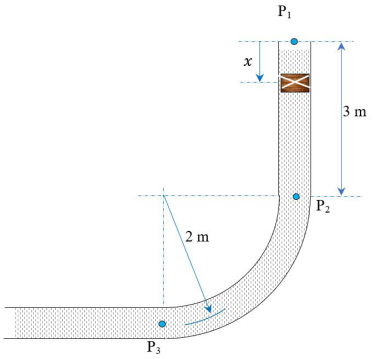


Figura P1. 27

P1.27. Si la longitud de un arco puede encontrarse con $s=r\theta$, donde es la longitud del arco, *r* es el radio de la curva y θ es el ángulo (en radianes) que forma el arco, es correcto afirmar que, en el punto P_3, la magnitud de la velocidad de la caja es:

A. Menor que en el punto P_1.

B. 3.2 m/s.

C. Incierta por la trayectoria curva.

D. 2.1 m/s.

P1.28. La aceleración absoluta en una trayectoria curva puede determinarse a partir de las componentes normal y tangencial, es decir, $a=\sqrt{(a^T)^2+(a^N)^2}$, siendo *a* la aceleración en cualquier punto de la trayectoria. Dicho esto, la aceleración absoluta de la caja en el punto P_3 es:

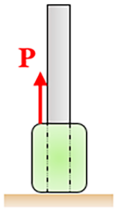




Figura P1. 29

A. 2.25 m/s^2.

B. La mitad de la aceleración del punto P_2.

C. El doble de la aceleración del punto P_2.

D. 5.24 m/s^2.

Responda las preguntas P1.29 - P1.30 teniendo en cuenta la siguiente información:

El principio de impulso y cantidad de movimiento lineal establece que:

$$m\vec{v}_1 + \int \vec{F} dt = m\vec{v}_2$$

Siendo $m\vec{v}_1$ y $m\vec{v}_2$ las cantidades de movimiento lineal en el instante antes y después, respectivamente, y el impulso es el área bajo la curva de la fuerza aplicada en un tiempo determinado.

La Figura P1.29 muestra un collarín de 4 lb el cual puede deslizarse sobre una varilla vertical sin fricción que se mueve bajo la acción de una fuerza P, la cual varía en magnitud como se indica.

P1.29. Si el collarín parte desde el reposo, se puede afirmar que, luego de aplicarse la fuerza P:

A. La velocidad del collarín permanece constante en el intervalo $2\ s \leq t \leq 3\ s$.

B. El collarín se mueve a 29 ft/s cuando han transcurrido 2 s.

C. La velocidad del collarín tiene un valor máximo en el intervalo $0\ s \leq t \leq 3\ s$.

D. El collarín se mueve a 16 ft/s cuando han transcurrido 2 s.

P1.30. El impulso dado al collarín debido a la fuerza P desde que este empieza a moverse hasta transcurrir cuatro segundos es 23.4 Lbf-s porque el área bajo la curva representa el impulso producido por la fuerza P. Dicho lo anterior, se puede decir que:

A. La afirmación es verdadera, pero la razón es una proposición falsa.

B. La afirmación y la razón son verdaderas, pero la razón no es una explicación correcta de la afirmación.

C. La afirmación es falsa, pero la razón es una proposición verdadera.

D. La afirmación es verdadera, pero la razón no es una explicación correcta de la afirmación.

GLOSARIO

Conservación de la energía: principio físico que establece que la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma de una forma a otra.

Conservación de la cantidad de movimiento: principio según el cual la cantidad total de movimiento en un sistema cerrado permanece constante si no actúan fuerzas externas.

Cantidad de movimiento angular: similar a la cantidad de movimiento lineal, pero aplicado a la rotación de un cuerpo. Depende del momento de inercia y la velocidad angular del cuerpo.

Cantidad de movimiento lineal: producto de la masa de un objeto y su velocidad. Representa la cantidad total de movimiento que tiene un objeto en un momento dado.

Energía cinética: energía que posee un cuerpo debido a su movimiento. Se calcula como el producto entre la masa y el cuadrado de la velocidad, dividido en dos. Se mide en Joules (J) en el Sistema Internacional de Unidades.

Energía potencial: energía almacenada en un sistema debido a su posición o configuración. Existen diferentes tipos, como la energía potencial gravitacional y la energía potencial elástica.

Energía renovable: energía obtenida de fuentes naturales que se regeneran de manera constante, como la solar, eólica o hidroeléctrica, entre otras.

Examen Saber Pro: es una evaluación estandarizada de carácter obligatorio en Colombia, administrada por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). Está dirigida a estudiantes que están finalizando sus estudios de educación superior, con el objetivo de medir la calidad de la educación en las instituciones y el nivel de competencias de los estudiantes en áreas clave como razonamiento cuantitativo, lectura crítica, competencias ciudadanas, comunicación escrita e inglés. Además, incluye módulos específicos que evalúan conocimientos en áreas particulares, adaptados a diferentes programas académicos, como ingeniería, salud, ciencias sociales, entre otros.

Impulso: producto de la fuerza aplicada a un objeto y el tiempo durante el cual actúa. Es una cantidad vectorial que describe el cambio en la cantidad de movimiento.

Innovación tecnológica: Proceso mediante el cual se desarrollan nuevas tecnologías o se mejoran las existentes para cumplir con nuevas funciones o mejorar la eficiencia.

Leyes de Newton: tres principios fundamentales que describen la relación entre el movimiento de un cuerpo y las fuerzas que actúan sobre él. Incluyen la ley de inercia, la ley de la fuerza y la aceleración, y la ley de acción y reacción.

Motor de combustión interna: dispositivo que convierte la energía química del combustible en energía mecánica mediante explosiones controladas dentro de un cilindro.

Motor eléctrico: máquina que convierte energía eléctrica en energía mecánica mediante interacciones magnéticas.

Motor térmico cuántico: concepto de motor que opera a nivel cuántico, utilizando diferencias de energía entre partículas cuánticas, como fermiones y bosones, para generar trabajo.

Movimiento del centro de masa: movimiento de un punto teórico que representa la media ponderada de todas las posiciones de masa en un sistema. Simplifica el análisis del movimiento total de un sistema de partículas.

Sistemas de partículas: un conjunto de partículas que interactúan entre sí y con su entorno, consideradas como un único sistema para simplificar el análisis dinámico.

Sistemas discretos: sistemas compuestos por un número finito de partículas, cada una con propiedades definidas, a diferencia de los sistemas continuos.

Sistemas mecánicos: conjuntos de componentes que interactúan entre sí mediante fuerzas y movimientos para realizar una función específica.

Termodinámica: rama de la física que estudia las relaciones entre el calor, el trabajo, la temperatura y la energía.

Trabajo mecánico: energía transferida a un cuerpo cuando una fuerza actúa sobre él y provoca su desplazamiento.

Trabajo y energía: conceptos que describen cómo las fuerzas hacen que un sistema cambie su energía. El trabajo es el producto de una fuerza aplicada a un objeto y la distancia que este se desplaza. La energía puede ser cinética o potencial, dependiendo del movimiento o posición del sistema.

REFERENCIAS

Bedford A. (2008). *Mecánica para Ingeniería-Dinámica* (5 ed.). México. Pearson Educación.

Beer, F. P., Johnston, E. R., Cornwell, P. J., Self, B. y Mazurek, D. (2024). *Vector mechanics for engineers: Dynamics* (12.ª ed.). McGraw-Hill Education.

Beer, F. P., Johnston, E. R., Cornwell, P. J. y Self, B. (2016). *Vector mechanics for engineers: Dynamics* (11th ed.). McGraw-Hill Education.

Cadena SER. (2025). *Ni gasolina ni diésel ni electricidad: el motor del futuro que funciona con una energía 'oculta'*. Sociedad Española de Radiodifusión. https://cadenaser.com/nacional/2024/12/27/ni-gasolina-ni-diesel-ni-electricidad-el-motor-del-futuro-que-funciona-con-una-energia-oculta-cadena-ser/

Delgado, M. B. (2013). Test on the quality of higher education – SABER PRO – What do the results indicate? *Colombian Journal of Anesthesiology,* 41(3), 177–178. https://doi.org/10.1016/j.rcae.2013.06.005

Freedman, R. A. y Young, H. D. (2018). *Física universitaria con física moderna* (1vª ed., Vol. 1). Addison-Wesley.

Gaona, E. (2010, mayo). *Física*. http://www.fisica.ru/dfmg/teacher/archivos/Unidad_de_conocimiento_fisica_decimo_1.pdf&ved=

Gallego, L. E. y Casadiego, M. A. (2023). A Gender Gap Analysis on Academic Performance in Engineering Students on Admission and Exit Standardized Tests | Análisis de brechas de género en el desempeño académico en pruebas de admisión y egreso en programas de Ingeniería. *Ingeniería e Investigación, 43*(3). https://doi.org/10.15446/ing.investig.103276

Hibbeler, R. C. (2016). *Ingeniería mecánica: dinámica* (14.ª ed.). Pearson Educación.

Llorente, J. y Roca, X. (2023). *Dinámica de sólidos y partículas.* Iniciativa Digital Politécnica.

Meriam, J. L. (2015). *Mecánica para ingenieros- dinámica* (3 ed.). Reverté.

Pérez, J. F. (2020). *Sistemas de partículas.* Ocaña.

Pineda, D. F. P., Benavides, J. A. C. y Medina, J. E. C. (2023). Percepción en los resultados de las pruebas Saber Pro. *Revista Lasallista de Investigación, 20*(1), 136–151. https://doi.org/10.22507/rli.v20n1a9

Pytel, A. y Kiusalaas, J. (2010). *Engineering Mechanics: Dynamics* (3 ed.). Cengage Learning.

Osorio, J. M. P. (2014). La prueba PISA del año 2013. *Perfiles Educativos, 36*(143), 3–7. https://doi.org/10.1016/S0185-2698(14)70606-3

Ramírez, M. B. (2013). Examen de Estado de la Calidad de la Educación Superior: SABER PRO. ¿Qué indican sus resultados? *Revista Colombiana de Anestesiología, 41*(3), 177–178. https://doi.org/10.1016/J.RCA.2013.06.005

Zhou, F., *et al*. (2024). Primer motor cuántico desarrollado en China. *El Confidencial*. https://www.elconfidencial.com/tecnologia/novaceno/2024-06-03/primer-motor-cuantico-china-termodinamica_3895508/

El estudio de sistemas de partículas es fundamental en la ingeniería. Este capítulo ofrece un enfoque práctico y estructurado, combinando teoría y resolución de problemas. Además, reúne problemas con el estilo de evaluación del examen de Estado de Colombia, desarrollado por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES), ayudando a los estudiantes en su preparación para esta prueba. A lo largo del documento, el lector encontrará principios fundamentales sobre sistemas discretos de partículas, métodos de análisis aplicados en ingeniería y ejercicios resueltos paso a paso. Se incluyen estrategias para abordar problemas complejos, ejemplos prácticos y preguntas con el formato del examen Saber Pro, facilitando el aprendizaje y el desarrollo de habilidades esenciales para la resolución de problemas.

Dirigido a estudiantes de ingeniería y profesionales que buscan fortalecer su comprensión de sistemas discretos de partículas, este libro es una herramienta clave para quienes desean aplicar estos conocimientos en el análisis de sistemas dinámicos. También es ideal para quienes se preparan para el examen Saber Pro en Colombia.

Juan Fernando Pérez Villegas

Ingeniero Mecánico. Especialista en Automatización Industrial y Gestión de Mantenimiento Industrial. Cuenta con más de diez años de experiencia como docente universitario. Ha trabajado en el sector de hidrocarburos en mantenimiento predictivo de motores marinos, además de realizar investigaciones en sistemas de control y análisis de materiales mediante Microscopía Electrónica de Barrido (SEM). Autor de diversas publicaciones en el campo de la ingeniería.

Eder Norberto Florez Solano

Doctor en Ingeniería por la Universidad Pontificia Bolivariana, sede Medellín. Docente Asociado en la Universidad Francisco de Paula Santander, seccional Ocaña, adscrito al Departamento de Ingeniería Mecánica. Actualmente dirige el Grupo de Investigación en Ingenierías Aplicadas para la Innovación, Gestión y Desarrollo (INGAP), categorizado como A por MinCiencias en su última convocatoria. Su trabajo se ha enfocado en fluidos, diseño y materiales en el ámbito de la ingeniería mecánica.

Edwin Edgardo Espinel Blanco

Ingeniero Mecánico. Especialista en Gerencia de Mantenimiento Industrial. Magíster en Ingeniería. Doctor en Ingeniería. Docente Asociado en la Universidad Francisco de Paula Santander, seccional Ocaña, adscrito al Departamento de Ingeniería Mecánica. Investigador asociado al Grupo de Investigación en Tecnología y Desarrollo en Ingeniería (GITYD), categorizado como A ante MinCiencias. Cuenta con experiencia en la ejecución de proyectos de investigación y proyección social. Es autor de múltiples artículos científicos publicados en revistas especializadas, ponente en eventos nacionales e internacionales, y autor de libros resultado de trabajos de investigación.

Universidad Francisco de Paula Santander
Ocaña - Colombia
Vigilada Mineducación

e-ISBN 978-628-96731-2-8