

# INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

CHRISTIAN NOLASCO SERNA
NELSON AFANADOR GARCÍA
CÉSAR AUGUSTO LÓPEZ CASTRO

INVESTIGACIÓN EDUCATIVA & PEDAGÓGICA IBEROAMERICANA

editorial redipe

editorial redipe

© 2022

**Título original:**

**INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA**

**Christian Nolasco Serna.** Universidad Francisco de Paula Santander, seccional Ocaña
**Nelson Afanador García.** Universidad Francisco de Paula Santander, seccional Ocaña
**César Augusto López Castro.** Universidad Libre de Colombia y
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

**ISBN: 978-1-957395-13-5**

**Primera edición**, Septiembre 2022

**SELLO Editorial**

Editorial REDIPE (95857440), Nueva York – Cali

Red de Pedagogía S.A.S. NIT: 900460139-2

© de la ilustración de la cubierta

**Comité Editorial**

Valdir Heitor Barzotto, Universidad de Sao Paulo, Brasil

Carlos Arboleda A. PhD Investigador Southern Connecticut State University, Estados Unidos

Agustín de La Herrán Gascón, Ph D. Universidad Autónoma de Madrid, España

Mario Germán Gil Claros, Grupo de Investigación Redipe

Rodrigo Ruay Garcés, Chile. Coordinador Macroproyecto Investigativo Iberoamericano EvaluaciónEducativa

Julio César Arboleda, Ph D. Dirección General Redipe. Grupo de investigación Educación y Desarrollo humano, Universidad de San Buenaventura

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley, la reproducción (electrónica, química, mecánica, óptica, de grabación o de fotocopia), distribución, comunicación pública y transformación de cualquier parte de ésta publicación -incluído el diseño de la cubierta- sin la previa autorización escrita de los titulares de la propiedad intelectual y de la Editorial. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual. Los Editores no se pronuncian, ni expresan ni implícitamente, respecto a la exactitud de la información contenida en este libro, razón por la cual no puede asumir ningún tipo de responsabilidad en caso de error u omisión.

Red Iberoamericana de Pedaogía
editorial@rediberoamericanadepedagogia.com
www.redipe.org

Impreso en Cali, Colombia
*Printed in Cali, Colombia*

# Introducción a las ecuaciones de la física matemática



Christian Nolasco Serna
Nelson Afanador García
César Augusto López Castro

# Dedicatoria

Este trabajo esta dedicado a mi familia
Christian Nolasco Serna



Este libro esta dedicado a mis hijas, hijo y a mi esposa,
quien son el motor de mi vida.
Nelson Afanador García

Dedico este libro a mis seres queridos
César Augusto López Castro

# Agradecimientos



A Dios
A la Universidad Francisco de Paula Santander, seccional Ocaña
Christian Nolasco Serna

A la Universidad Francisco de Paula Santander, seccional Ocaña
Nelson Afanador García

A la Universidad Libre de Colombia
A la Universidad Distrital Francisco José de Caldas
César Augusto López Castro

# Contenido

PAG.

**Capitulo 1. Preliminares**..... 13
1.1 Álgebra lineal..... 13
1.2 Cálculo..... 16
1.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias..... 18
1.4 Conjuntos ortogonales y sus propiedades..... 22
1.5 Teoría de Sturm-Liouville..... 25
1.6 Ejercicios..... 31

**Capitulo 2. Ecuaciones de la física matemática**..... 35
2.1. Ecuación de onda en una dimensión..... 37
2.2. Ecuación del calor en una dimensión..... 41

**Capitulo 3. Series de Fourier**..... 45
3.1. Desarrollo de $f(x)$ en serie de Fourier..... 45
3.2. Resultados importantes..... 51
3.3. Expansión periódica de una serie de Fourier..... 53
3.4. Funciones pares e impares..... 56

**Capitulo 4. Ecuación de onda**..... 65
4.1. Cuerda vibrante con extremos fijos..... 66
4.2. Cuerda vibrante con extremos libre..... 72
4.3. Cuerda vibrante con otras condiciones de frontera..... 75

**Capitulo 5. Ecuación del calor**..... 83
5.1. Ecuación del calor con extremos fijos (caso homogéneo) ..... 83
5.2. Ecuación del calor con extremos fijos (caso no homogéneo) ..... 88

**Referencias Bibliográficas**..... 93

PAG.

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Fuerzas actuando en una sección de la cuerda…… 38
Figura 2.2. Soluciones de la ecuación de onda para $n = 3$……..... 40
Figura 2.3. Barra conductora de calor……. 41
Figura 2.4. Sección transversal de la barra…… 41
Figura 3.1. Grafica de la serie de Fourier del ejemplo 3.3……... 47
Figura 3.2. Grafica de la serie de Fourier del ejemplo 3.4……..... 48
Figura 3.3. Grafica de la serie de Fourier del ejemplo 3.5…….. 49
Figura 3.4. Grafica de la serie de Fourier del ejemplo 3.6…….. 50
Figura 3.5. Expansión periódica de la serie de Fourier del ejemplo 3.1… 54
Figura 3.6. Expansión periódica de la serie de Fourier del ejemplo 3.4… 55
Figura 3.7. Serie de cosenos del ejemplo 3.21……. 58
Figura 3.8. Serie de senos del ejemplo 3.22……. 59
Figura 3.9. Serie de cosenos del ejemplo 3.24……. 61
Figura 4.1. Ecuación de onda del ejemplo 4.1 cuando t=0.6…….. 69
Figura 4.2. Ecuación de onda del ejemplo 4.1 cuando t=1.4. …… 69
Figura 4.3. Ecuación de onda del ejemplo 4.2 cuando t=0.8. …… 71
Figura 4.4. Ecuación de onda del ejemplo 4.1 cuando t=0.6. …… 74
Figura 4.5. Ecuación de onda del ejemplo 4.5 cuando t=1.2…….. 77
Figura 5.1. Curva de la temperatura del ejemplo 5.1…… 86
Figura 5.2. Curva de la temperatura del ejemplo 5.2…… 87
Figura 5.3. Curva de la temperatura del ejemplo 5.3…… 88
Figura 5.4. Curva de la temperatura del ejemplo 5.4…… 90
Figura 5.5. Curva de la temperatura del ejemplo 5.5…… 91

# Prólogo

Un conjunto importante de ideas en matemáticas se deriva del entendimiento de fenómenos físicos, en particular, las ecuaciones diferenciales pueden ser entendidas como el lenguaje adecuado para formular dichas ideas. A la inversa, la investigación en matemáticas favorece el desarrollo de nuevos avances en la ciencia. Sobre los años, matemáticos y científicos extienden sus métodos para incluir todas las áreas de la ciencia y la tecnología, y emerge el paradigma del modelamiento matemático. Un modelo matemático es una ecuación, o un conjunto de ecuaciones, cuyas soluciones describen el comportamiento físico de un sistema. En este contexto, por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell forman un modelo para los fenómenos eléctricos y magnéticos. En el anterior caso, como en muchos otros, las ecuaciones diferenciales obedecen a observaciones físicas. En general, un modelamiento matemático incluye la observación, selección de las variables físicas, formulación de las ecuaciones y finalmente, validación del modelo para realizar predicciones. Las ecuaciones diferenciales parciales se utilizan para modelar la gran mayoría de problemas físicos relacionados con la ingeniería, estos problemas son frecuentes en áreas tales como dinámica, elasticidad, transferencia de calor, electromagnetismo, entre otros, los fenómenos más estudiados son aquellos relacionados con comportamientos oscilatorios, de difusión y aquellos estables o independientes del tiempo.



Este texto pretende abordar las ecuaciones diferenciales parciales más relevantes de la física matemática: la ecuación de onda y la ecuación del calor; mediante la teoría suministrada por las Series de Fourier, haciendo uso del método de las variables separables y de la teoría de Sturm Liouville. Cabe resaltar que existen otros enfoques adecuados para resolver estas ecuaciones

diferenciales parciales, pero nos hemos inclinado por este camino para que el estudiante de ingeniería aprecie la importancia y el sentido de las matemáticas estudiadas a nivel de pregrado.

Esperamos que el lector aprenda y disfrute esta manera clásica de resolver los problemas ya mencionados, a la vez que relaciona temas de diversas asignaturas de matemáticas y resuelve los ejercicios planteados en el texto.

CAPÍTULO 1

# 1. Preliminares

El objetivo de este texto es resolver las Ecuaciones diferenciales parciales (EDP) más conocidas en el ámbito de la física-matemática. En el desarrollo de tales ecuaciones diferenciales parciales aparecen algunos conceptos básicos de álgebra lineal, de cálculo integral y de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), que tal vez el lector no tenga presente.

En esta sección se enuncian algunos resultados (sin demostración) con sus respectivos ejemplos, que serán necesarios en los próximos capítulos, de manera que la lectura posterior sea más agradable y sencilla de realizar. Merece la pena resaltar que además de los temas de las asignaturas mencionadas, la sección 1.5 de este capítulo está dedicada a la teoría de Sturm-Liouville, allí aparecen temas de gran importancia en la resolución de las EDP consideradas más adelante.



## 1.1 ALGEBRA LINEAL.

En esta sección se mencionan algunos resultados sobre los espacios vectoriales reales, cuyos ejemplos más representativos son $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Tenga en cuenta que a los elementos de un espacio vectorial en ocasiones se les llama vectores, se asume que el lector está familiarizado con los espacios vectoriales reales más usuales, sus operaciones: suma de vectores y producto por escalar; también con el concepto de subespacio vectorial y sus las cerraduras para la suma y el producto por escalar.

**1.1 Definición.**

Sea *V* un espacio vectorial real, y sean $v_1, v_2, \dots, v_n$ elementos de *V.* Si $c_1, c_2, \dots, c_n$ son escalares (números reales), entonces una combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_n$ es una expresión de la forma $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$.

**1.2 Ejemplo.**

Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, y los dos vectores $u = (2, 1, 3)$ y $v = (4, 3, 1)$. Una combinación lineal de estos dos vectores puede ser

$$5u - 2v = 5(2, 1, 3) - 2(4, 3, 1) = (2, -1, 13).$$

Observe que el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de *u* y *v* forma el plano que pasa por el origen y tiene vector normal $u \times v$, la ecuación de este plano es $4x - 5y - z = 0$.

Recuerde que los subespacios propios de $\mathbb{R}^3$ son rectas que pasan por el origen y planos que pasan por el origen, este ejemplo es una ilustración del siguiente.



**1.3 Teorema.**

El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ forma un subespacio vectorial de *V.*

A continuación, se enuncian otras definiciones importantes en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

**1.4 Definición.**

Sea *V* un espacio vectorial real, y $v_1, v_2, \dots, v_n$ elementos de *V.* Los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ son linealmente dependientes si existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ tales que por lo menos uno de ellos es distinto de cero y además satisfacen la ecuación $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$.

Si los únicos números reales que hacen posible la ecuación anterior son todos ellos iguales a cero *(*$c_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$*)* se dice que los vectores son linealmente independientes.

**1.5 Ejemplo.**

Sea *V* el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

**a)** Los vectores $u = (2,1,3)$ y $v = (4,3,1)$ son linealmente independientes, puesto que los únicos números reales que hacen posible la ecuación $c_1u + c_2v = c_1(2,1,3) + c_2(4,3,1) = (0,\ 0,\ 0)$ son $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$.

**b)** Los vectores $u = (2,1,3)$ y $v = (-6,-3,-9)$ son linealmente dependientes, ya que la expresión $c_1u + c_2v = c_1(2,1,3) + c_2(-6,-3,-9) = (0,\ 0,\ 0)$ se satisface haciendo $c_1 = 3$ y $c_2 = 1$.

**1.6 Definición.**

Si cualquier elemento de un espacio vectorial *V* se puede expresar como una combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, y si también $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ forma una base de *V.* La dimensión de *V* es igual a *n*.



**1.7 Ejemplo.**

Sea *V* el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Una base de *V* está constituida por los vectores unitarios $B = \{(1,0,0),\ (0,1,0), (0,0,1)\}$. La dimensión es 3.

Sea $W = \{(x,y,z) : 4x - 5y - z = 0\}$ un plano que pasa por el origen. Una base para $W$ está dada por $B = \{(2,1,3),\ (4,3,1)\}$. La dimensión de $W$ es 2.

**1.8 Definición.**

Sean *V* y *W* dos espacios vectoriales reales. Una transformación lineal de *V* en *W* es una función $T: V \to W$ que satisface la condición: $T(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) T(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2)$, para cualquier par de números reales $c_1$ y $c_2$, y para cualquier par de vectores $v_1$ y $v_2$ del espacio vectorial *V*.

**1.9 Ejemplo.**

Sean $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \mathbb{R}^2$. Una transformación lineal de *V* en *W* está dada por $T(x, y, z) = (2x - 3z,\ 4y + z)$.

A una transformación lineal de un espacio vectorial *V* en sí mismo se le denomina un operador lineal.

**1.2 CÁLCULO.**

Al resolver una EDP por los métodos mencionados más adelante, debemos resolver ciertas integrales definidas, que generalmente llevan funciones trigonométricas en el integrando. Varias de estas integrales se resuelven por el método de sustitución, o por el método de integración por partes. Una integral definida se puede simplificar si se conocen ciertas características de la función a integrar, como por ejemplo si es periódica, par o impar. Esta sección está dedicada a cubrir estos aspectos.

**1.10 Definición**.

Una función $f(x)$ definida en los reales es periódica si existe un número $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo *x* en $\mathbb{R}$. El número positivo más pequeño $p$ con esta característica es llamado el periodo de $f(x)$.



**1.11 Ejemplo.**

Si $f(x)$ es una función periódica con periodo *p*, entonces $f(x + np) = f(x)$ para todo entero *n*. Veamos primero que $f(x + 2p) = f(x)$.

Como se sabe que el periodo es igual a *p* entonces $f(x + 2p) = f(x + p + p) = f(x + p)$ debido a la periodicidad. Por la definición $f(x + p) = f(x)$, y de esta manera $f(x + 2p) = f(x)$. Por un proceso inductivo se tiene $f(x + np) = f(x)$.

**1.12 Ejemplo.**

La función $\operatorname{sen}(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y tiene periodo $2\pi$, puesto que satisface la ecuación $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$. Lo mismo se puede afirmar de la función $\cos(x)$, su dominio es todo $\mathbb{R}$ y posee periodo $2\pi$.

Veamos que las funciones $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ y $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ tienen periodo $2L$, siendo *n* un entero positivo: $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x+2L)}{L}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Un desarrollo idéntico muestra que $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ posee periodo $2L$.

**1.13 Definición**.

**a)** Una función $f(x)$ definida en los reales es impar si se cumple la ecuación $f(-x) = -f(x)$ para todo *x* en $\mathbb{R}$.

**b)** Una función $f(x)$ definida en los reales es par si $f(-x) = f(x)$, con *x* en $\mathbb{R}$.

**1.14 Ejemplo.**

**a)** Las siguientes funciones son impares: $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \operatorname{sen} x$.

**b)** Dos funciones pares son: $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = \cos x$.

Los siguientes resultados son evidentes a partir del aspecto geométrico de las funciones simétricas.



**1.15 Teorema** Sea $f(x)$ una función definida en $\mathbb{R}$, con periodo $p$, integrable. Entonces para cualquier par de números $a$ y b se tiene $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx$

**1.16 Ejemplo.** Una integral sencilla nos dice que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = 1$.

Al aplicar el teorema anterior se puede concluir que $\int_{2\pi}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = 1$.

**1.17 Teorema** Sea $f(x)$ una función integrable en el intervalo $[-a, a]$.

**a)** Si $f(x)$ es una función impar entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

**b)** Si $f(x)$ es una función par entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

**1.18 Ejemplo. a)** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \arctan x\, dx = 0$

**b)** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x\, dx = 2 \operatorname{sen} x \,|_{0}^{\pi/2} = 2$

Ahora se enuncian algunos resultados sencillos e importantes sobre las integrales definidas. Comenzamos con el método de integración por sustitución.

**1.19 Teorema**. Sea $g(x)$ una función derivable tal que $g'(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x)$ una función continua en el rango de $u = g(x)$, entonces $\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$.

**1.20 Ejemplo.** Realizar la integral $\int_0^1 e^{4x} dx$ por el método de sustitución.

Sea $u = 4x$, entonces $du = 4dx$ por tanto $\frac{1}{4} du = dx$, Los nuevos límites de integración son $u(0) = 0,\ u(1) = 4$, de manera tal que el método de integración por sustitución implica $\int_0^1 e^{4x} dx = \frac{1}{4}\int_0^4 e^u du = \frac{e^4 - 1}{4}$.



Ahora veremos el método de integración por partes para integrales indefinidas.

**1.21 Teorema**. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas con derivadas continuas, entonces $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

**1.22 Ejemplo.** Resolver la integral $\int xe^{4x} dx$.

En la resolución de este ejercicio nos apoyamos en el resultado del ejemplo anterior. Tomemos $f(x) = x$ y $g'(x) = e^{4x}$, por tanto, $\int xe^{4x} dx = \frac{1}{4} xe^{4x} - \frac{1}{4}\int e^{4x} dx$, y así $\int xe^{4x} dx = \frac{1}{4} xe^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x} + c$.

***1.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias.***

Ahora mencionaremos dos tipos importantes de ecuaciones diferenciales de primer orden: aquellas de variables separables y las lineales. También

incluimos las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes.

**1.23 Definición**. Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de la forma $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ es llamada separable, o de variables separables. Para resolver esta EDO realizamos transposición de términos, para obtener $\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$.

**1.24 Ejemplo.** Resolver la EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{4x}}{y^2}$.

Se separan variables para llegar a $\int y^2\,dy = \int e^{4x}\,dx$, al integrar cada término se obtiene la solución implícita $\frac{y^3}{3} = \frac{e^{4x}}{4} + c$.

**1.25 Definición**. Una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden es aquella de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \qquad (1.1)$$

siendo $p(x)$ y $q(x)$ funciones continuas.



Para resolver estas ecuaciones se determina una función auxiliar llamada ***factor integrante***, la cual viene dada por $\mu = e^{\int p(x)dx}$.

Tal función nos permite obtener todas las soluciones de esta ecuación diferencial, las cuales son $y = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)\,dx} f(x)dx + ce^{-\int p(x)dx}$.

**1.26 Ejemplo.** Resolver la EDO lineal $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^3e^{4x}$.

Hallamos el factor integrante: $\mu = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$. Ahora multiplicamos la EDO por esta función y se obtiene:

$$x^{-2}y' - 2x^{-3}y = xe^{4x},$$

o de manera equivalente $\frac{d}{dx}(x^{-2}y) = xe^{4x}$. Se sigue que $x^{-2}y = \int x\,e^{4x}\,dx$.

La integración por partes conduce a $x^{-2}y = \frac{xe^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + c$. A partir de esto se obtiene la solución de la ecuación lineal

$$y = \frac{x^3 e^{4x}}{4} - \frac{x^2 e^{4x}}{16} + cx^2.$$

**1.27 Definición**. Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes es de la forma

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \qquad (1.2)$$

donde $a, b$ y $c$ son números reales.

Con una ecuación de este estilo viene asociada una ecuación algebraica de segundo orden llamada *ecuación auxiliar*:

$$ar^2 + br + c = 0. \qquad (1.3)$$

Para resolver la ecuación diferencial hay que tener en cuenta tres casos que se desprenden de la naturaleza de las soluciones de la ecuación auxiliar: dos raíces reales distintas, una raíz real repetida o raíces complejas conjugadas. Antes de exponer los tres casos posibles presentamos un importante teorema.



El siguiente resultado se conoce como el *principio de superposición.* Aunque se puede formular para una ecuación diferencial lineal homogénea de orden $n$, lo presentamos solamente para orden dos.

**1.28 Teorema**. Si se pueden determinar dos soluciones *linealmente independientes* $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de $(1.2)$ entonces la combinación lineal $y = ay_1(x) + by_2(x) \quad a, b \in \mathbb{R} a, b \in \mathbb{R}$, también es una solución de $(1.2)$ y se llama la *solución general.*

**Primer caso: raíces reales distintas.** Si las soluciones de la ecuación auxiliar $(1.3)$ son los reales distintos $r_1$ y $r_2$, las dos funciones $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones linealmente independientes de $(1.2)$. El principio de superposición implica que el conjunto $\{y_1, y_2\}$ forma una *base* de las soluciones de esta ecuación diferencial, y por tanto su solución se puede expresar como

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$.

**1.29 Ejemplo.** Resolver la ecuación de segundo orden $y'' - 7y' + 12y = 0$. La ecuación auxiliar es: $r^2 - 7r + 12 = 0$. Sus soluciones son $r_1 = 3$ y $r_2 = 4$, por tanto, la solución viene dada por $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$.

La ecuación auxiliar de la ecuación diferencial $y'' - m^2 y = 0$ es $r^2 - m^2 = 0$, sus raíces son $r_1 = -m$ y $r_2 = m$. Por lo mencionado su solución viene dada por $y = c_1 e^{-mx} + c_2 e^{mx}$, debido a que $y_1 = e^{-mx}$ y $y_2 = e^{mx}$ son soluciones linealmente independientes. Es una tarea sencilla verificar que $y_3 = \cosh(mx)$ y $y_4 = \operatorname{senh}(mx)$ también forman un par de soluciones linealmente independientes de la misma ecuación diferencial, por tanto, en este caso también se puede expresar la solución mediante la expresión $y = c_1 \cosh(mx) + c_2 \operatorname{senh}(mx)$.

**1.30 Ejemplo.** Resolver la ecuación de segundo orden $y'' - 16y = 0$. La ecuación auxiliar es: $r^2 - 4^2 = 0$. Sus soluciones son $r_1 = -4$ y $r_2 = 4$, por consiguiente, la solución se puede escribir como $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{4x}$, o alternativamente $y = c_1 \cosh(4x) + c_2 \operatorname{senh}(4x)$.



**Segundo caso: una raíz real repetida.** Se presenta cuando la ecuación auxiliar $(1.3)$ solamente tiene una raíz real $r$, en este caso una solución de $(1.2)$ es $e^{rx}$.

Un procedimiento técnico denominado la *reducción de orden* permite encontrar una segunda solución linealmente independiente con respecto a la anterior, a saber, $xe^{rx}$.

Por el principio de superposición la solución en este caso es $y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$.

**1.31 Ejemplo.** Resolver la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = 0$.

La única solución real de la ecuación auxiliar: $r^2 + 4r + 4 = 0$, es $r = -2$.
La base de esta ecuación diferencial es $\{e^{-2x}, xe^{-2x}\}$.
La solución se expresa mediante $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$.

**Tercer caso: raíces complejas conjugadas.** Sucede cuando las raíces de la ecuación auxiliar (2) son $r_1 = \alpha + \beta i$ y $r_2 = \alpha - \beta i$.

Con el objetivo de expresar la solución de la ecuación únicamente con parámetros reales, hacemos uso de la fórmula de Euler: $e^{\theta i} = \cos\theta + i\text{sen}\,\theta$, para llegar a la solución $y = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x$.

**1.32 Ejemplo.** Resolver la ecuación lineal homogénea $y'' - 2y' + 10y = 0$.
La ecuación auxiliar es $r^2 - 2r + 10 = 0$. Sus soluciones son $r_{1,2} = 1 \pm 3i$.

Esto corresponde al tercer caso con $\alpha = 1$ y $\beta = 3$. Por lo anterior la solución de la ecuación diferencial es $y = c_1e^x\cos 3x + c_2e^x\,\text{sen}\,3x$.



### *1.4 Conjuntos ortogonales y sus propiedades.*

Con el objetivo de generalizar el producto interno entre vectores de $\mathbb{R}^n$, concepto que conduce naturalmente al de ortogonalidad, se realiza la siguiente definición.

**1.33 Definición.** Sea $w(x)$ una función positiva definida en $[a, b]$. El producto interno de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, con peso $w(x)$, en el intervalo $[a, b]$, viene dado por la integral

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,w(x)\,dx.$$

La magnitud de $f$ se define como el número no negativo: $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Si no se indica nada sobre la función peso, se asumirá igual a 1 $(w(x) = 1)$.

Al desarrollar el producto interno $(f,g)$ mediante una suma de Riemann apreciamos una semejanza con el producto interno de dos vectores en $\mathbb{R}^n$, que viene dado por $(u,v) = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$.

**1.34 Ejemplo. a)** El producto interno de las funciones $x$ y $\cos x$ en el intervalo $[0,\pi]$ es $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = -2$. Esta integral se realiza por partes.

**b)** El producto interno de las dos funciones $\cos\frac{m\pi x}{L}$ y $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$ ($m$ y $n$ enteros) en el intervalo $[-L,L]$ es igual a $\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx = 0$. Para resolver esta integral se utiliza la identidad $2\operatorname{sen} a\cos b = \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)$, o de manera alternativa, se observa que la función $\cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$ es impar en $[-L,L]$.

**1.35 Teorema.** El producto interno de dos funciones (con peso $w(x)$) conserva las propiedades del producto interno sobre vectores de $\mathbb{R}^n$, algunas de ellas son:



**a)** $(cf,g) = (f,cg) = c(f,g)$

**b)** $(f_1+f_2,g) = (f_1,g) + (f_2,g)$

**c)** $(f,g) = (g,f)$

**d)** $|(f,g)| \le ||f||\,||g||$
(desigualdad de Cauchy-Schwarz)

**e)** $||f+g|| \le ||f|| + ||g||$
(desigualdad de Minkowsky).

**1.36 Definición.** Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son ortogonales en el intervalo $[a,b]$ si su producto interno (con peso $w(x)$) es igual a cero.

**1.37 Ejemplo. a)** Las funciones $x$ y $\cos x$ no son ortogonales en el intervalo $[0,\pi]$, puesto que $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = -2$ (véase el ejemplo 1.34 a).

**b)** Las dos funciones $\cos\frac{m\pi x}{L}$ y $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$ ($m$ y $n$ enteros) son ortogonales en el

intervalo $[-L, L]$ (véase el ejemplo 1.34 b).

Un conjunto de funciones forma un conjunto ortogonal si lo son dos a dos, es decir, si dos funciones cualesquiera (distintas) son ortogonales.

Las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2},$$

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{2}, \qquad \cos a \cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2},$$

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

implican que el conjunto formado por las funciones $\cos\frac{m\pi x}{L}$, $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$ para $m$ y $n$ enteros positivos, es ortogonal. Tales identidades junto al método de integración por sustitución permiten obtener los valores de las siguientes integrales:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & si\ m \neq n \\ L, & si\ m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & si\ m \neq n \\ L, & si\ m = n \end{cases}$$

$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$ para toda *m, n.*

Tales fórmulas indican que la magnitud de cualquiera de las funciones $\cos\frac{m\pi x}{L}$ o $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$ es igual a $\sqrt{L}$.

Estos resultados junto a las integrales $\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx = 0$, $\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}dx = 0$ y $\int_{-L}^{L}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{L}{2}$ nos permiten enunciar el siguiente.

**1.38 Teorema.** Las funciones $\frac{1}{2}$, $\cos\frac{m\pi x}{L}$, $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$ para $m$ y $n$ enteros positivos, forman un conjunto ortogonal de funciones (con peso $w(x) = 1$) en el intervalo $[-L, L]$, La magnitud (o norma) de la función constante es $\sqrt{\frac{L}{2}}$, mientras que la magnitud de las funciones trigonométricas es $\sqrt{L}$.

### *1.5 Teoría de Sturm-Liouville.*

Los resultados expuestos a continuación serán muy útiles cuando consideremos el método de separación de variables en la resolución de las EDP más usuales de la física matemática.

Para efectos de notación consideramos *I* como un intervalo arbitrario y $\Gamma$ (Gamma) un espacio de funciones definidas sobre el intervalo *I*.

**1.39 Definición.** Un operador diferencial lineal *L* que actúa sobre $\Gamma$ es simétrico si para dos funciones arbitrarias $f_1$ y $f_2$ en el espacio $\Gamma$, se satisface la ecuación

$$\int_I [f_1(x)(Lf_2)(x) - f_2(x)(Lf_1)(x)]dx = 0 \qquad (1.4)$$

**1.40 Ejemplo a)** El operador identidad sobre el espacio $\Gamma$ de funciones integrables es simétrico, Si $I = [a, b]$ y además $(Lf)(x) = f(x)$, la ecuación $(4)$ se convierte en $\int_I [f_1(x)f_2(x) - f_2(x)f_1(x)]dx = 0$.

**b)** Sea $\Gamma$ el espacio de las funciones con segunda derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que se anulan en los extremos del intervalo, es decir, $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$. El operador diferencial lineal que halla la segunda derivada de una función de $\Gamma$, $(Lf)(x) = f''(x)$ es simétrico. Esta afirmación se puede verificar al hacer uso de la integración por partes, la ecuación $(4)$ se convierte en:

$$\int_a^b [f_1(x)f_2''(x) - f_2(x)f_1''(x)]dx = f_1(b)f_2'(b) - f_1(a)f_2'(a)$$

$$-\int_a^b f_1'(x)f_2'(x)\,dx - f_2(b)f_1'(b) + f_2(a)f_1'(a) + \int_a^b f_1'(x)f_2'(x)\,dx = 0.$$

**1.41 Definición.** Sea *L* un operador diferencial lineal que actúa sobre un espacio $\Gamma$ de funciones definidas en $(a, b)$. Un problema de eigenvalores está compuesto por una ecuación de la forma

$$(Lf)(x) + \lambda w(x)f(x) = 0, \quad 0 < x < b, \qquad (1.5)(1.5)$$

siendo $\lambda$ un parámetro y $w(x)$ una función positiva en $(a, b)$. Los valores de $\lambda$ para los cuales (1.5) tiene soluciones no nulas en $\Gamma$ se denominan eigenvalores (o valores propios), mientras que las respectivas soluciones no nulas son llamadas eigenfunciones (o funciones propias).

**1.42 Teorema.** Si el operador *L* del problema de eigenvalores $(1.5)$ es simétrico entonces todos los eigenvalores $\lambda$ son reales y se pueden organizar como una sucesión creciente $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \lambda_n < \cdots$ tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Además, las eigenfunciones asociadas a distintos eigenvalores son ortogonales con función peso $w(x)$ en $(a, b)$.

**1.43 Definición.** Un problema regular de eigenvalores de Sturm-Liouville en el intervalo $[a, b]$ está compuesto de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$[p(x)f'(x)]' + q(x)f(x) + \lambda w(x)f(x) = 0, \quad a < x < b \qquad (1.6)$$

y de las condiciones de frontera

$$c_1 f(a) + c_2 f'(a) = 0 \qquad (1.7)$$
$$k_1 f(b) + k_2 f'(b) = 0 \qquad (1.8)$$



siendo $p(x), q(x)$ y $w(x)$ funciones de valor real tales que $p(x)$ es una función positiva y continuamente diferenciable en $[a, b]$; $q(x)$ continua en $[a, b]$ y $w(x)$ una función continua y positiva en $[a, b]$. Además, $c_1$ y $c_2$ son números reales tales que por lo menos uno de ellos es distinto de cero, idéntica condición para $k_1$ y $k_2$.

**1.44 Ejemplo.** El problema regular de Sturm-Liouville (S-L) en el intervalo $[0, L]$ , dado por

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad f(0) = 0, \quad f(L) = 0,$$

se obtiene haciendo $p(x) = 1, \quad q(x) = 0$ y $w(x) = 1$ en la ecuación $(1.6)$, $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ en la ecuación $(1.7)$, y $k_1 = 1$ y $k_2 = 0$ en la ecuación $(1.8)$.

**1.45 Ejemplo.** Considerando de nuevo el intervalo $[0, L]$, eligiendo $p$, $q$ y $w$ como en el ejemplo 1.44, haciendo $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$ en la ecuación $(1.7)$, $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$ en la ecuación $(1.8)$, se obtiene el problema regular de Sturm-Liouville

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad f'(0) = 0, \quad f'(L) = 0.$$

**1.46 Ejemplo.** Sean $p$, $q$ y $w$ como en el ejemplo 1.44, haciendo $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$ en la ecuación $(1.7)$, $k_1 = 1$ y $k_2 = 0$ en la ecuación $(1.8)$, se obtiene el problema regular S-L $f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad f'(0) = 0, \quad f(L) = 0.$

**1.47 Ejemplo.** Sean $p$, $q$ y $w$ como en el ejemplo 1.44, sean $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ en la ecuación $(1.7)$, $k_1 = m$ y $k_2 = 1$ en la ecuación $(1.8)$, esto conduce al problema regular S-L $f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad f(0) = 0, \quad mf(L) + f'(L) = 0.$

**1.48 Teorema.** El operador diferencial lineal $[Lf](x) = [pf']'(x) + [qf](x)$ que aparece en la ecuación $(1.6)$ de la definición 1.43 del problema regular S-L, es simétrico en $\Gamma$ el espacio de funciones dos veces diferenciables que satisfacen las condiciones de frontera $(1.7)$ y $(1.8)$. Por consiguiente, satisface la conclusión del teorema 1.42.



El teorema 1.48 nos indica que los eigenvalores de los problemas S-L de los ejemplos 1.44, 1.45, 1.46 y 1.47 son reales y se pueden acomodar en una sucesión creciente que tiende a infinito. También asegura que las respectivas eigenfunciones son ortogonales.

Ahora nos enfocaremos en calcular tales eigenvalores y eigenfunciones. En los siguientes ejemplos le asignaremos un valor específico al extremo derecho del intervalo considerado, con el objetivo de aprovechar esta información más adelante.

**1.49 Ejemplo.** Hallar los eigenvalores y las eigenfunciones del problema regular de Sturm-Liouville del ejemplo 1.44 en el intervalo $[0, \pi]$, esto es,

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0.$$

Para determinar los eigenvalores consideramos tres casos: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$.

Primer caso: $\lambda < 0$. Sea $\lambda = -\mu^2$, con $\mu > 0$. La ecuación auxiliar de la ecuación $f''(x) + \lambda f(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - \mu^2 f(x) = 0$ es $r^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\mu$ $r^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\mu$. Por consiguiente, la solución de esta EDO viene dada por la expresión $f(x) = c_1\cosh(\mu x) + c_2\operatorname{senh}(\mu x)$.

La primera condición de frontera (CF): $f(0) = 0$ implica $c_1\cosh(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$, la segunda CF: $f(\pi) = 0$ conlleva a $c_2\operatorname{senh}(\mu\pi) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$.

Se ha visto que bajo la condición $\lambda < 0$ no hay eigenvalores.

Segundo caso: $\lambda = 0$. La EDO $f''(x) + \lambda f(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0$ tiene ecuación auxiliar $r^2 = 0 \Rightarrow r = 0$. La solución es $f(x) = c_1 x + c_2$.

La primer CF: $f(0) = 0$ conduce a $c_2 = 0$. La segunda CF: $f(\pi) = 0$ equivale a $c_1\pi = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Tampoco tenemos eigenvalores en el segundo caso.



Tercer caso: $\lambda > 0$. Sea $\lambda = \mu^2$, con $\mu > 0$. La ecuación auxiliar de la ecuación $f''(x) + \lambda f(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) + \mu^2 f(x) = 0$ es ahora $r^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\mu i$.

La solución de la EDO considerada es $f(x) = c_1\cos(\mu x) + c_2\operatorname{sen}(\mu x)$.

La primera CF: $f(0) = 0$ conduce a $c_1\cos(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$.

La segunda CF: $f(\pi) = 0 \Leftrightarrow c_2\operatorname{sen}(\mu\pi) = 0$. Para obtener soluciones no triviales, la expresión sinusoidal se debe anular, esto es, $\operatorname{sen}(\mu\pi) = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$ y así $\mu = \frac{n\pi}{\pi} = n$. Hemos visto que los eigenvalores son $\lambda_n = \mu^2 = n^2$, y las respectivas eigenfunciones, salvo múltiplos constantes, son $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Esto concuerda con el teorema 1.42, que nos asegura que los eigenvalores son reales, se pueden organizar en una sucesión creciente que tiende a infinito y que las eigenfunciones asociadas a distintos eigenvalores son ortogonales en el intervalo considerado.

**1.50 Ejemplo.** El problema regular de Sturm-Liouville del ejemplo 1.45 en el intervalo $[0,2]$ es: $f''(x)+\lambda f(x)=0, \quad 0<x<2, \quad f'(0)=0, \quad f'(2)=0$. Los eigenvalores vienen dados por $\lambda_0=0$ y $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{2^2}, \ n=1,2,3,\cdots$.
Sus respectivas eigenfunciones son las funciones cosenoidales $f_0(x)=1$ y $f_n(x)=\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \ n=1,2,3,\cdots$. En la sección de ejercicios se pide al lector demostrar este hecho. Es adecuado razonar como en el ejemplo 1.49.
Observe la implicación del teorema 1.42 en relación con este ejercicio.

**1.51 Ejemplo.** Consideremos el problema regular S-L del ejemplo 1.46 en $[0,1]$, es decir, $f''(x)+\lambda f(x)=0, \quad 0<x<1, \quad f'(0)=0, \quad f(1)=0$.

Los eigenvalores del problema vienen dados por $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2^2}, \ n=1,2,3,\cdots$.

Las correspondientes eigenfunciones son $f_n(x)=\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right), \ n=1,2,3,\cdots$.

Tambien se le pide al lector deducir estos resultados razonando como en el ejemplo 1.49 y observar la conclusión del teorema 1.42.



**1.52 Ejemplo.** Consideremos el problema regular S-L del ejemplo 1.47 con $m=2$ en $[0,\pi]$: $f''(x)+\lambda f(x)=0, \quad 0<x<\pi, \quad f(0)=0, \quad 2f(\pi)+f'(\pi)=0$.

Seguimos el razonamiento del ejemplo 1.49 para considerar tres casos.
Primer caso: $\lambda=-\mu^2<0$, con $\mu>0$. Ahora $f''(x)+\lambda f(x)=0$ equivale a $f''(x)-\mu^2 f(x)=0$, como antes $r^2-\mu^2=0\Rightarrow r=\pm\mu$.

De esta manera $f(x)=c_1\cosh(\mu x)+c_2\operatorname{senh}(\mu x)$. La primera CF: $f(0)=0$ lleva a la expresión $c_1\cosh(0)=0\Rightarrow c_1=0$.

A partir de la segunda CF: $2f(\pi)+f'(\pi)=0$ se sigue $c_2[2\operatorname{senh}(\mu\pi)+\mu\cosh(\mu\pi)]=0\Rightarrow c_2=0$ debido a que la expresión $2\operatorname{senh}(\mu\pi)+\mu\cosh(\mu\pi)$ es positiva. No hay eigenvalores en este caso.

Segundo caso: $\lambda = 0$. Tenemos $f''(x) + \lambda f(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0$ su ecuación auxiliar es $r^2 = 0 \Rightarrow r = 0$. La solución es $f(x) = c_1 x + c_2$.
La primer CF: $f(0) = 0$ conduce a $c_2 = 0$. La segunda CF: $2f(\pi) + f'(\pi) = 0$ implica $c_1[2\pi + 1] = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Tampoco hay eigenvalores en el segundo caso.

Tercer caso: $\lambda = \mu^2 > 0$, con $\mu > 0$. La ecuación $f''(x) + \lambda f(x) = 0 \Leftrightarrow$ $f''(x) + \lambda f(x) = 0 \Leftrightarrow$ , por tanto, $r^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow r = \pm \mu i$.

La solución es $f(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \operatorname{sen}(\mu x)$. La primer CF: $f(0) = 0$ conlleva a $c_1 \cos(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. La segunda CF: $2f(\pi) + f'(\pi) = 0$ implica la expresión $c_2[2\operatorname{sen}(\mu\pi) + \mu\cos(\mu\pi)] = 0$, se pueden obtener soluciones no triviales al hacer $2\operatorname{sen}(\mu\pi) + \mu\cos(\mu\pi) = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}(\mu\pi) = -\mu\cos(\mu\pi) \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(\mu\pi)}{\cos(\mu\pi)} = -\frac{\mu}{2} \Rightarrow \tan(\mu\pi) = -\frac{\mu\pi}{2\pi}$
.

Al hacer $\mu\pi = z$ se obtiene la ecuación $\tan(z) = -\frac{z}{2\pi}$, las raíces de esta ecuación las llamamos $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n, \cdots$. Tales valores son positivos puesto que se asume $\mu > 0$ y esto implica $z > 0$.

Los eigenvalores son $\lambda_n = \mu_n^2 = \frac{z_n^2}{\pi^2}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, con las respectivas eigenfunciones dadas por $f_n(x) = \operatorname{sen}(\mu x) = \operatorname{sen}\left(\frac{z_n x}{\pi}\right), n = 1, 2, 3, \cdots$ .

Las primeras cinco raíces de la ecuación

$\tan(z) = -\frac{z}{2\pi}$ con cuatro cifras decimales son $z_1 = 2.7315$, $z_2 = 5.5589$, $z_3 = 8.4910$, $z_4 = 11.4958$, $z_5 = 14.5449$.

Como $\mu = \frac{z}{\pi}$ entonces las primeras cinco eigenfunciones son

$f_1(x) = \operatorname{sen}(0.86947x)$, $f_2(x) = \operatorname{sen}(1.76945x)$, $f_3(x) = \operatorname{sen}(2.70278x)$, $f_4(x) = \operatorname{sen}(3.65923x)$, $f_5(x) = \operatorname{sen}(4.62979x)$.

Es un buen ejercicio verificar la conclusión del teorema 1.42 con este ejercicio.

### *1.6 Ejercicios.*

**1.** Sean $u = (5, -1, 4)$ y $v = (-2, 6, 1)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Demostrar que el conjunto de todos los vectores en $\mathbb{R}^3$ que son perpendiculares tanto a $u$ como a $v$ forma un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Encuentre la base de este subespacio vectorial.

**2.** En cada caso diga si los vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. Cuando sean dependientes exprese el vector cero como una combinación lineal no nula de los vectores dados.

**a)** $(1,\ 3, 5),\ (4, 2, 3), (6, 1, 2)$
**b)** $(-4, 12), (1, -3)$
**c)** $(4, -1, 2),\ (6, 2, -3), (2, -4, 7)$
**d)** $(6, -7), (1, 3)$

$(4, -1, 2),\ (6, 2, -3), (2, -4, 7)$

**3.** Retomando el ejercicio anterior, diga qué conjunto de vectores forma una base de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$.



**4.** Sea *V* el espacio vectorial de todas las funciones reales de variable real. Determine si las siguientes funciones son linealmente dependientes o independientes.

**a)** $1,\ x,\ x^2$.
**b)** $1,\ \cos^2 x,\ \sin^2 x$.

**5.** Considere dos elementos $u$ y $v$ de un espacio vectorial. Demuestre que $u$ y $v$ son linealmente dependientes si y solo si ellos son proporcionales, es decir, existe un número real $c$ tal que $v = cu$.

**6.** Sea $\Gamma$ el espacio de todas las funciones derivables e integrables, definidas en los reales. En cada caso diga si la transformación es lineal.

**a)** $T_1(f) = f(x + 1)$.
**b)** $T_2(f) = f'(x)$.
**c)** $T_3(f) = f(x) + 1$
**d)** $T_4(f) = \int f(x)\,dx$

**7.** Una base para las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y' - y = 0$ esta dada por las funciones $e^{-2x}, e^{x}$. Exprese la solución de la ecuación diferencial junto a las condiciones iniciales $y(0) = 3,\ y'(0) = 2$, mediante una combinación

lineal adecuada de los elementos de la base (principio de superposición).

**8.** Sea $f(x)$ una función con dominio $\mathbb{R}$. Compruebe que $f(x)$ se puede expresar como la suma de dos funciones $f(x) = g(x) + h(x)$, donde $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ y $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. También demuestre que $g(x)$ es una función par y que $h(x)$ es una función impar.

**9.** Demuestre los siguientes resultados sobre suma de funciones simétricas.

**a)** La suma (o resta) de dos funciones pares es una función par.

**b)** La suma (o resta) de dos funciones impares es una función impar.

**c)** La suma (o resta) de dos funciones periódicas de periodo *p* es una función periódica con periodo *p*.

**10.** Demuestre los siguientes resultados sobre producto de funciones simétricas.

**a)** El producto (o cociente) de dos funciones pares es una función par.

**b)** El producto (o cociente) de una función par y una función impar es una función impar.

**c)** El producto (o cociente) de dos funciones impares es una función par.

**d)** El producto (o cociente) de dos funciones periódicas de periodo *p* es una función periódica con periodo *p*.



**11.** Demuestre los siguientes resultados sobre derivadas e integrales de funciones simétricas.

**a)** Si $f(x)$ es una función par derivable, entonces $f'(x)$ es impar.

**b)** Si $f(x)$ es una función impar derivable, entonces $f'(x)$ es par.

**c)** Si $f$ es una función par integrable, entonces $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ es impar.

**d)** Si $f$ es una función impar integrable, entonces $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ es par.

**12.** Mediante el método de integración por sustitución y la simetría de la función coseno, determine las constantes $a$ y $b$ tales que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{x}{8}dx = a\int_0^b \cos u\, du$.

**13.** Indique como se relacionan las dos integrales $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_{-b}^{-a} f(x)dx$

**a)** si $f(x)$ es impar **b)** si $f(x)$ es par

**14.** Emplee características de periodicidad y simetría, así como el teorema de sustitución para calcular las integrales $\int_0^{6\pi} |\cos 3x|\, dx$ y $\int_{0.5}^{0.5+2\pi} |\sin 2x|\, dx$.

**15.** Realice las siguientes integrales usando el método de integración por partes, tenga presente que en ocasiones se debe aplicar el método más de una vez.

**a)** $\int x \cos x \, dx$ **b)** $\int x^2 \cos x \, dx$ **c)** $\int e^x \cos x \, dx$

**16.** Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales separables

**a)** $(4 + x^2)dy + ydx = 0$

**b)** $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3}{e^y \cos y}$

**17.** Solucione las siguientes ecuaciones diferenciales lineales

**a)** $(4 + x^2)\frac{dy}{dx} + xy = \sqrt{4 + x^2}$ **b)** $y' + 3x^2y = 6x^2$

**18.** Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

**a)** $2y'' + 7y' - 4y = 0$ **b)** $y'' + 8y' + 16y = 0$
**c)** $y'' - 4y' + 5y = 0$ **d)** $y'' - 4y = 0$

**19.** En cada caso diga si las dos funciones son ortogonales (con peso $w(x) = 1$) y encuentre la norma de cada una de ellas.

**a)** $f(x) = 1,\ g(x) = \cos 5x$ $f(x) = 1,\ g(x) = \cos 5x$ en el intervalo $[0, 2]$.

**b)** $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right),\ g(x) = \cos 4\pi x$ en el intervalo $[0, 1]$.

**20.** El teorema 1.42 nos dice que las cinco eigenfunciones halladas en el ejemplo 1.52 deben ser ortogonales (con peso $w(x) = 1$). Determine el producto interno $(f_i, f_j)$ en $[0, \pi]$ para $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ aproximado a la tercera cifra decimal.

También halle la magnitud (con tres cifras decimales) de cada una de éstas cinco funciones. A continuación se aprecian las funciones mencionadas:

$f_1(x) = \text{sen}(0.86947x),\ f_2(x) = \text{sen}(1.76945x),\ f_3(x) = \text{sen}(2.70278x),$
$f_4(x) = \text{sen}(3.65923x),\ f_5(x) = \text{sen}(4.62979x).$

**21.** Compruebe que los eigenvalores del problema regular S-L del ejemplo 1.50 en $[0, 2]$ son $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{2^2},\ n = 1, 2, 3, \cdots$. También asegúrese de que las respectivas eigenfunciones son $f_0(x) = 1$ y $f_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right),\ n = 1, 2, 3, \cdots$

**22.** Verifique que los eigenvalores y las correspondientes eigenfunciones del problema regular S-L del ejemplo 1.51 en el intervalo $[0, 1]$ son respectivamente $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{2^2}$ y $f_n(x) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

**23.** En el ejemplo 1.49 se hallan los eigenvalores y las eigenfunciones del problema regular S-L $f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0$ en el intervalo $[0, \pi]$. Los eigenvalores son $\lambda_n = n^2$, y las respectivas eigenfunciones, son $f_n(x) = \text{sen}(nx)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Generalice este resultado resolviendo el problema regular S-L $f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad f(0) = 0, \quad f(L) = 0$ en el intervalo $[0, L]$. Debe llegar a $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ y $f_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

**24.** En el ejemplo 1.50 se indican los eigenvalores y las eigenfunciones del problema regular S-L $f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < 2, \quad f'(0) = 0, \quad f'(2) = 0$ en el intervalo $[0, 2]$. Generalice este resultado resolviendo el problema regular S-L $f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad f'(0) = 0, \quad f'(L) = 0$ en el intervalo $[0, L]$ . Debe obtener $\lambda_0 = 0, \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ y $f_0(x) = \frac{1}{2}$, $f_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.



**25.** En el ejemplo 1.51 se indican los eigenvalores y las eigenfunciones del problema regular S-L $f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$. Generalice este resultado resolviendo el problema regular S-L $f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad f'(0) = 0, \quad f(L) = 0$ en el intervalo $[0, L]$. Debe concluir que $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{2^2L^2}$ y $f_n(x) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

CAPÍTULO 2

# 2. Ecuaciones de la física matemática

Las ecuaciones diferenciales parciales aparecen en el modelamiento de una variedad de fenómenos de la ciencia y la ingeniería. Este capitulo tiene como objetivo presentar algunos ejemplos de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) y su uso en las aplicaciones a manera de motivación para los capítulos posteriores. En particular, a modo de introducción, se presentan dos ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales y sus métodos de solución. Posteriormente se presentan los fenómenos físicos de la vibración de una cuerda tensada y la de conducción del calor en una dimensión para proceder al modelamiento de cada fenómeno mediante la ecuación de onda y la ecuación del calor respectivamente. A lo largo del capitulo se se hace una breve motivación a las series de Fourier y su importancia en el desarrollo de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales. Este tema será el objeto de estudio del siguiente capitulo.



**Ejemplo 2.1.** Considere la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad (2.1)$$

donde $T(x,t)$ es la función incógnita. Supongamos que $f$ es una función diferenciable en una variable y además verifica la siguiente relación

$$T(x,t) = f(x-t).$$

Mediante la regla de la cadena es posible verificar las siguientes igualdades

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -f'(x-t) \quad y \quad \frac{\partial T}{\partial x} = f(x-t).$$

Al sustituir $\frac{\partial T}{\partial t}$ y $\frac{\partial T}{\partial x}$ en la ecuación (2.1) es posible determinar que la función $T(x,t) = f(x-t)$ es solución de la ecuación diferencial (2.1).

La ecuación (2.1) es conocida como la ecuación de **advección** y tiene importantes aplicaciones en la mecánica de fluidos. En este caso se menciona que la ecuación diferencial (2.1) es de **primer orden lineal y homogénea**. Donde el termino primer orden hace referencia a la mayor derivada en la ecuación diferencial y las palabras lineal homogénea se refiere al hecho que cualquier combinación lineal de las soluciones es también una solución de la ecuación diferencial respectiva.

Las funciones $(x-t)^3, 5sen(x-t)$ y $e^{2(x-t)}$ son ejemplos explícitos de soluciones para la ecuación (2.1).

**Ejemplo 2.2 (Método de las curvas características)** Este método permite solucionar ecuaciones diferenciales parciales con coeficientes no constantes de la forma



$$\frac{\partial T}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad (2.2)$$

donde $f(x,y)$ es una función de dos variables. Para continuar recordemos algunos conceptos de cálculo en varias variables que son relevantes para calcular las soluciones de la ecuación (2.2).

Supongamos que $a = (a_1, a_2)$ es un vector unitario y $T(x,y)$ es una función de dos variables. La derivada dirección de $T$ (en la dirección de $a$) en el punto $(x_1,x_2)$ es dada por $x_1\frac{\partial T}{\partial x}(x_1,x_2) + x_2\frac{\partial T}{\partial y}(x_1,x_2)$.
La derivada direccional mide la razón de cambio de $T$ en el punto $(x_1,x_2)$ cuando se mueve en la dirección de $a$. En consecuencia, si $(a_1,a_2)$ es cualquier vector no nulo, entonces la relación

$$a_1\frac{\partial T}{\partial x}(x_1,x_2) + a_2\frac{\partial T}{\partial y}(x_1,x_2) = 0$$

afirma que $T$ no esta cambiando en la dirección de $(a_1,a_2)$. En este contexto, la ecuación (2.2) se puede interpretar como la derivada direccional de la

función incógnita $T$ en la dirección del vector $(1, f(x,y))$ igualada a 0. Por lo tanto, $T(x,y)$ permanece constante si el punto $(x,y)$ se mueve en la dirección del vector $(1, f(x,y))$. A su vez $(1, f(x,y))$ determina el campo de direcciones para $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. En consecuencia, $T$ es constante sobre las curvas solución de $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. Estas curvas reciben el nombre de **curvas características** asociadas a la ecuación (2.2). Para mayor comodidad, las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ tienen la forma $\psi(x,y) = C$, donde $C$ es arbitrario. Ya que $T$ es constante sobre cada curva, los valores de $T$ dependen únicamente sobre $C$. Por lo tanto, las soluciones de (2.2) tienen la forma

$$T(x,y) = f(\psi(x,y)) \qquad (2.3)$$

Como ilustración del método de las curvas características, supongamos que se desea solucionar la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial x} + x^2 \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \qquad (2.4)$$



Nosotros tenemos que $f(x,y) = x^2$. Al solucionar $\frac{dy}{dx} = x^2$, es posible encontrar las curvas características $y = \frac{x^3}{3} + C$, o $y - \frac{x^3}{3} = C$. Definiendo $\psi(x,y) = y - \frac{x^3}{3}$, la solución general de la ecuación (4) es $T(x,y) = f(y - \frac{x^3}{3})$, donde $f$ es una función arbitraria.

### *2.1 Ecuación de Onda en una dimensión*

Consideremos una cuerda de longitud $L$ sujeta en sus extremos sobre el eje $x$ en $x = 0$ y $x = L$. Supongamos que la cuerda comienza a vibrar desde su posición inicial. Asumiendo que la cuerda vibra únicamente en un plano fijo, sea $O(x,y)$ la función que representa el desplazamiento transversal, donde el tiempo $t \geq 0$ y $x$ es la posición de la cuerda.

En el modelo suponemos que la cuerda tiene densidad constante $\rho$, es perfectamente elástica y la única fuerza es la tensión. Considérese una pequeña porción de la cuerda entre los puntos $A$ y $B$, localizados en $x$ y $x + \Delta x$ como lo indica la figura 2.1.

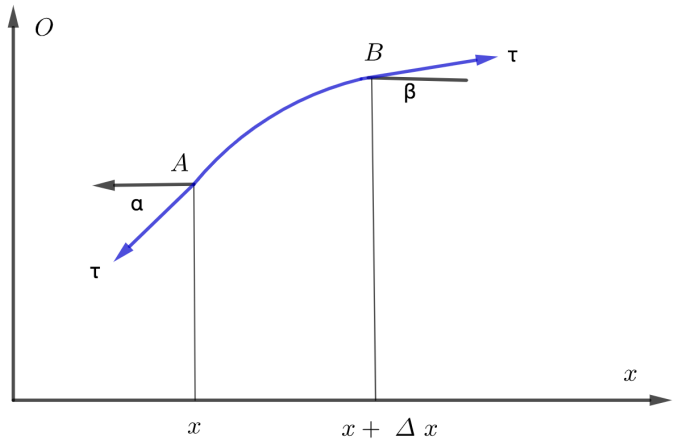





Figura 2.1. Fuerzas actuando en una sección de la cuerda

Al aplicar la segunda ley de Newton a las componentes verticales se tiene la ecuación

$$-\tau sen(\alpha) + \tau sen(\beta) = ma, \qquad (2.5)$$

donde $m$ representa la porción de la masa entre $x$ y $x + \Delta x$, y $a$ es su aceleración.

Entonces, $a = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ y $m = \rho \Delta x$, además para ángulos pequeños $sen(\alpha) \approx \tan(\alpha)$.

Las anteriores consideraciones permiten a partir de (2.5) generar la ecuación

$$-\tau \tan(\alpha) + \tau \tan(\beta) = \rho \Delta x \frac{\partial^2 O}{\partial t^2}. \qquad (2.6)$$

Ya que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $O(x,y)$ es $\frac{\partial o}{\partial x}(x,t)$, entonces $\tan(\alpha) = \frac{\partial o}{\partial x}(x,t)$ y $\tan(\beta) = \frac{\partial o}{\partial x}(x+\Delta x,t)$.

Al sustituir las anteriores igualdades en (2.6) se obtiene

$$\frac{\frac{\partial O}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial O}{\partial x}(x,t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{\tau}\frac{\partial^2 O}{\partial t^2}. \qquad (2.7)$$

En la ecuación (2.7) cuando $\Delta x \to 0$, el lado izquierdo tiende a $\frac{\partial^2 o}{\partial x^2}(x,t)$, por lo tanto se genera la **ecuación de onda en una dimensión** para las vibraciones libres de una cuerda

$$\frac{\partial^2 O}{\partial t^2}(x,t) = c^2\frac{\partial^2 O}{\partial x^2}, \qquad (2.8)$$

donde se tiene que $c^2 = \frac{\rho}{\tau}$. Note que $c$ representa una velocidad, ya que $\tau$ tiene unidades de masa-longitud/$tiempo^2$ y $\rho$ tiene unidades de masa/longitud, así $c^2$ tiene unidades de $longitud^2/tiempo^2$.



La solución más sencilla de la ecuación de onda (8) es

$$O(x,t) = sen\frac{\pi x}{L}cos\frac{\pi ct}{L}, \qquad (2.9)$$

como puede ser verificado directamente. El hecho de que la función de desplazamiento se anule en los extremos motiva a definir **condiciones de frontera** para el modelo de la cuerda vibrante

$$O(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \qquad (2.10)$$
$$O(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \qquad (2.11)$$

Igualmente es útil introducir **condiciones iniciales.** Para la ecuación de onda, que es de segundo orden en el tiempo, se debe verificar

$$O(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \qquad (2.12)$$
$$\frac{\partial O}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \qquad (2.13)$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ representan los desplazamientos iniciales y velocidades a través de la cuerda. Es posible extender la solución (9) del modelo de la cuerda vibrante a una familia de soluciones que tienen la forma

$$O_n(x,t) = sen\frac{n\pi x}{L} cos\frac{n\pi ct}{L}, \quad n = 1,2,3,.... \tag{2.14}$$

Otra familia que también verifica la ecuación (2.8) es

$$O_n(x,t) = sen\frac{n\pi x}{L} sen\frac{n\pi ct}{L}, \quad n = 1,2,3,....$$

La figura 2.2 muestra diferentes formas de la solución de la ecuación (2.14) cuando $n = 3$ y $t$ toma diferentes valores.



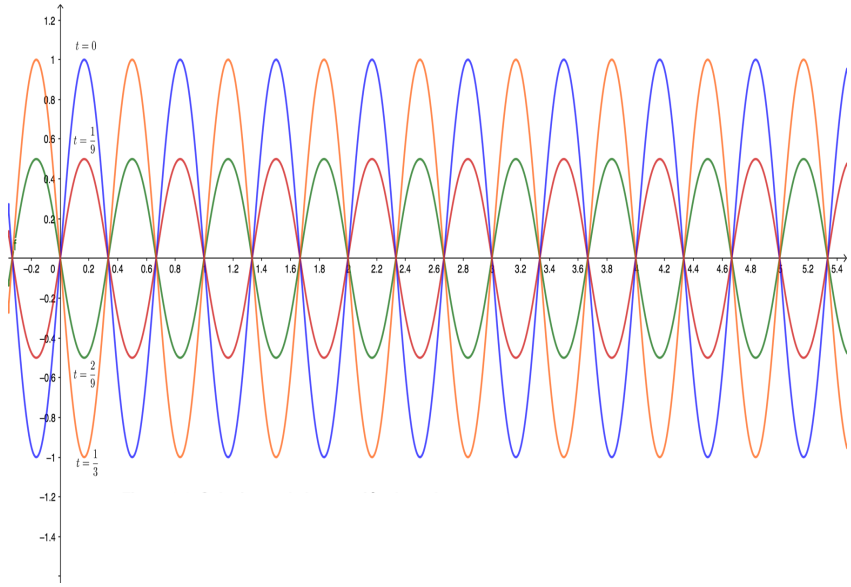



Figura 2.2. Soluciones de la ecuación de onda para n=3

Dando un paso en generalidad es posible asegurar que la solución general de la ecuación diferencial parcial (2.8) es una superposición de soluciones de la forma (2.14),

$$O(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sen\frac{n\pi x}{L} cos\frac{n\pi ct}{L}. \tag{2.15}$$

Al sustituir $t = 0$ en la ecuación (2.15) se genera la condición inicial

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sen \, \frac{n\pi x}{L}. \tag{2.16}$$

### *2.2 Ecuación del calor en una dimensión*

Consideremos el problema de calcular la temperatura de una barra que es sometida a una fuente de calor. Para simplificar un poco la situación, supongamos que la barra tiene secciones transversales uniformes y que la temperatura es homogénea en cada sección. Por lo tanto, al usar un sistema coordenado como lo indica la figura 2.3, es posible garantizar que la temperatura depende de la posición $x$ y el tiempo $t$.

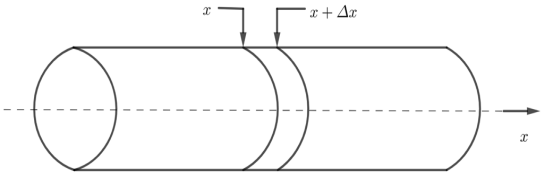





Figura 2.3. Barra conductora de calor

La idea para deducir una ecuación diferencial que gobierne el proceso físico de conducción de calor es aplicar ley de conservación de energía a una sección de la barra que se encuentra entre $x$ y $x + \Delta x$ (figura 2.4). La ley de conservación de energía asegura que la cantidad de calor que ingresa a una región más la energía generada en el interior es igual a la cantidad de calor que sale en adición con la cantidad almacenada.

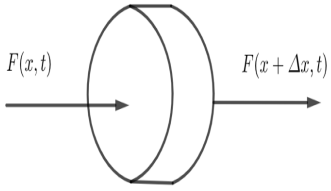



Figura 2.4. Sección transversal de la barra

Sea $F(x,t)$ el flujo de calor en la posición $x$ y el tiempo $t$. Las unidades de medida del flujo son $|F| = \frac{h}{tL^2}$, donde $h$ representa la energía calórica y $L$ la longitud de la barra. La razón de cambio del calor que ingresa en una sección transversal en $x$ es $AF(x,t)$, donde $A$ es el área de la sección transversal. La razón a la que el calor deja la sección transversal es $AF(x+\Delta x,t)$.

La razón de cambio almacenada en una sección transversal de material es proporcional a la variación de la temperatura. Por lo tanto, si $\rho$ es la densidad y $c$ es la capacidad de calor por unidad de masa, es posible aproximar la cantidad de calor almacenado en una sección por

$$\rho c A\, \Delta x\, \frac{\partial T}{\partial t}(x,t), \tag{2.17}$$

donde $T(x,t)$ es la función de la temperatura. Si la generación de calor por unidad de volumen es $G$, entonces la razón a que el calor es generado en la sección es $A\, \Delta x\, G$.



Al aplicar la ley de conservación de la energía a una sección de material de la barra se tiene

$$AF(x,t) + A\, \Delta x\, G = AF(x+\Delta x,t) + \rho c A\, \Delta x\, \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \tag{2.18}$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas en (2.18), se tiene

$$\frac{F(x,t)-F(x+\Delta x,t)}{\Delta x} + G = \rho c\, \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.19}$$

Mediante el proceso de limite, cuando $\Delta x$ decrece, aplicado a la ecuación (2.19) produce la ley de conservación de la energía en la forma

$$-\frac{\partial F}{\partial x} + G = \rho c\, \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.20}$$

Al sustituir la ley de conducción de Fourier $F = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$ en la ecuación (2.20), produce la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{G}{\kappa} = \frac{\rho c}{\kappa}\, \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.21}$$

La cantidad $\frac{\kappa}{\rho c}$ representa la constante de difusividad térmica y se simboliza por $k$. La ecuación del calor que describe la temperatura en una barra de longitud $L$ con propiedades uniformes en las secciones transversales sin generación de calor y extremos aislados esta dada por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \ 0 < t \tag{2.22}$$

En orden para hacer el modelo de conducción calor (2.22) más realista se hace necesario definir **la condición inicial** como

$$T(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L \tag{2.23}$$

donde $f(x)f(x)$ especifica la temperatura inicial en cada punto de la barra. Las **condiciones en la frontera** pueden tomar una variedad de formas. En primer lugar, supongamos que la temperatura en la frontera es constante, por exposición a un baño de agua fría o a un sistema de condensación. Es posible describir estas condiciones por las ecuaciones

$$T(0,t) = T_0, \ T(L,t) = T_1, \quad t > 0, \tag{2.24}$$

En general si $x_0$ representa las coordenadas en la frontera, la condición tiene la forma

$$T(x_0,t) = \alpha(t) \tag{2.25}$$

La ecuación (2.25) es llamada **condición de Dirichlet.**

Otra posibilidad es cuando el flujo de calor es contralado, por lo tanto, la condición queda definida por

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_0,t) = \alpha(t) \tag{2.26}$$

La condición de frontera (2.26) recibe el nombre de **condición de Newmann.**

El ultimo tipo de condición de frontera aparece cuando un extremo de la frontera de la barra es expuesto al aire o algún fluido, entonces la condición esta definida como

$$-\kappa\frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = hT(L,t) - hT(t) \tag{2.27}$$

La anterior ecuación se conoce como **la condición de Robin**.

***Ejercicios.***

1. Suponga que $U(x,t)$ y $V(x,t)$ verifican la siguiente relación:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial t} \quad y \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

2. Demuestre que $U$ y $V$ son soluciones de la ecuación de onda (2.8), donde $c = 1$.

3. Sean $F$ y $G$ funciones diferenciables de una variable. Demuestre que $U(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ es una solución de la ecuación de onda (2.8)

4. Verifique que una solución para la ecuación del calor (2.22) con dominio $-\infty < x < \infty, t > 0$ esta dada por

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{\frac{-x^2}{4kt}}$$

5. Verifique que $U(x,y) = Ln\sqrt{x^2+y^2}$ satisface la ecuación de Laplace

$$U_{xx}^2 + U_{yy}^2 = 0.$$



6. Para que valores de $a$ y $b$, la función $U(x,t) = e^{at} sen(bx)$ es solución de la ecuación del calor (2.22)

7. Calcule la solución general de la ecuación $U_{xt} + 3U_x = 1$.

CAPÍTULO 3

# 3. Series de Fourier

El primer acercamiento al hecho de aproximar una función mediante una serie de funciones se produce en el estudio del Cálculo Diferencial, al considerar la representación de una serie de Taylor alrededor de un punto $x_0$. En este caso los términos de la serie son funciones polinómicas.

Existen otras representaciones de una función en forma de una serie infinita de funciones, en este texto estudiaremos las series de Fourier, en las cuales la serie infinita esta compuesta de funciones trigonométricas.

Además de las sorprendentes características que tienen estas series en sí mismas, o su aplicación en el estudio de sistemas mecánicos o sistemas eléctricos, su importancia radica en la utilidad para resolver ecuaciones diferenciales parciales.



En este capítulo apuntamos a definir las series de Fourier, algunas características y resultados importantes, acompañando cada aspecto con ejemplos cuidadosamente elegidos para facilitar su comprensión.

Las series de Fourier nos permiten representar funciones periódicas que son importantes en las matemáticas aplicadas a la ingeniería.

### *3.1 Desarrollo de f(x) en serie de Fourier.*

**3.1 Definición.** La serie de Fourier de la función $f(x)$ viene dada por la expresión

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right) \tag{3.1}$$

Los coeficientes $a_n$ y $b_n$ se determinan gracias a las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas. Si deseamos hallar el coeficiente

$a_n$, se multiplica la ecuación $(3.1)$ por $\cos\frac{n\pi x}{L}$, luego se integra a cada lado de la igualdad en el intervalo $(-L, L)$, todas las integrales del lado derecho son iguales a cero, excepto una, al hacer esto se llega a la expresión $\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = a_n L.$

Similarmente, si se desea hallar el coeficiente $b_n$ se multiplica la ecuación $(3.1)$ por $\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$, posteriormente se integra en el intervalo $(-L, L)$ , todas las integrales del lado derecho se anulan salvo una, y por tanto $\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx = b_n L.$

Algo muy parecido se realiza para determinar $a_0$, se integra la ecuación $(3.1)$ en el intervalo $(-L, L)$, todas las integrales del lado derecho valen cero, menos la primera, de esta manera se obtiene $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}2L = a_0 L.$ Esto se reúne en el siguiente



**3.2 Teorema.** Los coeficientes de la serie de Fourier (3.1) vienen dados por

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx,\ a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (3.2)$$

Si $f(x)$ es una función periódica con periodo $2L$, algunos resultados referentes a la periodicidad e integración permiten calcular los coeficientes de Fourier sobre cualquier otro intervalo de longitud $2L$, como por ejemplo $(0, 2L)$.

En este texto consideraremos funciones integrables en un intervalo cerrado, tenga presente que el valor de una función integrable en un punto individual no afecta el valor de la integral, por este motivo pueden aparecer funciones integrables que no se definan en algunos puntos del intervalo, por ejemplo, en los extremos.

**3.3 Ejemplo.** Encuentre el desarrollo en serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ (1-x) & 0 \le x < 1. \end{cases}$$

Aplicamos las ecuaciones $(3.2)$ para calcular los coeficientes de Fourier,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^1 (1-x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{(1-x)\operatorname{sen} n\pi x}{n\pi} - \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^1 (1-x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = -\frac{(1-x)\cos n\pi x}{n\pi} - \frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi}$$

Estas integrales nos permiten escribir la serie de Fourier como

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x\right). \qquad (3.3)$$



La siguiente grafica muestra la convergencia de la serie (3.3) para los valores de $n = 5$ y $n = 12$.

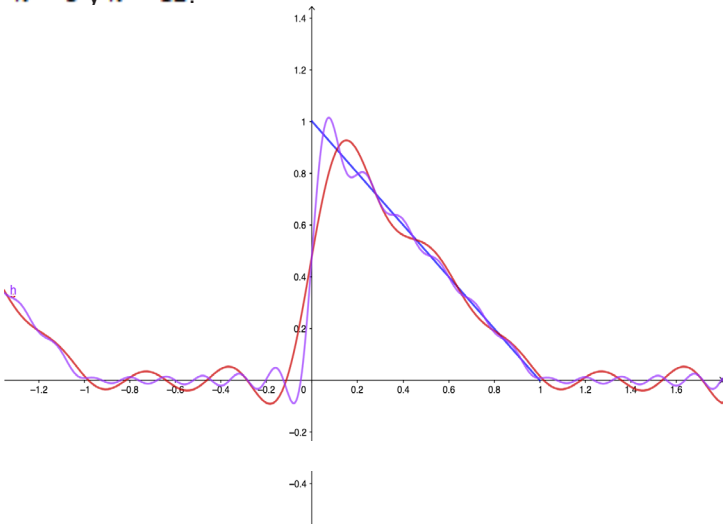



Figura 3.1. Gráfica de la serie de Fouier del ejemplo 3.3

**3.4 Ejemplo.** Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & -1 \le x < 0 \\ x-1 & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

calcular la serie de Fourier asociada a la función $f(x)$.

Aplicamos las ecuaciones $(3.2)$ para calcular los coeficientes de Fourier,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{1}(x-1)\,dx = -1$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\operatorname{sin}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{-1-(-1)^n}{n\pi}.$$

Estas integrales nos permiten escribir la serie de Fourier como

$$f(x) = \frac{-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1-(-1)^n}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x\right) \qquad (3.4)$$



La siguiente grafica muestra la convergencia de la serie (3.4) para los valores de $n = 5$ y $n = 12$.

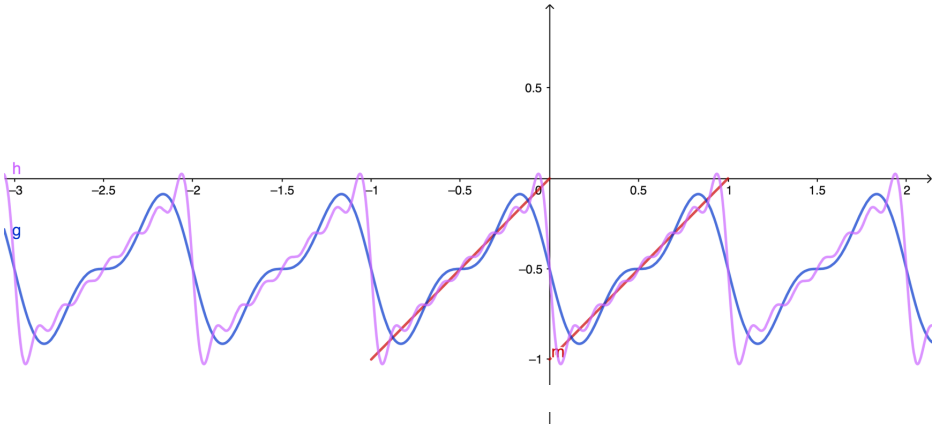



Figura 3.2. Gráfica de la serie de Fouier del ejemplo3.4

**3.5 Ejemplo.** Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -1 \le x < 0 \\ x^2 & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

calcular la serie de Fourier asociada a la función $f(x)$.

Aplicamos las ecuaciones $(3.2)$ para calcular los coeficientes de Fourier,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{7}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{-2-(-1)^n}{n\pi} + \frac{-2+2(-1)^n}{n^3\pi^3}.$$

Estas integrales nos permiten escribir la serie de Fourier como

$$f(x) = \frac{7}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2-(-1)^n}{n\pi} + \frac{-2+2(-1)^n}{n^3\pi^3}\text{sen } n\pi x\right) + \left(\frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}cos\ n\pi x\right) \qquad (3.5)$$

La siguiente grafica muestra la convergencia de la serie (3.5) para los valores de $n = 5$ y $n = 12$.



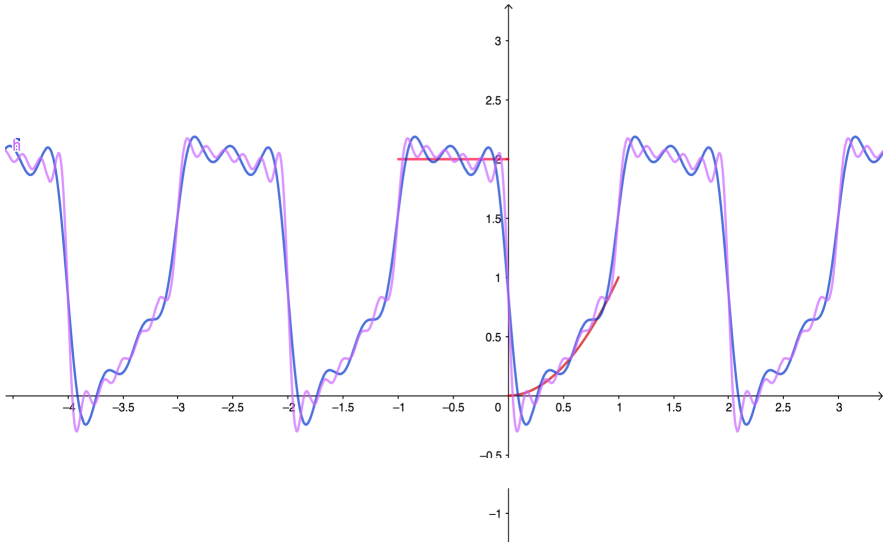



Figura 3.3. Gráfica de la serie de Fouier del ejemplo 3.5

**3.6 Ejemplo.** Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

calcular la serie de Fourier asociada a la función $f(x)$.

Aplicamos las ecuaciones $(3.2)$ para calcular los coeficientes de Fourier,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{5}{6}.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{3(-1)^n-1}{\pi^2 n^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{(-1)^{n+2}-(-1)^n}{n\pi} + \frac{2-2(-1)^n}{n^3\pi^3}.$$

Estas integrales nos permiten escribir la serie de Fourier como

$$f(x) = \frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+2}-(-1)^n}{n\pi} + \frac{2-2(-1)^n}{n^3\pi^3}\operatorname{sen} n\pi x\right) + \left(\frac{3(-1)^n-1}{\pi^2 n^2}\cos n\pi x\right)$$



La siguiente grafica muestra la convergencia de la serie (3.6) para los valores de $n = 2$ y $n = 3$.

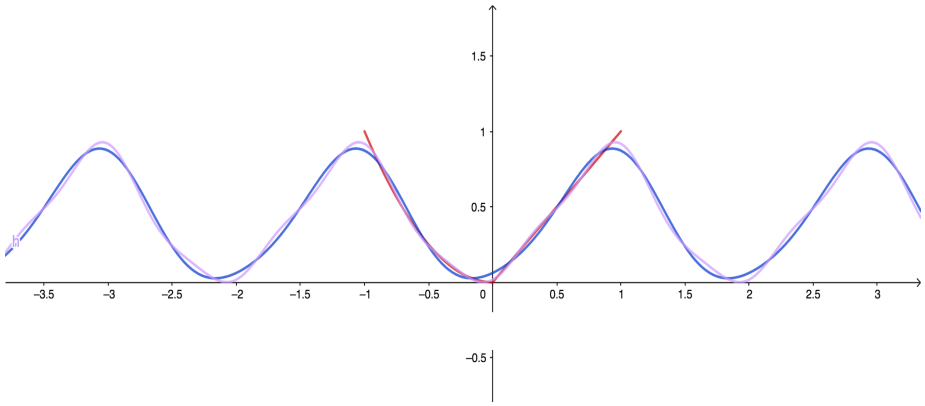



Figura 3.4. Gráfica de la serie de Fouier del ejemplo 3.6

### *3.2 Resultados importantes.*

**3.7 Teorema. (La identidad de Parseval)** Si la función $f(x)$ tiene representación en serie de Fourier dada por $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$, entonces

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^2dx=\frac{{a_0}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2+{b_n}^2\right) \qquad (3.7)$$

El teorema anterior es importante en la teoría de las series de Fourier puesto que permite demostrar varios resultados. Para hacernos una idea de su demostración formal podemos multiplicar los dos lados de la ecuación $(3.1)$ por $f(x)$, integrar en el intervalo $(-L,L)$ y considerar las expresiones de los coeficientes de Fourier $(3.2)$.

**3.8 Ejemplo.** La identidad de Parseval aplicada a la función del ejemplo 3.3 conduce a la expresión: $\frac{1}{3}=\frac{1}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(1-(-1)^n)^2}{n^4\pi^4}+\frac{1}{n^2\pi^2}\right)$.



**3.9 Ejemplo.** La identidad de Parseval aplicada a la función del ejemplo 3.4 conduce a la expresión: $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1-(-1)^n)^2}{n^2\pi^2}\right)$.

**3.10 Ejemplo.** La identidad de Parseval aplicada a la función del ejemplo 3.5 conduce a la expresión: $\frac{21}{5}=\frac{49}{18}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^{2n}}{\pi^4n^4}+(\frac{-2-(-1)^n}{n\pi}+\frac{-2+2(-1)^n}{n^3\pi^3})^2\right)$.

**3.11 Ejemplo.** La identidad de Parseval aplicada a la función del ejemplo 3.6 conduce a la expresión:

$$\frac{8}{15}=\frac{25}{72}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(3(-1)^n-1)^2}{\pi^4n^4}+(\frac{(-1)^{n+2}-(-1)^n}{n\pi}+\frac{2-2(-1)^n}{n^3\pi^3})^2\right).$$

El siguiente teorema nos indica a donde converge una serie de Fourier.

**3.12 Teorema. (Convergencia)** Sea $f(x)$ una función suave por partes, esto es, una función tal que $f(x)$ y $f'(x)$ sean continuas en el intervalo $[-L, L]$ (o en el intervalo $(-L, L)$), excepto tal vez en un número finito de puntos en los cuales estas dos funciones presentan discontinuidades finitas (evitables o de salto). Entonces la serie de Fourier converge a la función $f(x)$ en los puntos de continuidad, y converge al valor promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} \qquad (3.8)$$

en cada punto de discontinuidad, donde $f(x+)$ denota el límite de $f$ en $x$ por la derecha, y $f(x-)$ denota el límite de $f$ en $x$ por la izquierda.

**3.13 Ejemplo.** La función del ejemplo 3.3 es suave por partes en el intervalo $(-1, 1))$ ya que en $x = 0$ presenta una discontinuidad de salto. En este punto el límite por la derecha es uno: $f(0+) = 1$ y el límite por la izquierda es cero: $f(0-) = 0$.



La ecuación $(3.8)$ indica que la serie de Fourier converge a $\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ en $x = 0$, y en los demás puntos converge a la función $f(x)$.

**3.14 Ejemplo.** La función del ejemplo 3.4 es suave por partes en el intervalo $(-1, 1))$ ya que en $x = 0$ presenta una discontinuidad de salto. En este punto el límite por la derecha es uno: $f(0+) = -1$ y el límite por la izquierda es cero: $f(0-) = 0$.

La ecuación $(3.8)$ indica que la serie de Fourier converge a $\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{-1+0}{2} = \frac{-1}{2}$ en $x = 0$, y en los demás puntos converge a la función $f(x)$.

**3.15 Ejemplo.** La función del ejemplo 3.5 es suave por partes en el intervalo $(-1,1))$ ya que en $x=0$ presenta una discontinuidad de salto. En este punto el límite por la derecha es uno: $f(0+)=0$ y el límite por la izquierda es cero: $f(0-)=2$.

La ecuación $(3.8)$ indica que la serie de Fourier converge a $\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{0+2}{2}=\frac{2}{2}=1$ en $x=0$, y en los demás puntos converge a la función $f(x)$.

**3.16 Ejemplo.** La función del ejemplo 3.6 es suave en el intervalo $(-1,1))$ por lo tanto converge a la función $f(x)$ en todos sus puntos.

***3.3 Expansión periódica de una serie de Fourier.***

Supongamos que existe el desarrollo en serie de Fourier de una función $f(x)$ en el intervalo $(-L,L)$, dado por la ecuación $(3.1)$.



El lado derecho de dicha igualdad está conformado por funciones con periodo común igual a $2L$, debido a las propiedades de las funciones periódicas, la expresión $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$ también tiene periodo $2L$.

De esta manera la serie $(3.1)$ no solo suministra un desarrollo de la función $f(x)$ en el intervalo $(-L,L)$, sino que adicional a esto brinda una representación periódica de $f(x)$ con periodo $2L$ en todos los números reales.

Si $f(x)$ y $f'(x)$ satisfacen las hipótesis del teorema de convergencia 3.12 en el intervalo $(-L,L)$ y también se cumple lo siguiente: $f(x)$ es continua por la derecha en $x=-L$, la derivada por la derecha existe en $x=-L$, y condiciones análogas por la izquierda se satisfacen en $x=L$, es posible aplicar el teorema de convergencia 3.12 a la expansión periódica de $f(x)$ para concluir que en los valores $x=\pm L,\pm 3L,\pm 5L,\ldots$ la serie de Fourier $(3.1)$ converge a $\frac{f(L-)+f(-L+)}{2}$.

**3.17 Ejemplo.** La expansión periódica de la función del ejemplo 3.4 es igual a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1 - x, & 0 \le x < 1 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x).$$

Su serie de Fourier:

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos n\pi x + \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x \right)$$

converge a la expansión de $f$ en todos los reales, excepto en $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$.

En $x = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$ la fórmula $(3.8)$ implica que la serie de Fourier converge a $\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{1}{2}$. En $x = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ la serie converge a $\frac{f(1-)+f(-1+)}{2} = 0$. La figura 3.5 representa la extensión periódica de la función $f(x)$ mediante la serie de Fourier correspondiente.



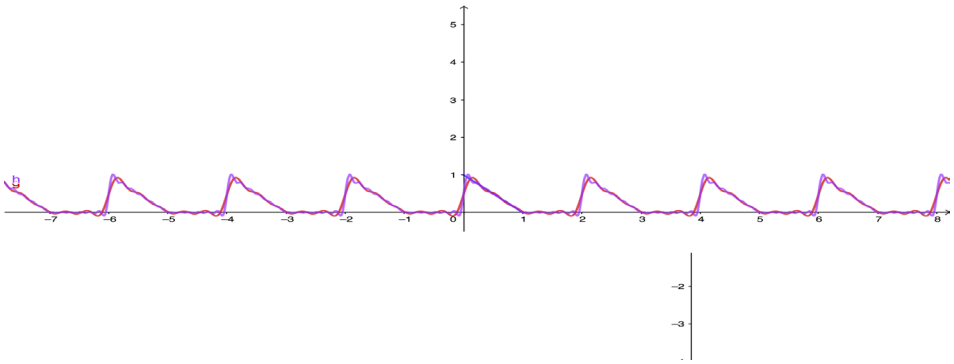



Figura 3.5. Expansión períodica de la serie de Fouier del ejemplo 3.1

**3.18 Ejemplo.** La expansión periódica de la función del ejemplo 3.5 es igual a

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 0 \\ x - 1, & 0 \le x < 1 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x).$$

Su serie de Fourier:

$$\frac{-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-1-(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x \right)$$

converge a la expansión de $f$ en todos los reales, excepto en $x = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \ldots$ .

En $x = 0,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm6, \ldots$ la fórmula $(3.8)$ implica que la serie de Fourier converge a $\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{-1}{2}$. En $x = \pm1,\ \pm3,\ \pm5, \ldots$ la serie converge a $\frac{f(1-)+f(-1+)}{2} = \frac{-1}{2}$. La figura 3.6 representa la extensión periódica de la función $f(x)f(x)$ mediante la serie de Fourier correspondiente.

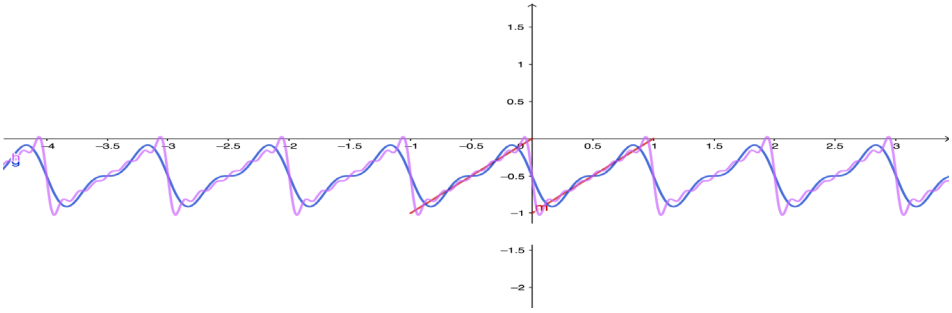



Figura 3.6. Expansión períodica de la serie de Fouier del ejemplo 3.4



**3.19 Ejemplo.** La expansión periódica de la función del ejemplo 3.5 es igual a

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x).$$

Su serie de Fourier:

$$\frac{7}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-2-(-1)^n}{n\pi} + \frac{-2+2(-1)^n}{n^3\pi^3} \operatorname{sen} n\pi x \right) + \left( \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} cos\ n\pi x \right)$$

converge a la expansión de $f$ en todos los reales, excepto en $x = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \ldots$ .

En $x = 0,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm6, \ldots$ la fórmula $(3.8)$ implica que la serie de Fourier converge a $\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = 1$. En $x = \pm1,\ \pm3,\ \pm5, \ldots$ la serie converge a $\frac{f(1-)+f(-1+)}{2} = \frac{3}{2}$.

**3.20 Ejemplo.** La expansión periódica de la función del ejemplo 3.6 es igual a

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x).$$

Su serie de Fourier:

$$\frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+2} - (-1)^n}{n\pi} + \frac{2 - 2(-1)^n}{n^3\pi^3} \operatorname{sen} n\pi x \right) + \left( \frac{3(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} cos\ n\pi x \right)$$

converge a la expansión de $f$ en todos los reales, excepto en $x = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \ldots$.

En $x = 0,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm6, \ldots$ la fórmula $(3.8)$ implica que la serie de Fourier converge a $\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = 0$. En $x = \pm1,\ \pm3,\ \pm5, \ldots$ la serie converge a $\frac{f(1-)+f(-1+)}{2} = \frac{1}{2}$.

### *3.4 Funciones pares e impares.*

Existen dos situaciones en las cuales los coeficientes que definen una serie de Fourier $(3.2)(3.2)$ se pueden calcular de una manera un poco más sencilla. Esos casos se presentan cuando la función $f(x)f(x)$ es par o impar.



En el primer capítulo se mencionaron las definiciones de tales funciones, y algunas características importantes que traemos a colación, se asumen que las funciones son integrables.

- Si $f(x)$ es una función impar entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$
- Si $f(x)$ es una función par entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$

- El producto de una función par y una función impar es una función impar.
- El producto de dos funciones impares es una función par.

Supongamos que $f$ es par, el término constante $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$ equivale a

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx \qquad (3.9)$$

por la simetría de la función $f$.

Como el producto de dos funciones pares es de nuevo una función par, entonces

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (3.10)$$

Finalmente, el producto de una función par y una función impar es una función impar, las propiedades de simetría implican que

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \qquad (3.11)$$

Al reunir esta información de las igualdades 3.9, 3.10 y 3.11 se obtiene la serie de Fourier (**de cosenos**) de una función par:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad (3.12)$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx. \qquad (3.13)$$



Sea $f$ una función impar, el término constante se anula: $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$. Como el producto de una función impar y una par es impar,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0. \qquad (3.14)$$

Por último, el producto de dos funciones impares es una función par, por tanto

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (3.15)$$

De esta manera, por 3.14 y 3.15, la serie de Fourier (**de senos**) de una función impar viene dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}, \qquad (3.16)$$

Siendo

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (3.17)$$

**3.21 Ejemplo.** Determine la serie de Fourier de la función periódica

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 < x < 0 \\ 2-x, & 0 \le x < 2 \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x).$$

Esta función es par, vamos a obtener la serie de **cosenos**. Primero aplicamos la expresión $(3.14)$ para obtener

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \int_0^2 (2-x)dx = 2\,.$$

Al emplear la fórmula $(3.15)$ y el método de integración por partes se tiene:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^2 (2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2(2-x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{2}}{n\pi} - \frac{4\cos\frac{n\pi x}{2}}{n^2\pi^2}\Big|_0^2 = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$

La serie buscada es:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$



La figura 3.7 representa la serie de cosenos de la función $f$.

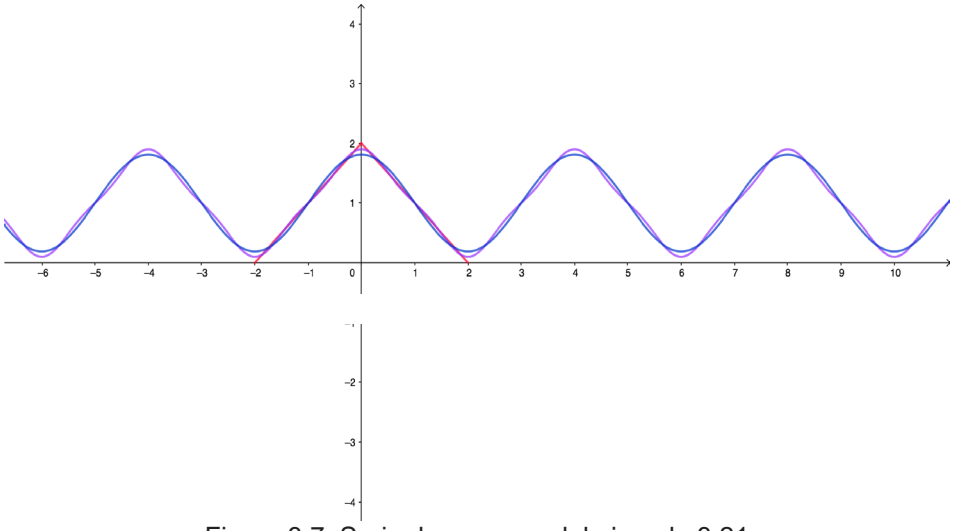



Figura 3.7. Serie de cosenos del ejemplo 3.21

**3.22 Ejemplo.** Calcule la serie de Fourier de la función periódica definida por $f(x) = -x,\ \ si - \pi < x < \pi,\ \ f(x + 2\pi) = f(x).$

Debido a que la función $f$ es impar se encontrará la serie de senos. Nos apoyamos en la fórmula (3.17) y en la integración por partes para determinar los coeficientes

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi -x\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{2x\cos nx}{n\pi} - \frac{2\,\text{sen}\,nx}{n^2\pi}\Big|_0^\pi = \frac{2(-1)^n}{n}$$

. De esto se sigue que la serie es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n}\,\text{sen}\ nx.$$

La figura 3.8 representa la serie de senos de la función $f$.

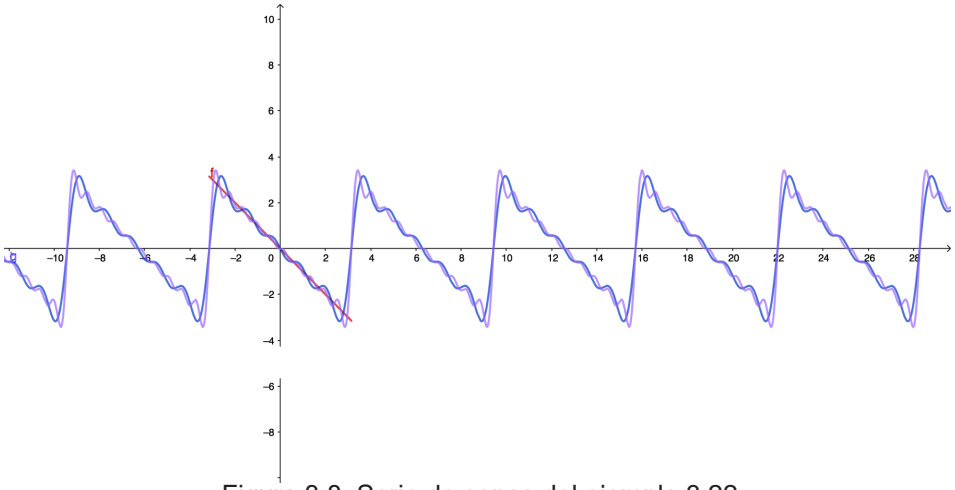


Figura 3.8. Serie de senos del ejemplo 3.22

**3.23 Ejemplo.** Calcule la serie de Fourier de la extensión periódica impar de la función definida por $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$.

Como $f$ es impar se hallará la **serie de senos**. Se emplea la expresión (3.17) para encontrar los coeficientes de la serie de Fourier, se calculan dos integrales por partes y se suman estos resultados,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x \sin nx\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\sin nx\, dx\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\left(-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nx\right)\Big|_0^{\pi/2} + \left(-\frac{(\pi - x)}{n}\cos nx - \frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nx\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right)$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\left(-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}.$$

La serie buscada es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\operatorname{sen}\ nx.$$

**3.24 Ejemplo.** Encuentre la serie de Fourier de la extensión periódica par de la función definida por $f(x) = 2x - x^2, \quad 0 < x < 2.$

La función $f$ es par, por consiguiente, se va a determinar la serie de cosenos.

La expresión $(3.14)$ nos permite hallar



$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 2x - x^2 dx = \frac{4}{3}.$$

La fórmula $(3.15)$ y el método de integración por partes implica lo siguiente

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 (2x - x^2)\cos\frac{n\pi x}{2} dx = (2x - x^2)\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2} + (2 - 2x)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$+\frac{16}{n^3\pi^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{8[(-1)^{n+1} - 1]}{n^2\pi^2}.$$

De esta manera, la serie de Fourier viene dada por

$$f(x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8[(-1)^{n+1} - 1]}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

La figura 3.9 representa la serie de senos de la función $f$.

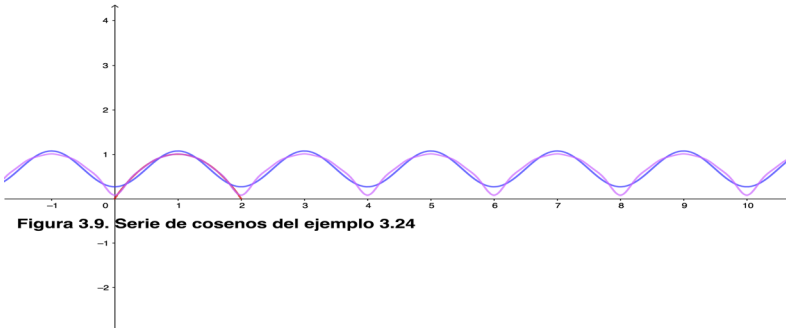



Figura 3-9. Serie de cosenos del ejemplo 3.24

En la resolución de las EDP hay que derivar término a término una serie de Fourier, el siguiente teorema indica cuando es permitido realizar este procedimiento.

**3.25 Teorema.** Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[-L, L]$ tal que $f(-L) = f(L)$, si además $f'(x)$ es suave por partes en $[-L, L]$, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ puede ser derivada término a término, el resultado es la serie de Fourier de $f'(x)$, la cual converge a $f'(x)$ en los valores de $x$ donde $f''(x)$ exista.



Si el intervalo es $[0, L]$ la función debe ser tal que $f(0) = f(L)$ y $f'(x)$ es suave por partes en $[0, L]$, entonces la serie de Fourier de senos (o cosenos) puede ser derivada término a término, y el resultado es la serie de Fourier de cosenos (o senos) de $f'(x)$ la cual converge a $f'(x)$ en aquellos puntos donde $f''(x)$ exista.

**3.26 Teorema.** Considere un problema regular de Sturm-Liouville (capítulo 1 ecuaciones $(6), (7), (8)$) en el intervalo $[a, b]$, entonces para cada eigenvalor $\lambda_n$ solo existe una única eigenfunción $f_n(x)$ linealmente independiente. Además, el conjunto de eigenfunciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es completo, es decir, cualquier función suave por partes $g(x)$ definida en $[a, b]$ posee una única expansión en una **serie de Fourier generalizada** de la forma $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x), \ a \leq x \leq b$, cuyos coeficientes $c_n$ vienen dados por:

$$c_n = \frac{\int_a^b g(x) f_n(x) w(x) dx}{\int_a^b f_n^2(x) w(x) dx}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.18}$$

Esta serie generalizada converge puntualmente a la función $g(x)$ en sus puntos de continuidad, y converge al valor $\frac{g(x-)+g(x+)}{2}$ en los puntos de discontinuidad.

***Ejercicios.***

**1.** Diga a donde converge la serie de Fourier

**a)** de la función del ejemplo 3.21.

**b)** de la función del ejemplo 3.22.

**2.** Calcule la serie de Fourier de la función $f(x)$. También diga a donde converge la serie $f(x) = \begin{cases} \pi, & si - \pi < x < 0 \\ \pi - x, & si\ 0 \leq x < \pi \end{cases}$ $f(x + 2\pi) = f(x).$

**3.** Lo mismo que en el ejercicio 2



. $f(x) = \begin{cases} 0, & si - 1 < x < 0 \\ x^2, & si\ 0 \leq x < 1 \end{cases}$ $f(x + 2) = f(x).$

**4.** Usando la simetría de la función determine la serie de cosenos o la serie de senos de la función

$f(x) = x|x|,\ si - \pi < x < \pi.$ $f(x) = x|x|,\ si - \pi < x < \pi.$

**5**. Lo mismo que el ejercicio 4. $f(x) = \begin{cases} 0, & si\ -\pi < x < -\pi/2 \\ x + \frac{\pi}{2}, & si\ -\pi/2 \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - x, & si\ 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & si\ \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

**6.** Lo mismo que el ejercicio 4. $f(x) = \begin{cases} -1, & si\ -2 < x < -1 \\ -x, & si\ -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & si\ 1 < x < 2 \end{cases}$

**7. a)** Halle la serie de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 0, & si - \pi < x < 0 \\ \pi, & si\ 0 \leq x < \pi \end{cases}$ $f(x + 2\pi) = f(x).$

**b)** Note que la función $f(x)$ es continua en $x = \frac{\pi}{2}$. El teorema de la convergencia 2.12 implica que la serie encontrada en la parte **a)** converge a $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Use este hecho para demostrar: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

**8. a)** Halle la serie de Fourier de $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ -2 < x < 0 \\ x, & si\ 0 \leq x < 2 \end{cases}$ $f(x+4) = f(x)$.

**b)** Observe que la $f(x)$ es continua en $x = 0$. El teorema de la convergencia 2.12 implica que la serie encontrada en la parte **a)** converge a $f(0)$. Utilice este resultado para probar: $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

**9.** Si $f(x)$ es una función impar en el intervalo $(-L, L)$ emplee la identidad de Parseval (teorema 2.10) para demostrar la ecuación $\frac{2}{L}\int_0^L [f(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2$



**10.** Aplique el resultado del ejercicio anterior a la función impar del ejemplo 2.16 para demostrar la igualdad $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

**11.** Demuestre que si $f_1(x)$ tiene periodo $p$, $f_2(x)$ tiene periodo $\frac{p}{2}$, $f_3(x)$ tiene periodo $\frac{p}{3}$, …, $f_n(x)$ tiene periodo $\frac{p}{n}$, entonces la combinación lineal $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)$ tiene periodo $p$.

CAPÍTULO 4

# 4. Ecuación de onda.

La situación más sencilla que nos podemos imaginar para contextualizar la situación es la cuerda de una guitarra que es tensada y se fija en sus extremos, luego se desplaza levemente. En algún instante que se toma como $t = 0$, la cuerda se libera y naturalmente ha de vibrar en un plano. Al resolver la EDP que modela este comportamiento se determina una función que depende tanto de su ubicación como del tiempo: $u(x, t)$, esta expresión se conoce como la función de posición.



Si bien en el comentario anterior se ha elegido la cuerda de una guitarra para ilustrar el uso de la ecuación de onda, tal EDP también es apropiada al considerar el comportamiento de ondas en un medio continuo, como por ejemplo el análisis de ondas acústicas, electromagnéticas, sísmicas, entre otras.

Un desarrollo propio de la física que considera aspectos tales como la elasticidad, tensión, movimientos transversales en un plano vertical, la segunda ley de Newton, etc, permite concluir que la EDP de onda unidimensional es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La expresión $c^2$ se usa para representar la constante positiva: $c^2 = \frac{T}{\rho}$, siendo $T$ la tensión de la cuerda y $\rho$ la masa de la cuerda no flexionada por unidad de longitud, de manera que $c$ posee unidades de velocidad (*longitud/ tiempo*).

En este capítulo estudiaremos una manera de resolver la típica ecuación diferencial parcial de onda con extremos fijos, pero también otras variantes interesantes que resultan al cambiar las condiciones de frontera.

### *4.1 Cuerda vibrante con extremos fijos.*

El ejemplo más característico de la ecuación de onda surge cuando los extremos de la cuerda están anclados, esto se aprecia en las condiciones de frontera (CF). Las condiciones iniciales (CI) dan información sobre la función y su derivada parcial respecto a la variable temporal cuando esta es cero: $t = 0$.

A continuación, resolvemos un problema de este tipo, que se apoya en la teoría desarrollada en capítulos anteriores.

**4.1 Ejemplo.** Solucionar el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < \pi,\ t > 0 \qquad \text{(EDP)} \qquad (4.1)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \qquad (4.2)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & si \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & si\ \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, \quad u_t(x,0) = 1 \qquad \text{(CI)} \qquad (4.3)$$



Para resolver este ejercicio empleamos un método conocido como el de las **variables separables**.

Suponga que la solución viene dada por el producto de una función de $x$ y otra función de $t$, esto es,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

La EDP (4.1) equivale a la expresión $X(x)T''(t) = 4X''(x)T(t)$ o con una notación más sencilla $XT'' = 4X''T$. Al hacer transposición de términos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{4T}.$$

El lado izquierdo de la anterior ecuación depende de $x$ mientras que el lado derecho depende de $t$, por tanto, para que se tenga la igualdad los dos términos deben ser iguales a la misma constante, que denotaremos $-\lambda$, obteniendo la expresión:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{4T} = -\lambda \qquad (4.4)$$

de $(4.4)$ se obtiene la EDO de segundo orden

$$X'' + \lambda X = 0.$$

Ahora analizamos las condiciones de frontera $(4.2)$.

Como $u(x,t) = X(x)T(t)$, la primer CF $u(0,t) = 0$ se traduce en $X(0)T(t) = 0$, y por tanto $X(0) = 0$. Similarmente la segunda CF $u(\pi,t) = 0$ implica $X(\pi)T(t) = 0$, y así $X(\pi) = 0$.

Reuniendo los anteriores pasos, debemos hallar los valores de $\lambda$ y las funciones $X(x)$ que satisfacen



$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0 \qquad (4.5)$$

La EDO (4.5) es precisamente el problema regular de Sturm-Liouville analizado en el ejemplo 1.49, sus eigenvalores son $\lambda_n = n^2 \lambda_n = n^2$ y sus correspondientes eigenfunciones, salvo múltiplos constantes, son

$$X_n(x) = \operatorname{sen}(nx), \; n = 1, 2, 3, \cdots.$$

La ecuación $(4.4)$ también da lugar a la siguiente EDO de segundo orden en términos de la variable temporal: $T'' + 4\lambda T = 0 T'' + 4\lambda T = 0$, y como sabemos que $\lambda_n = n^2$ tenemos $T'' + 4n^2 T = 0 \Leftrightarrow T'' + (2n)^2 T = 0, \; n = 1, 2, 3, \cdots$ su ecuación auxiliar es $r^2 + (2n)^2 = 0 \Rightarrow r = \pm 2ni$, por tanto,

$$T_n(t) = a_n \cos(2nt) + b_n \operatorname{sen}(2nt).$$

El método de las variables separables nos dice que las soluciones buscadas son de la forma

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \operatorname{sen}(nx)\,[a_n \cos(2nt) + b_n \operatorname{sen}(2nt)],$$

hemos determinado las funciones $X_n(x)$ y $T_n(t)$ de manera que verifiquen la EDP $(4.1)$ y las CF $(4.2)$. El principio de superposición indica que cualquier combinación lineal finita de la forma

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen}(nx)\,[a_n \cos(2nt) + b_n \operatorname{sen}(2nt)]$$

también satisface la EDP $(4.1)$ y las CF $(4.2)$. Solo resta expresar las dos condiciones iniciales $(4.3)$ como combinaciones lineales finitas de las funciones $u_n(x,t)$, pero esto es imposible, para solucionar esto recordamos que las dos funciones que aparecen en las CI son suaves por partes en $[0,\pi]$, el teorema 3.26 nos dice que estas funciones tienen una única expansión en serie (infinita) de Fourier como combinación de las eigenfunciones, en otras palabras, para satisfacer las CI $(4.3)$ calculamos las series de Fourier de las funciones que allí aparecen.



Sea

$$u(x,t) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(nx)\,[a_n \cos(2nt) + b_n \operatorname{sen}(2nt)] \qquad 4.6)$$

entonces

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & si \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & si \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx),$$

esto es encontrar la serie de Fourier de senos de la función $u(x,0)$, pero esto se hizo en el ejemplo 3.23 llegando a $a_n = \frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$. Empleando la segunda CI $(4.3)$: $u_t(x,0) = 1$, derivando término a término la expresión $(4.6)$ con respecto a $t$ y evaluando tal derivada en $t = 0$ se deduce que

$$u_t(x,0) = 1 = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \operatorname{sen}(nx) \Rightarrow 2nb_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi} \Rightarrow$$
$$b_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}.$$

Hemos llegado al fin a la solución del problema

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(nx)\left(\frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\cos(2nt) + \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\operatorname{sen}(2nt)\right)$$

La figura 4.1 muestra el comportamiento de la función $u(x,t)$ cuanto $t = 0.6$.

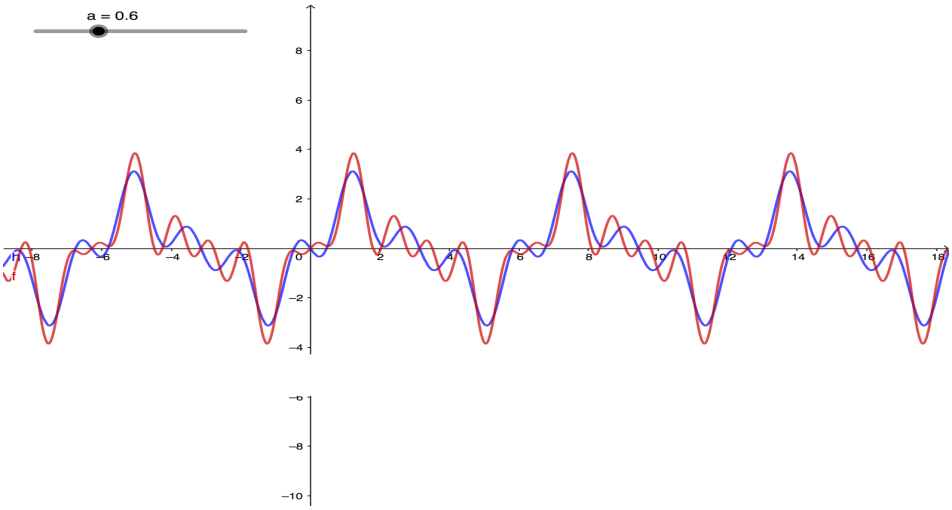





Figura 4.1. Ecuación de onda del ejemplo 4.1 cuando t=0.6.

La figura 4.2 muestra el comportamiento de la función $u(x,t)$ cuanto $t = 0.6$.

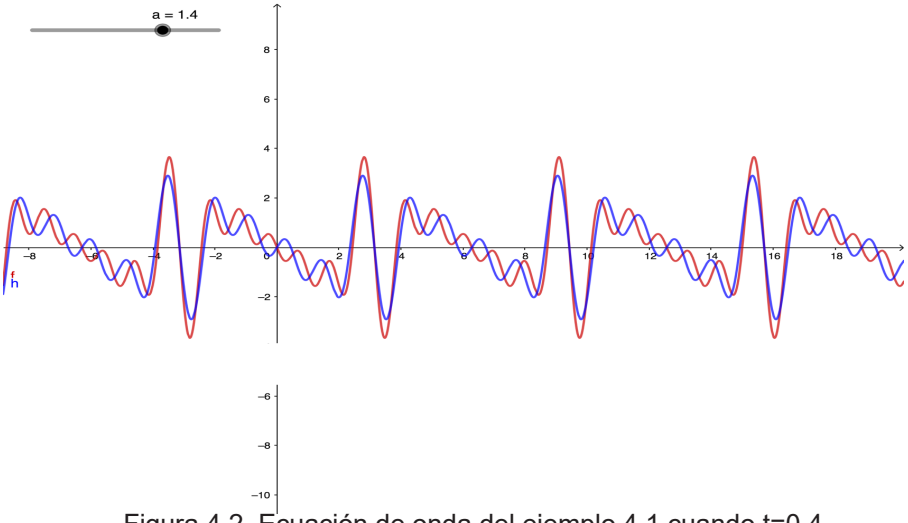



Figura 4.2. Ecuación de onda del ejemplo 4.1 cuando t=0.4.

**4.2 Ejemplo.** Resolver el problema de ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < \pi,\ t > 0 \qquad \text{(EDP)} \qquad (4.7)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \qquad (4.8)$$

$$u(x,0) = 8\text{sen}(2x) - 6\text{sen}(3x), \quad u_t(x,0) = 16\text{sen}(4x) \qquad \text{(CI)} \qquad (4.9)$$

El método de las variables separables nos conduce a la ecuación (4.4), que junto a las condiciones de frontera nos dirige al problema regular de Sturm-Liouville (4.5), como en el ejercicio anterior empleamos el resultado del ejemplo 3.23, sus eigenvalores son $\lambda_n = n^2$ y sus eigenfunciones

$$X_n(x) = \text{sen}(nx),\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Como en el ejercicio anterior, la ecuación $(4.4)$ origina la EDO de segundo orden:

$$T'' + 4\lambda T = 0$$

cuyas soluciones son

$$T_n(t) = a_n \cos(2nt) + b_n \text{sen}(2nt).$$



Las apreciaciones realizadas en el ejemplo 4.1 nos permiten expresar la solución de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(nx)\,[a_n \cos(2nt) + b_n \text{sen}(2nt)] \qquad (4.10)$$

Evaluamos $(4.10)$ en $t = 0$ para obtener

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx),$$

la primer CI afirma que $u(x,0) = 8\text{sen}(2x) - 6\text{sen}(3x)$, resulta que esta expresión si es combinación lineal de las eigenfunciones $X_n(x) = \text{sen}(nx)$, algo similar sucede con la segunda CI, de manera que en este ejercicio la solución no se escribe como una serie infinita.

Calculando los coeficientes de la serie de Fourier de senos:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [8\text{sen}(2x) - 6\text{sen}(3x)]\,\text{sen}\,nx\,dx \qquad (4.11)$$

la integral $(4.11)$ es igual a cero para $n \neq 2$ y $n \neq 3$ por la ortogonalidad de las eigenfunciones, para $n = 2$ tenemos:

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [8\text{sen}(2x) - 6\text{sen}(3x)]\sin 2x\, dx$$

$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 8\,\text{sen}^2\, 2x\, dx = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi} 1 - \cos 4x\, dx = 8,$ similarmente, para $n = 3$:

$a_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [8\text{sen}(2x) - 6\text{sen}(3x)]\sin 3x\, dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 6\sin^2 3x\, dx \Rightarrow$

$a_3 = -\frac{6}{\pi}\int_0^{\pi} 1 - \cos 6x\, dx = -6.$

Derivamos término a término y evaluamos en $t = 0$, la expresión $(4.10)$, para llegar a

$u_t(x,0) = 16\text{sen}(4x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n\,\text{sen}(nx)$

$\Rightarrow 2nb_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 16\sin 4x \sin nx\, dx,$

esta integral vale cero para $n \neq 4$, por tanto

$$2 \cdot 4b_4 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 16\sin^2 4x\, dx = \frac{16}{\pi}\int_0^{\pi} 1 - \cos^2 8x\, dx = 16 \Rightarrow 8b_4 = 16 \Rightarrow b_4 = 2$$



La solución es

$u(x,t) = 8\sin 2x \cos 4t - 6\sin 3x \cos 6t + 2\sin 4x\, \text{sen}\, 8t$

La figura 4.3 muestra el comportamiento de la función $u(x,t)$ cuanto $t = 0.8$.

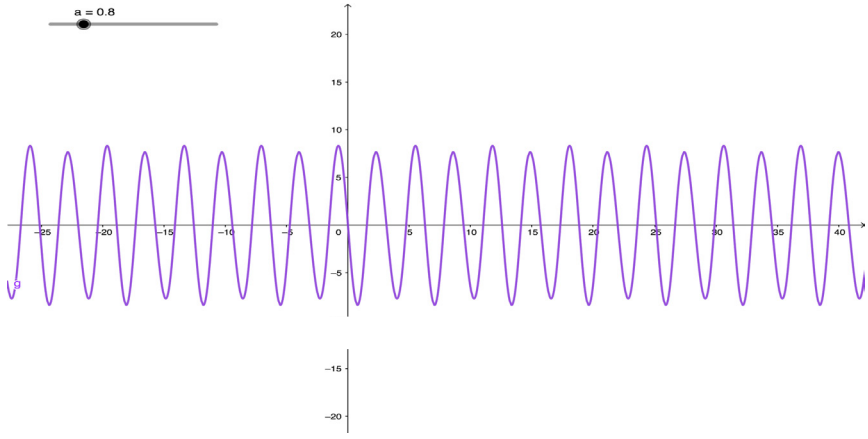



Figura 4.3. Ecuación de onda del ejemplo 4.2 cuando t=0.8

### *4.2 Cuerda vibrante con extremos libres.*

Los problemas que estudiaremos en esta sección son muy similares a los de la sección anterior, sin embargo, se introduce una pequeña modificación en las condiciones de frontera, en la sección anterior se consideraban los extremos fijos, es decir, la función solución $u(x,t)$ vale cero en los extremos del intervalo considerado. A continuación, se resuelven problemas que cambian esta condición por una que anula la derivada parcial con respecto a la variable espacial en los extremos del intervalo.

**4.3 Ejemplo.** Solucionar el problema de ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \qquad \text{(EDP)} \qquad (4.12)$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(2,t) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \qquad (4.13)$$

$$u(x,0) = 2x - x^2, \quad u_t(x,0) = 1, \quad 0 < x < 2 \qquad \text{(CI)} \qquad (4.14)$$

Empleamos de nuevo el método de las variables separables, asumimos que la solución es de la forma: $u(x,t) = X(x)T(t)$. La EDP (4.12) implica la expresión $XT'' = 9X''T$,



de esta ecuación se sigue:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{9T} = -\lambda. \qquad (4.15)$$

La ecuación $(4.15)$ y las CF $(4.13)$ conducen al problema regular de Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < 2, \quad X'(0) = 0, \quad X'(2) = 0. \qquad (4.16)$$

en el primer capítulo, ejemplo 1.50, se enuncian sus eigenvalores: $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{2^2}$ y sus eigenfunciones:

$$f_0(x) = 1 \text{ y } f_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \; n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Al emplear los eigenvalores en la expresión $(4.15)$ se obtiene la EDO de segundo orden en términos de la variable temporal: $T'' + 9\lambda_n T = 0$, para $\lambda_0 = 0$ esta expresión queda $T'' = 0 \Rightarrow T_0(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0 t}{2}$, y para los otros eigenvalores se

tiene $T'' + 9\lambda_n T = 0 \Leftrightarrow T'' + \left(\frac{3n\pi}{2}\right)^2 T = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n \cos\frac{3n\pi t}{2} + b_n \sin\frac{3n\pi t}{2}$.

Como $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n$ entonces la solución viene dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{3n\pi t}{2}\right) + \frac{b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{3n\pi t}{2}\right)$$

evaluando la solución en $t = 0$ y utilizando la primer CI de $(4.14)$ se tiene

$$u(x,0) = 2x - x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right),$$

en otras palabras, debemos calcular la serie de Fourier de cosenos de la función $2x - x^2$ en el intervalo $[0,2]$, esto se realizó en el ejemplo 3.24 donde se obtuvo $a_0 = \frac{4}{3}$, $a_n = \frac{8[(-1)^{n+1}-1]}{n^2\pi^2}$.

Finalmente derivamos $u(x,t)$ término a término con respecto a $t$, evaluamos en $t = 0$ y obtenemos

$$u_t(x,0) = 1 = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n\pi b_n}{2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right),$$



hallamos otra serie coseno Fourier:

$$b_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 1dx = 2, \quad \frac{3n\pi b_n}{2} = \frac{2}{2}\int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = 0 \Rightarrow b_n = 0.$$

La solución buscada es

$$u(x,t) = \frac{2}{3} + t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8[(-1)^{n+1}-1]}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{3n\pi t}{2}\right).$$

La figura 4.4 muestra el comportamiento de la función $u(x,t)$ cuanto $t = 0.8$.

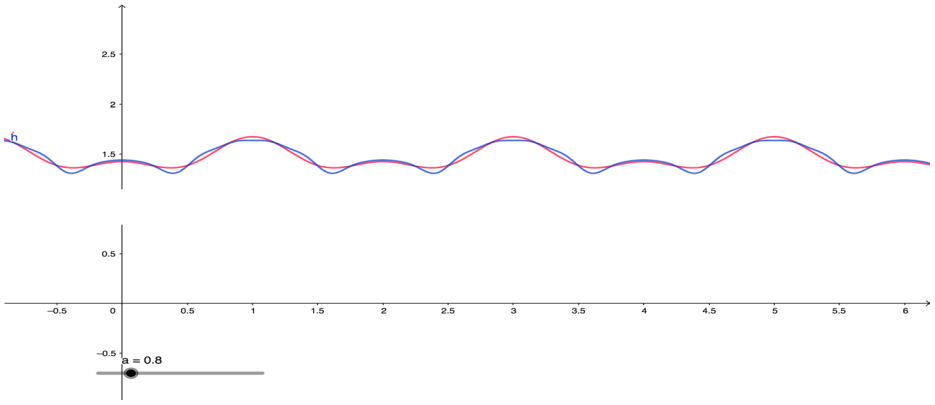



Figura 4.4. Ecuación de onda del ejemplo 4.3 cuando t=0.8

A continuación, realizamos un ejercicio muy similar al anterior, en el cual las condiciones iniciales son combinaciones lineales de las eigenfunciones, y por tanto la solución no presenta una serie infinita.

**4.4 Ejemplo.** Resolver el problema de valores iniciales con condiciones de frontera



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0 \qquad \text{(EDP)} \qquad 4.17$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(2,t) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \qquad 4.18$$

$$u(x,0) = 3 - 2\cos(5\pi x), \quad u_t(x,0) = \pi\cos(3\pi x), \quad 0 < x < 2 \qquad \text{(CI)} \qquad 4.19$$

En su estructura este ejercicio es muy similar al ejemplo 4.3. Podemos repetir el procedimiento del ejemplo anterior para decir que la solución viene dada por $u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{3n\pi t}{2}\right) + \frac{b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{3n\pi t}{2}\right)$

Como antes evaluamos en $t = 0$ y empleamos la primer CI de $(4.19)$ para obtener

$$u(x,0) = 3 - 2\cos(5\pi x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Por la ortogonalidad de las eigenfunciones, todos los coeficientes de la serie coseno de Fourier se anulan excepto dos, a saber, el primero y el décimo:

$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 (3 - 2\cos 5\pi x)\,dx = 6$, $a_{10} = \frac{2}{2}\int_0^2 (3 - 2\cos 5\pi x)\cos 5\pi x\,dx = -2\int_0^2 \cos^2(5\pi x)dx \Rightarrow a_{10} = -\int_0^2 (1 + \cos 10\pi x)\,dx = -2.$

Todos los demás $a_n = 0$.

Al derivar $u(x,t)$ término a término con respecto a $t$, evaluar en $t = 0$ y emplear la segunda CI de $(4.19)$ se tiene:

$$u_t(x,0) = \pi\cos(3\pi x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n\pi b_n}{2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right),$$

recordemos que

$\frac{3n\pi b_n}{2} = \frac{2}{2}\int_0^2 \pi\cos(3\pi x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$, todos los $b_n$ son cero (por la ortogonalidad de las eigenfunciones) excepto $b_6$, hacemos $n = 6$ en la ecuación anterior:

$$9\pi b_6 = \pi\int_0^2 \cos^2(3\pi x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^2 (1 + \cos(6\pi x))dx = \pi \Rightarrow b_6 = \frac{1}{9},$$

de manera que la solución del problema es

$$u(x,t) = 3 + \frac{1}{9}\cos(3\pi x)\sin(9\pi t) - 2\cos(5\pi x)\cos(15\pi t).$$



### *4.3 Cuerda vibrante con otros tipos de condiciones de frontera.*

**4.5 Ejemplo.** Solucionar el problema de ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \qquad \text{(EDP)} \qquad (4.20)$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \qquad (4.21)$$

$$u(x,0) = \pi, \quad u_t(x,0) = 4\pi\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - 2\pi\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right), \quad 0 < x < 1 \qquad \text{(CI)} \qquad (4.22)$$

Empleamos el método de variables separables, sea: $u(x,t) = X(x)T(t)$. La EDP (17) implica $XT'' = X''T$, por consiguiente,

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda. \qquad (4.23)$$

La expresión (4.23) y las CF (4.21) conducen al problema regular de Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < 1, \quad X'(0) = 0, \quad X(1) = 0. \tag{4.24}$$

El ejemplo 1.51 nos dice que los eigenvalores son: $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{2^2}$ y sus eigenfunciones:

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

La expresión (4.23) y los eigenvalores implican la EDO de segundo orden en la variable $t$:

$$T'' + \lambda T = 0 \Leftrightarrow$$
$$T'' + \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 T = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n \cos\frac{(2n-1)\pi t}{2} + b_n \sin\frac{(2n-1)\pi t}{2}.$$

Como $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n$ entonces la solución es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\left(a_n \cos\frac{(2n-1)\pi t}{2} + b_n \sin\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right) \tag{4.25}$$



Para obtener los coeficientes que aparecen en la solución dada por (4.25) aplicamos el resultado de la serie generalizada de Fourier, teorema 3.26. De esta manera:

$$u(x,0) = \pi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \Rightarrow a_n = \frac{\int_0^1 \pi\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)dx}{\int_0^1 \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)dx} = \frac{\frac{2(-1)^{n+1}}{2n-1}}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Siguiendo el mismo razonamiento calculamos los coeficientes $b_n$. Derivamos respecto a $t$ la ecuación (4.25), hacemos $t = 0$, se obtiene:

$$u_t(x,0) = 4\pi\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - 2\pi\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\pi b_n}{2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

por tanto,

$$\frac{(2n-1)\pi b_n}{2} = \frac{\int_0^1 \left(4\pi\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - 2\pi\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)dx}{\int_0^1 \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)dx} \tag{4.26}$$

todos los coeficientes $b_n$ son iguales a cero excepto dos, a saber, $n = 2$ y $n = 3$.

Si $n = 2 \Rightarrow (4.26)$ equivale a

$$\frac{3\pi b_2}{2} = -4\pi \int_0^1 \cos^2\left(\frac{3\pi x}{2}\right) dx = -2\pi \Rightarrow b_2 = -\frac{4}{3}.$$

Si $n = 3 \Rightarrow (4.26)$ implica $\frac{5\pi b_3}{2} = 8\pi \int_0^1 \cos^2\left(\frac{5\pi x}{2}\right) dx = 4\pi \Rightarrow b_3 = \frac{8}{5}$.

Al reunir todo esto se obtiene la solución del problema:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi t}{2}\right)$$
$$+\frac{16}{5}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi t}{2}\right) - \frac{4}{3}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi t}{2}\right).$$

La figura 4.5 muestra el comportamiento de la función $u(x,t)$ cuanto $t = 1.2$.

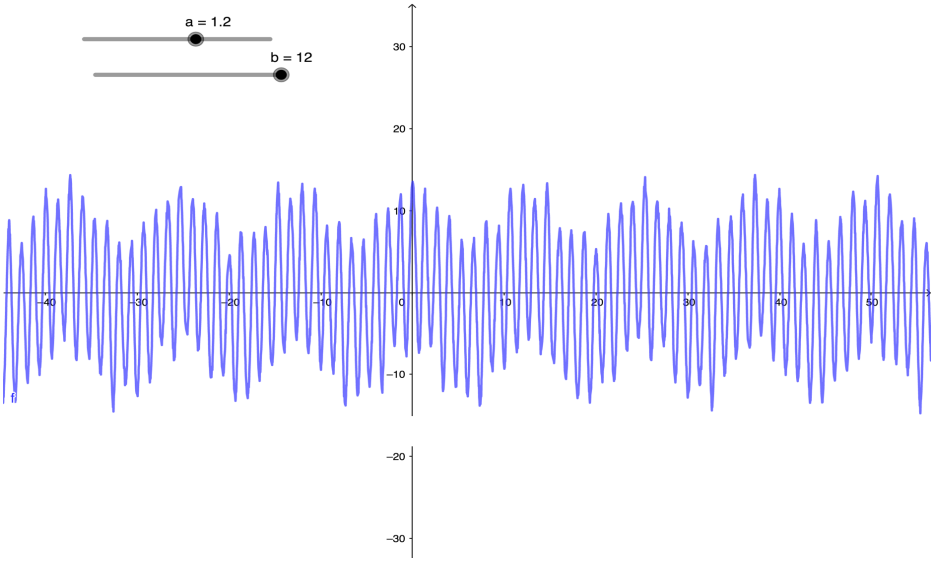



Figura 4.5. Ecuación de onda del ejemplo 4.5 cuando t=1.2

**4.6 Ejemplo.** Resolver el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \qquad \text{(EDP)}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 2u(\pi,t) + u_x(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)}$$

$$u(x,0) = \operatorname{sen} x, \; u_t(x,0) = 1, \; 0 < x < \pi \qquad \text{(CI)}$$

Utilizando el método de las variables separables asumimos $u(x,t) = X(x)T(t)$. La EDP (4.27) implica $XT'' = X''T$, de esto se sigue

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda. \qquad (4.30)$$

La identidad $(4.27)$ junto a las CF $(4.28)$ originan el problema regular S-L

$$X'' + \lambda X = 0, \; 0 < x < \pi, \; X(0) = 0, \; 2X(\pi) + X'(\pi) = 0. \qquad 4.31)$$

El ejemplo 1.52 demuestra que si $z_n$ representa la i-ésima raíz positiva de la ecuación $\tan(z) = -\frac{z}{2\pi}$, entonces los eigenvalores son: $\lambda_n = \frac{z_n^2}{\pi^2}$ y sus eigenfunciones:

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{z_n x}{\pi}\right), \; n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Las primeras cinco soluciones de la ecuación $\tan(z) = -\frac{z}{2\pi}$ son:
$z_1 = 2.73151, \; z_2 = 5.55888, \; z_3 = 8.49104, \; z_4 = 11.4958, \; z_5 = 14.5449.$

Las primeras cinco eigenfunciones son:

$$X_1(x) = \operatorname{sen}(0.86947x), \qquad X_2(x) = \operatorname{sen}(1.76945x),$$

$$X_3(x) = \operatorname{sen}(2.70278x), \qquad X_4(x) = \operatorname{sen}(3.65923x),$$

$X_5(x) = \operatorname{sen}(4.62979x)$, la expresión $(4.27)$ y los eigenvalores dan lugar a la EDO

$$T'' + \lambda T = 0 \Leftrightarrow T'' + \frac{z_n^2}{\pi^2} T = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{z_n t}{\pi}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{z_n t}{\pi}\right).$$

Por tanto, la solución es

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{z_n x}{\pi}\right)\left(a_n\cos\frac{z_n t}{\pi}+b_n\sin\frac{z_n t}{\pi}\right) \tag{4.32}$$

Los coeficientes de la expresión (4.32) se obtienen a partir de la serie generalizada de Fourier, teorema 3.26.

$$u(x,0)=\operatorname{sen}x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\operatorname{sen}\left(\frac{z_n x}{\pi}\right)\Rightarrow a_n=\frac{\int_0^{\pi}\operatorname{sen}x\,\operatorname{sen}\left(\frac{z_n x}{\pi}\right)dx}{\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\left(\frac{z_n x}{\pi}\right)dx}.$$

Los primeros cinco coeficientes son $a_1=0.917306,\ a_2=0.181729,$ $a_3=-0.076838,\ a_4=0.043494,\ a_5=-0.027901.$

Ahora derivamos respecto a $t$ la expresión (4.32) y hacemos $t=0$ para obtener:

$$u_t(x,0)=1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_n b_n}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{z_n x}{\pi}\right)\Rightarrow\frac{z_n b_n}{\pi}=\frac{\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{z_n x}{\pi}\right)dx}{\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\left(\frac{z_n x}{\pi}\right)dx},$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{z_n x}{\pi}\right)dx}{\frac{z_n}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\left(\frac{z_n x}{\pi}\right)dx}.$$



Los primeros cinco coeficientes son:

$b_1=1.42383\quad b_2=0.04686,\quad b_3=0.13158,\ b_4=0.02387,$ $b_5=0.04046.$

Al escribir la expresión (4.32) en forma expandida se tiene:

$$u(x,t)=\operatorname{sen}(0.86947x)(0.917306\cos(0.86947t)+1.42383\sin(0.86947t))$$

$$+\operatorname{sen}(1.76945x)(0.181729\cos(1.76945t)+0.04686\sin(1.76945t))+$$
$$\operatorname{sen}(2.70278x)(-0.076838\cos(2.70278t)+0.13158\sin(2.70278t))$$

$$+\operatorname{sen}(3.65923x)(0.043494\cos(3.65923t)+0.02387\sin(3.65923t))$$

$$+\operatorname{sen}(4.62979x)(-0.027901\cos(4.62979t)+0.04046\sin(4.62979t))$$

***Ejercicios.***

**1.** Generalice el ejemplo 3.1, es decir, resuelva el problema (el ejercicio 23 del capítulo 1 le puede ser de utilidad)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & si \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x, & si \ \frac{L}{2} < x < L \end{cases}, \quad u_t(x,0) = 1, \quad 0 < x < L.$$

**2.** Solucione el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 5\text{sen}(3\pi x) - 8\text{sen}(6\pi x), \ u_t(x,0) = 12\text{sen}(4\pi x), 0 < x < 1.$$

**3.** Resuelva el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & si \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & si \ \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \qquad u_t(x,0) = 6\text{sen}(2x), \qquad 0 < x < \pi$$

**4.** Solucione el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & si \ \ 0 < x < 1 \\ 1, & si \ 1 < x < 2 \end{cases}, \quad u_t(x,0) = x, \quad 0 < x < 2.$$

**5.** Generalice el ejemplo 3.3, esto es, encuentre la solución del problema (el ejercicio 24 del capítulo 1 le puede ser de utilidad)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = Lx - x^2, \quad u_t(x,0) = 1, \quad 0 < x < L.$$

**6.** Resuelva el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = -4 + 8\cos(\pi x), \quad u_t(x,0) = 5\pi\cos(4\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

**7.** Solucione el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 2\text{sen } x, \quad u_t(x,0) = \pi - x, \quad 0 < x < \pi.$$



**8.** Generalice el ejemplo 3.5, es decir, resuelva el problema (el ejercicio 25 del capítulo 1 le puede ser de utilidad)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \pi, \quad u_t(x,0) = 4\pi \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) - 2\pi \cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right), \quad 0 < x < L$$

.

**9.** Solucione el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 2\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - 8\cos\left(\frac{7\pi x}{2}\right), \quad u_t(x,0) = x, \quad 0 < x < \pi.$$

**10.** Resuelva el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 1 - x, \quad u_t(x,0) = 1, \quad 0 < x < 1.$$

**11.** Resuelva el problema de valores iniciales con condiciones de frontera. Escriba explícitamente las primeras cinco funciones de la solución (puede seguir las ideas del ejemplo 3.6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) - u_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1, \quad 0 < x < 1.$$

CAPÍTULO 5

# 5. Ecuación del calor.

En este capitulo se va a estudiar la distribución de temperatura a lo largo de una barra de longitud uniforme $L$ con superficie aislada, sin generación de calor y sujeta a ciertas condiciones de frontera y condiciones iniciales. Para describir el problema, supongamos que la función $T(x,t)$ $(0 < x < L, 0 < t$ ) representa la temperatura en el punto $x$ de la barra en el tiempo $t$. Dada la distribución de temperatura inicial de la barra $T(x,0) = f(x)$, nos preguntamos por la temperatura variando la posición y el tiempo. En las siguientes secciones se desarrollan varios modelos de transferencia de calor a través de la barra variando las condiciones de frontera.



### *5.1 Ecuación del calor con extremos fijos (caso homogéneo).*

Supongamos que la función de temperatura $T$ verifica la ecuación del calor (2.22)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \ t > 0 \qquad \text{(EDP)} \qquad (5.1)$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(L,t) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \qquad (5.2)$$

$$T(x,0) = f(x) \qquad \text{(CI)} \qquad (5.3)$$

Para solucionar este problema se usa el método de separación de variables. Supongamos que las soluciones tienen la forma

$$T(x,t) = X(x)Y(t) \qquad (5.4)$$

Al sustituir la ecuación (5.4) en la EDP (5.1) y al separar las variables se obtiene::

$$\frac{Y'}{c^2Y} = \frac{X''}{X}.$$

El lado izquierdo de la anterior ecuación depende de $t$ mientras que el lado derecho depende de $x$, por tanto, para que se tenga la igualdad los dos términos deben ser iguales a la misma constante, que denotaremos $-\lambda$, obteniendo la expresión:

$$\frac{Y'}{c^2Y} = \frac{X''}{X} = -\lambda \qquad (5.5)$$

A partir de la ecuación (5.5), es posible generar dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' - \lambda X = 0. \qquad Y' - \lambda c^2 Y = 0 \qquad 5.6)$$

Separando las variables en las condiciones de frontera (5.2) se logra

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \qquad (5.7)$$



Al combinar (5.6) con (5.7) se genera el problema con valores en la frontera

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \qquad (5.8)$$

La EDO (5.8) es precisamente el problema regular de Sturm-Liouville analizado en el ejemplo 1.49, sus eigenvalores son $\lambda_n = n^2$ y sus correspondientes eigenfunciones, salvo múltiplos constantes, son

$$X_n(x) = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x), \; n = 1, 2, 3, \cdots. \qquad (5.9)$$

Al sustituir los valores de $\lambda$ en la ecuación diferencial para la función $Y$, es posible generar la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$Y' + (c\frac{n\pi}{L})^2 T = 0 \qquad (5.10)$$

La solución general de la ecuación (5.9) es

$$Y_n(t) = b_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \qquad (5.11)$$

donde, $\lambda_n = c\frac{n\pi}{L}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Por lo tanto, en virtud de las soluciones (5.9) y (5.11) y el principio de superposición, la solución de la EDP (5.1) es de la forma

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{5.12}$$

Con el objetivo de calcular los coeficientes $b_n$, procedemos a reemplazar el valor $t = 0$ en la serie (5.12), además al usar la condición inicial (5.3), se tiene que

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{5.13}$$

Al aplicar la serie de senos (3.17) a la igualdad (5.13) se tienen los valores

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{5.14}$$

**5.1 Ejemplo.** Resolver el problema de valores iniciales con condiciones de frontera



$$\frac{\partial^2 T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0 \qquad \text{(EDP)} \tag{5.15}$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \tag{5.16}$$

$$T(x,0) = 200 \qquad \text{(CI)} \tag{5.17}$$

A partir de la (5.12), se tiene que

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx),$$

donde,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 200 \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{400(-(-1)^n + 1)}{\pi n} \tag{5.18}$$

La figura 5.1 muestra el comportamiento de la temperatura para diferentes valores de $t$.

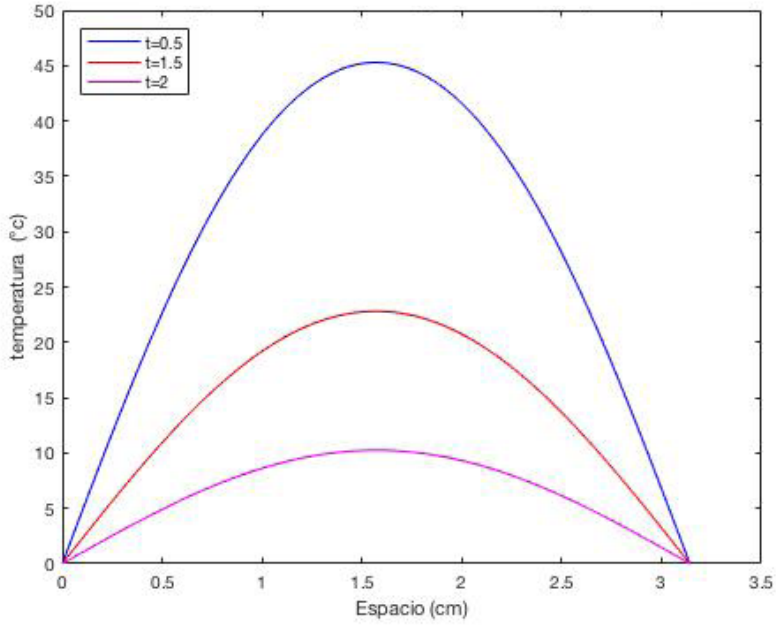





Figura 5.1. Curva de la temperatura del ejemplo 5.1

**5.2 Ejemplo.** Resolver el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0 \qquad \text{(EDP)} \qquad (5.19)$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(1,t) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \qquad (5.20)$$

$$T(x,0) = x \qquad \text{(CI)} \qquad (5.21)$$

A partir de la (5.12), se tiene que

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x),$$

donde,

$$b_n = 2\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(n\pi x)dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi} \qquad (5.22)$$

La figura 5.2 muestra el comportamiento de la temperatura para diferentes valores de $t$.

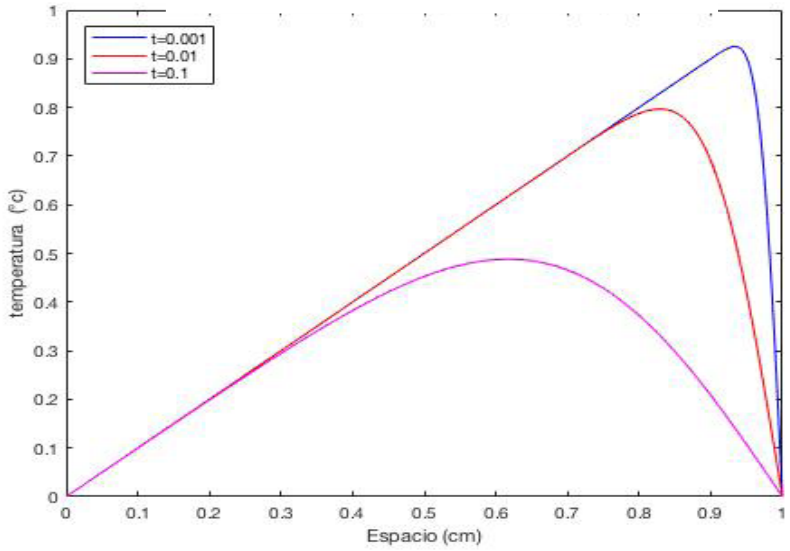



Figura 5.2. Curva de la temperatura del ejemplo 5.2



**5.3 Ejemplo.** Resolver el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0 \qquad \text{(EDP)} \qquad (5.23)$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(1,t) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \qquad (5.24)$$

$$T(x,0) = e^{-x} \qquad \text{(CI)} \qquad (5.25)$$

A partir de la (5.12), se tiene que

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x),$$

donde,

$$b_n = 2\int_0^1 e^{-x} \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = 2\left(\frac{-\pi(-1)^n n}{e(\pi^2 n^2 + 1)} + \frac{\pi n}{\pi^2 n^2 + 1}\right) \qquad (5.26)$$

La figura 5.3 muestra el comportamiento de la temperatura para diferentes valores de $t$.

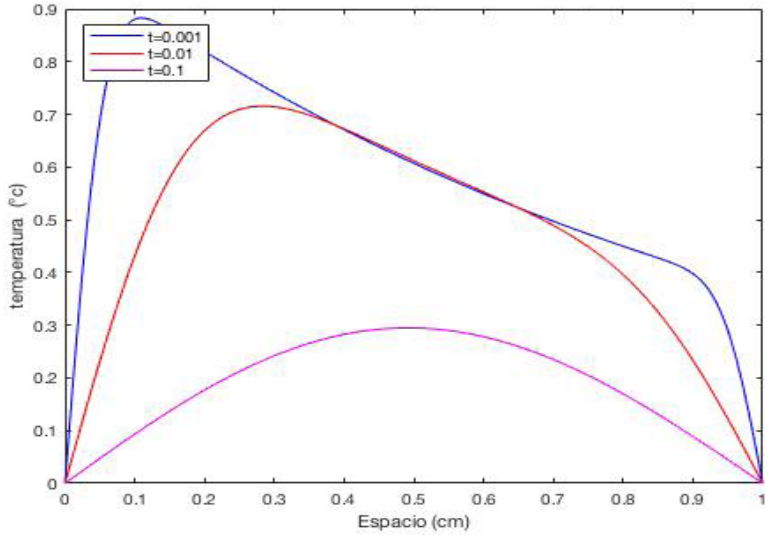



Figura 5.3. Curva de la temperatura del ejemplo 5.3



***5.2 Ecuación del calor con extremos fijos (caso no homogéneo).***

Considere el problema de conducción del calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \ t > 0 \qquad \text{(EDP)} \qquad (5.27)$$

$$T(0,t) = T_1, \quad T(L,t) = T_2, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \qquad (5.28)$$

$$T(x,0) = f(x) \qquad \text{(CI)} \qquad (5.29)$$

El anterior modelo es no homogéneo cuando $T_1$ y $T_2$ son ambos no nulos. Para solucionar la EDP (5.27), encontramos que la función

$$T_1(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

verifica las condiciones de frontera (5.28). Al sustraer la función $T_1(x)$ de la condición inicial (5.29) se genera el problema de conducción de calor homogéneo

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \ t > 0 \qquad \text{(EDP)} \qquad (5.30)$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(L,t) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \qquad (5.31)$$

$$T(x,0) = f(x) - T_1(x) \qquad \text{(CI)} \qquad (5.32)$$

Acorde con la serie (5.12), la solución del anterior problema es

$$T_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

donde,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L (f(x) - \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

Por lo tanto, la solución de (5.27)-(5.29) es

$$T(x,t) = T_1(x,t) + T_2(x,t) \qquad (5.33)$$

**5.4 Ejemplo.** Resolver el problema de valores iniciales con condiciones de frontera



$$\frac{\partial^2 T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0 \qquad \text{(EDP)} \qquad 5.34)$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(\pi,t) = 100, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \qquad (5.35)$$

$$T(x,0) = 100 \qquad \text{(CI)} \qquad (5.36)$$

La función $T_1(x) = \frac{100}{\pi} x$, donde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (100 - \frac{100}{\pi} x) \operatorname{sen} nx \, dx \quad = \frac{200}{n\pi}$$

Finalmente, por (5.33) la solución es

$$T(x,t) = \frac{100x}{\pi} + \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\ nx}{n} e^{-n^2 t}$$

La figura 5.4 muestra el comportamiento de la temperatura para diferentes valores de $t$.

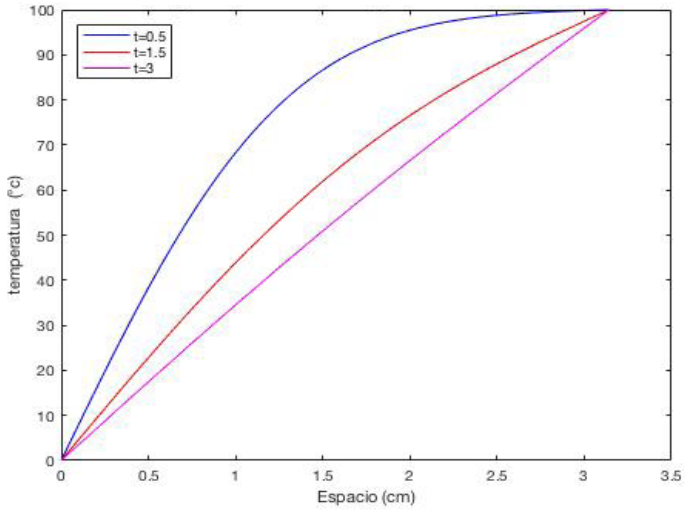





Figura 5.4. Curva de la temperatura del ejemplo 5.3

**5.5 Ejemplo.** Resolver el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0 \qquad \text{(EDP)} \qquad (5.35)$$

$$T(0,t) = 100, \quad T(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \qquad \text{(CF)} \qquad (5.36)$$

$$T(x,0) = x \qquad \text{(CI)} \qquad (5.37)$$

La función $T_1(x) = 100 - \frac{100}{\pi}x$, donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x - (100 - \frac{100}{\pi}x))\operatorname{sen} nx\, dx = \frac{2(-\pi(-1)^n - 100)}{n\pi}$$

Finalmente, por (5.33) la solución es

$$T(x,t) = (100 - \frac{100x}{\pi}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-\pi(-1)^n - 100)}{n\pi} sen\ nx\ e^{-n^2 t}$$

La figura 5.5 muestra el comportamiento de la temperatura para diferentes valores de $t$.

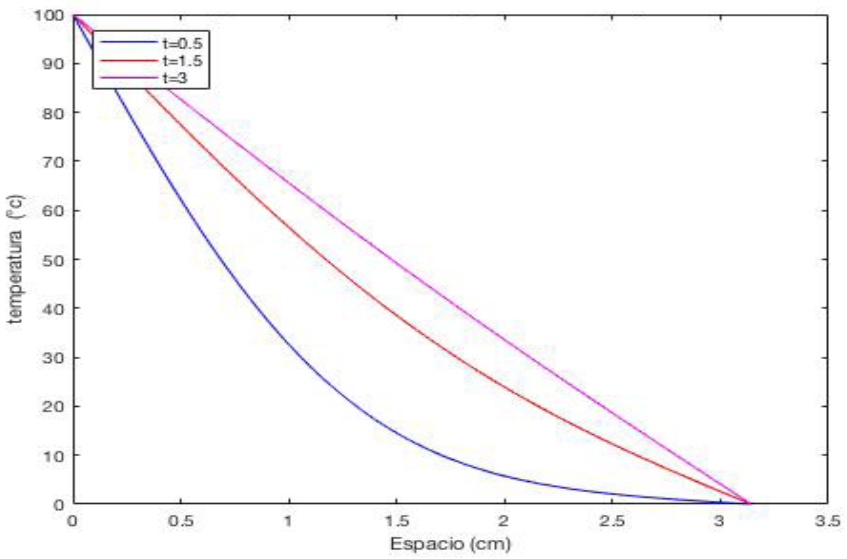





Figura 5.5. Curva de la temperatura del ejemplo 5.5

### *5.3 Ejercicios.*

**1.** Solucione el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & si \quad 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ L - x, & si \ \dfrac{L}{2} < x < L \end{cases}, \qquad 0 < x < L$$

**2.** Solucione el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 5\text{sen}(3\pi x) - 8\text{sen}(6\pi x), \qquad 0 < x < 1.$$

**3.** Resuelva el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & si \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & si\ \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, \qquad 0 < x < \pi.$$

**4.** Solucione el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & si \quad 0 < x < 1 \\ 1, & si\ 1 < x < 2 \end{cases}, \qquad 0 < x < 2.$$

**5.** Solucione el problema de valores iniciales con condiciones de frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 2\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - 8\cos\left(\frac{7\pi x}{2}\right), \qquad 0 < x < \pi.$$

# Referencias Bibliográficas

Afanador, García, N., & Guerrero, Goméz, G., Nolasco, Serna, Christian,. (2022) *Análisis Espectral De La Trigonometría Plana*. Editorial Redipe.

Asmas, Nakhlé, H,. (2000) *Partial Differential Equations*. Editorial Pearson Prentice Hall

Aristizábal, Giraldo, Héctor., (2000) *Ecuaciones Diferenciales*. Editorial Universidad Nacional de Colombia.

Lang, Serge,. *Álgebra Lineal*. Editorial Fondo Educativo Interamericano

Nolasco, Serna, Christian,. Durán, Chinchilla, C., Cadena, Morales, J,. (2020) *Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales*. Editorial Redipe