

# DINÁMICA

## TIPS PARA INGENIEROS

Gonzalo Guillermo Moreno Contreras - Juan Carlos Serrano Rico  
Edwin Espinel Blanco



Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Ocaña - Colombia  
Vigilada Mineducación









**DINÁMICA**  
*TIPS PARA INGENIEROS*

GONZALO GUILLERMO MORENO CONTRERAS  
JUAN CARLOS SERRANO RICO  
EDWIN ESPINEL BLANCO

Moreno Contreras, Gonzalo Guillermo, autor

Dinámica : tips para ingenieros / Gonzalo Guillermo Moreno Contreras, Juan Carlos Serrano Rico, Edwin Espinel Blanco -- Primera edición -- San José de Cúcuta : Universidad Francisco de Paula Santander ; Bogotá : Ecoe Ediciones, 2023.

115 páginas. -- (Ingeniería Mecánica. Dinámica de partículas)

Incluye datos curriculares de los autores -- Incluye referencias bibliográficas al final de cada capítulo.

ISBN 978-958-503-627-7 -- 978-958-503-628-4 (e-book)

1. Ingeniería mecánica 2. Movimientos mecánicos I. Serrano Rico, Juan Carlos, autor II. Espinel Blanco, Edwin, autor

CDD: 621 ed. 23

CO-BoBN- a1112374

---



**Área:** Ingeniería Mecánica

**Subárea:** Dinámica de partículas



**Universidad Francisco  
de Paula Santander**

Ocaña - Colombia  
Vigilada Mineducación

© Gonzalo Guillermo Moreno Contreras  
© Juan Carlos Serrano Rico  
© Edwin Espinel Blanco

© Universidad Francisco de Paula  
Santander seccional Ocaña  
Vía Acolsure, Sede el Algodonal  
Ocaña, Norte de Santander - Colombia  
Teléfono: 5690088

► Ecoe Ediciones S.A.S.  
info@ecoeediciones.com  
www.ecoeediciones.com  
Carrera 19 # 63 C 32 - Tel.: 919 80 02  
Bogotá, Colombia

**Primera edición:** Bogotá, marzo del 2023

**ISBN:** 978-958-503-627-7  
**e-ISBN:** 978-958-503-628-4

Directora editorial: Claudia Garay Castro  
Coordinadora editorial: Paula Bermúdez B.  
Corrección de estilo: César Cardozo Duque  
Diagramación: Nicolás B. Bello  
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz  
Impresión: Xpress Estudio Gráfico y digital  
Carrera 69 H # 77 - 40

*Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio  
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.*

*Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados*

# CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>XI</b>
<b>CAPÍTULO 1. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA.....</b>	<b>1</b>
1.1. Movimiento curvilíneo – componentes rectangulares y normal -tangencial .....	1
1.2 Velocidades dependientes y relativas.....	10
1.2.1. Velocidades dependientes .....	11
1.2.2. Velocidades relativas.....	11
<b>CAPÍTULO 2. TRABAJO Y ENERGÍA.....</b>	<b>21</b>
2.1. Principio de trabajo y energía.....	21
<b>CAPÍTULO 3. PRINCIPIO DE IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO.....</b>	<b>55</b>
3.1. Principio de impulso y cantidad de movimiento .....	55
3.2. Choques.....	69
3.2.1 Choque con objetos unidos – Cantidad de movimiento .....	69
3.2.2 Choque con objetos separados – cantidad de movimiento.....	70
3.2.2 Choque frontales.....	71
3.2.3 Choque oblicuos.....	71
<b>CAPÍTULO 4. CINEMÁTICA DE CUERPO RÍGIDO.....</b>	<b>101</b>
4.1. Cinemática de cuerpo rígido .....	101
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>117</b>

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	XVII
<b>CAPÍTULO 1. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA</b> .....	1
1.1. Movimiento curvilíneo – componentes rectangulares y normal - tangencial	1
1.2 Velocidades dependientes y relativas .....	10
1.2.1. Velocidades dependientes .....	10
1.2.2. Velocidades relativas.....	11
<b>CAPÍTULO 2. TRABAJO Y ENERGÍA</b> .....	21
2.1. Principio de trabajo y energía .....	21
<b>CAPÍTULO 3. PRINCIPIO DE IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO</b> .....	55
3.1. Principio de impulso y cantidad de movimiento .....	55
3.2. Choques .....	69
3.2.1 Choque con objetos unidos – Cantidad de movimiento .....	69
3.2.2 Choque con objetos separados – cantidad de movimiento.....	70
3.2.2 Choque frontales .....	70
3.2.3 Choque oblicuos.....	71
<b>CAPÍTULO 4. CINEMÁTICA DE CUERPO RÍGIDO</b> .....	99
4.1. Cinemática de cuerpo rígido .....	99
<b>REFERENCIAS</b> .....	113

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representación gráfica del movimiento.....	5
Figura 2. Representación gráfica de la posición inicial de los vehículos...	7
Figura 3. Representación gráfica del movimiento.....	7
Figura 4. Representación gráfica de la posición inicial de los vehículos...	8
Figura 5. Representación gráfica del movimiento.....	8
Figura 6. Representación del movimiento de los vehículos.....	10
Figura 7. Movimiento de vehículos – velocidades relativas.....	12
Figura 8. Recorrido y posición final de los vehículos.....	13
Figura 9. Dirección es de las aceleraciones.....	13
Figura 10. Movimiento de vehículos – velocidades relativas.....	14
Figura 11. Recorrido y posición final de los vehículos.....	16
Figura 12. Dirección es de las aceleraciones.....	16
Figura 13. Movimiento de vehículos – velocidades relativas.....	17
Figura 14. Movimiento de vehículos – velocidades relativas.....	18
Figura 15. Ubicación geométrica de los autos.....	19
Figura 16. Aplicación de movimiento de bloques.....	23
Figura 17. Movimiento de bloques y direcciones.....	23
Figura 18. Diagramas de cuerpo libre de los bloques.....	24

Figura 19. Tensión del cable vs. ángulo de aplicación la fuerza $F$ .....	27
Figura 20. Aceleración relativa vs. ángulo de aplicación de la fuerza .....	27
Figura 21. Bloque con fuerza dependiente del espacio.....	28
Figura 22. Diagrama de cuerpo libre del bloque A .....	28
Figura 23. Bloque con sistema de resorte .....	31
Figura 24. Compresión del resorte por efecto del bloque B .....	31
Figura 25. Etapas del movimiento de los bloques .....	32
Figura 26. Diagrama de cuerpo libre bloques A y B – etapas 3 y 4.....	32
Figura 27. Ángulo de la rampa vs. distancia requerida .....	35
Figura 28. Bloque bajo la acción de una fuerza dependiente del espacio....	35
Figura 29. Diagrama de cuerpo libre del bloque A .....	36
Figura 30. Bloque en caída con amortiguamiento.....	38
Figura 31. Etapas del movimiento del bloque .....	39
Figura 32. Diagrama de cuerpo libre bloque A – etapas 2 y 3 .....	39
Figura 33. Bloque bajo la acción de una fuerza dependiente del espacio....	40
Figura 34. Diagrama del movimiento del bloque.....	40
Figura 35. Diagrama de cuerpo libre del bloque .....	41
Figura 36. Diagrama trigonométrico del movimiento.....	42
Figura 37. Diagrama trigonométrico de sustitución.....	43
Figura 38. Bloque subiendo – fuerza del resorte .....	44
Figura 39. Etapas del movimiento del bloque .....	45
Figura 40. Diagrama de cuerpo libre bloque A – etapas 2 y 3 .....	45
Figura 41. Bloque bajando con varias pendientes .....	46
Figura 42. Etapas del movimiento del bloque .....	46
Figura 43. Diagrama de cuerpo libre del bloque .....	47
Figura 44. Collarín - resorte .....	48
Figura 45. Diagrama de cuerpo libre del movimiento del collarín .....	48
Figura 46. Bloque en caída con resorte de amortiguamiento .....	50
Figura 47. Descripción del movimiento del bloque.....	51
Figura 48. Bloque subiendo con fuerza dependiente del espacio.....	52
Figura 49. Bloque subiendo con fuerza dependiente del tiempo .....	56
Figura 50. Diagrama de cuerpo libre del bloque subiendo .....	56
Figura 51. Diagrama de cuerpo libre del bloque bajando .....	57
Figura 52. Bloque bajando con varias pendientes .....	58
Figura 53. Etapas del movimiento del bloque.....	58

Figura 54. Diagrama de cuerpo libre del bloque .....	59
Figura 55. Diagrama inclinación rampa 1 vs. espacio recorrido.....	63
Figura 56. Bloque con fuerza dependiente del tiempo .....	63
Figura 57. Diagrama de cuerpo libre del bloque .....	64
Figura 58. Sistema de bloques .....	64
Figura 59. Diagrama de cuerpo libre de los bloques.....	65
Figura 60. Sistema de bloques .....	66
Figura 61. Diagrama de cuerpo libre de los bloques.....	67
Figura 62. Sistema de bloques .....	68
Figura 63. Choque de bloques que se unen.....	70
Figura 64. Choque de bloques.....	70
Figura 65. Diagrama de velocidades en un choque oblicuo.....	71
Figura 66. Choque oblicuo de esferas .....	72
Figura 67. Choque oblicuo de esferas – coordenadas del choque.....	73
Figura 68. Diagrama coeficiente de restitución vs. distancia recorrida.....	76
Figura 69. Choque de bloques - rampla.....	76
Figura 70. Diagrama de movimiento de los bloques.....	76
Figura 71. Choque de bloques – unión - rampla.....	78
Figura 72. Diagrama de movimiento de los bloques.....	78
Figura 73. Choque oblicuo de esferas .....	80
Figura 74. Choque oblicuo de esferas – coordenadas del choque.....	80
Figura 75. Choque oblicuo de esferas .....	81
Figura 76. Choque oblicuo de esferas – coordenadas del choque.....	82
Figura 77. Choque oblicuo de esferas .....	83
Figura 78. Choque oblicuo de esferas – coordenadas del choque.....	83
Figura 79. Choque bala con bloques .....	85
Figura 80. Diagrama de cuerpo libre bloque B - bala .....	85
Figura 81. Choque y movimiento de bloques .....	87
Figura 82. Diagrama – ecuación de la cuerda.....	87
Figura 83. Recorrido de la bola de billar.....	89
Figura 84. Diagrama del primer choque.....	89
Figura 85. Diagrama del segundo choque .....	90
Figura 86. Bloque – Rampla - Choque.....	91
Figura 87. Compresión del resorte por efecto del bloque B .....	91
Figura 88. Choque de carros .....	96

Figura 89. Movimiento de los carros después del choque .....	97
Figura 90. Diagrama del choque .....	97
Figura 91. Diagrama de velocidades del carro A .....	98
Figura 92. Diagrama de velocidades del carro B .....	98
Figura 93. Diagrama de velocidades de los carros .....	99
Figura 94. Mecanismo de biela – manivela .....	102
Figura 95. Mecanismo de biela – manivela .....	103
Figura 96. Mecanismo de biela – manivela - corredera.....	105
Figura 97. Diagrama de verificación del mecanismo.....	105
Figura 98. Mecanismo de biela – manivela - corredera.....	107
Figura 99. Mecanismo de biela – manivela - corredera.....	109
Figura 100. Mecanismo corredera .....	110
Figura 101. Diagrama de velocidades y aceleraciones .....	110
Figura 102. Mecanismo corredera .....	112
Figura 103. Diagrama de velocidades y aceleraciones .....	113
Figura 104. Barra con esfera - choque.....	115



# INTRODUCCIÓN

La dinámica es una de las principales bases de la Ingeniería Mecánica, por medio de esta se pueden determinar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, determinando cuales están a favor o en contra del movimiento de este. Esto es muy importante debido a que del buen entendimiento de esta teoría se puede visualizar y entender mejor el funcionamiento de mecanismos o equipos más complejos.

Para el estudiante de Ingeniería Mecánica entender la dinámica del movimiento de una partícula o un mecanismo le permitirá manejar o plantear sin problemas las ecuaciones del movimiento de este, haciendo de esta forma que el futuro ingeniero tenga claro en su mente cómo evoluciona el movimiento y qué fuerzas actúan para generarlo.

Con la experiencia adquirida durante varios años en el desarrollo de proyectos de investigación, el desarrollo recurrente de prototipos y máquinas e impartiendo esta asignatura en entornos universitarios de pregrado y posgrado, nos hemos dado a la tarea de recopilar varios ejemplos de autoría propia y algunos adaptados de importantes autores, los cuales, por su complejidad, aportan bastante en el aprendizaje de esta materia. Para estos ejercicios se muestra el paso a paso del desarrollo y cómo desde la perspectiva del ingeniero se debe pensar para solucionarlos, adicionalmente se dan consejos prácticos para el desarrollo de estos.

Este libro se plantea como un complemento a los libros tradicionales donde se muestra ampliamente la teoría con el fin de profundizar en el desarrollo de ejercicios adquiriendo destrezas de una forma práctica y solucionando dudas que fortalecen el proceso de enseñanza y aprendizaje de la asignatura, además de aportar a los inicios en programación en Matlab. Adicionalmente, para algunos ejemplos y explicaciones se hace el acompañamiento de su desarrollo mediante video en YouTube.



## CAPÍTULO 1

# CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

### 1.1. Movimiento curvilíneo – componentes rectangulares y normal-tangencial

En esta primera sección se desarrollarán ejemplos en los cuales se tendrán en cuenta las ecuaciones de movimiento constante y movimiento acelerado de una partícula, para movimiento constante se tienen la siguiente ecuación (Beer *et al.*, 2010; Sandu, 2012):

$$V = \frac{s}{t} \quad (1)$$

Para movimiento acelerado o variable se tienen las siguientes ecuaciones (Beer *et al.*, 2010; Sandu, 2012):

$$V_f = V_o \pm at \quad (2)$$

$$V_f^2 = V_o^2 \pm 2as \quad (3)$$

$$s = V_o t \pm \frac{at^2}{2} \quad (4)$$

**Ejemplo 1.1:** dos carros están en la competencia de  $\frac{1}{4}$  de milla (aproximadamente 402 m), los datos de los movimientos de los carros que parten desde el reposo son los siguientes:

- » Carro A: alcanza su máxima velocidad en un tiempo  $t_{A1} = 4$  s y después sigue a velocidad constante hasta el punto medio de la carrera donde lleva un tiempo de  $t_{AM} = 27$ s.
- » Carro B: alcanza su máxima velocidad en un tiempo  $t_{B1} = 5$  s y después sigue a velocidad constante hasta el punto medio de la carrera donde lleva un tiempo de  $t_{BM} = 26$ s.
- » A partir del punto medio de la carrera los dos carros desaceleran a razón de  $0,1\text{m/s}^2$ , determinar la diferencia en la distancia final entre el carro ganador y el otro carro.

• **Desarrollo – para el carro A**

Del enunciado para el carro A se tiene que el recorrido hasta la mitad de la carrera (201 m) se compone de un espacio a velocidad variable ( $S_{A1}$ ) y un espacio a velocidad constante ( $S_{A2}$ ), por consiguiente, de las ecuaciones 2 y 4 se tiene:

**Movimiento acelerado** ( $t_{A1}=4\text{s}$ ):

$$v_f = v_0 + a_A t_{A1} \Rightarrow a_A = \frac{v_f}{t_{A1}}$$

$$s_{A1} = v_0 t_{A1} + \frac{a_A t_{A1}^2}{2} \Rightarrow s_{A1} = \frac{v_f t_{A1}}{2} = 2v_f$$

Seguidamente, el vehículo sigue con movimiento constante, este movimiento se hace a velocidad máxima, es decir, con la velocidad final del movimiento acelerado. Del enunciado se tiene que el tiempo total hasta el punto medio de la carrera es de 27 s y lleva 4 s acelerando, por consiguiente, de la diferencia de estos tiempos se tiene que el movimiento a velocidad constante se hace en 23 s, teniendo en cuenta esto se tiene que el espacio recorrido a velocidad constante de la Ecuación 1 es igual a:

$$s_{A2} = v_f t_{A2} = 23v_f$$

Por consiguiente, para el carro A se tiene que el espacio recorrido hasta la mitad de la competencia es:

$$s_{A-M} = 201 = s_{A1} + s_{A2} = 2v_f + 23v_f$$

Despejando se tiene que la máxima velocidad del carro A es:

$$v_f = 8,04 \text{ m/s}$$

A partir de la mitad del recorrido se inicia un nuevo movimiento a velocidad variable (desacelerado), el cual va hasta el final del recorrido, para el cual se tiene que la velocidad inicial es la final del movimiento anterior, por consiguiente, de la Ecuación 4 se tiene:

$$s_{A3} = v_f t_{A3} - \frac{a_A t_{A3}^2}{2}$$

Sustituyendo  $a_A$ ,  $v_f$  y ordenando la ecuación:

$$0,05 t_{A3}^2 - 8,04 t_{A3} + 201 = 0$$

$$t_{A3} = 30,96 \text{ s}$$

De donde el tiempo total del recorrido del carro A es de:

$$t_{AT} = t_{A1} + t_{A2} + t_{A3} = 57,96 \text{ s}$$

- **Desarrollo – para el carro B**

Del enunciado para el carro B se tiene que el recorrido hasta la mitad de la carrera (201 m) se compone de un espacio a velocidad variable y un espacio a velocidad constante, por consiguiente, de las ecuaciones 2 y 4 se tiene:

**Movimiento acelerado** ( $t_{B1} = 5 \text{ s}$ ):

$$v_f = v_0 + a_B t_{B1} \Rightarrow a_B = \frac{v_f}{t_{B1}}$$

$$s_{B1} = v_0 t_{B1} + \frac{a_B t_{B1}^2}{2} \Rightarrow s_{B1} = \frac{v_f t_{B1}}{2} = 2,5 v_f$$

Seguidamente, el vehículo sigue con movimiento constante, este movimiento se hace a velocidad máxima, por tanto, con la velocidad final del movimiento acelerado y en un tiempo de 21 s, el cual es la diferencia de tiempos hasta la mitad del recorrido, teniendo en cuenta esto se tiene que el espacio a velocidad constante de la Ecuación 1 es igual a:

$$s_{B2} = v_f t_{B2} = 21 v_f$$

Por consiguiente, para el carro B se tiene que el espacio recorrido hasta la mitad de la competencia es:

$$s_{B-M} = 201 = s_{B1} + s_{B2} = 2,5 v_f + 21 v_f$$

Despejando se tiene que la máxima velocidad del carro B es:

$$v_f = 8,55 \text{ m/s}$$

A partir de la mitad del recorrido se inicia un nuevo movimiento variable (desacelerado), el cual va hasta el final del recorrido para el cual se tiene que la velocidad inicial es la final del movimiento anterior, por consiguiente, de la Ecuación 4 se tiene:

$$s_{B3} = v_f t_{B3} - \frac{a_B t_{B3}^2}{2}$$

Sustituyendo  $a_B$ ,  $v_f$  y ordenando la ecuación:

$$0,05t_{B3}^2 - 8,55t_{B3} + 201 = 0$$

$$t_{B3} = 28,13 \text{ s}$$

De donde el tiempo total del recorrido del carro A es de:

$$t_{BT} = t_{B1} + t_{B2} + t_{B3} = 54,13 \text{ s}$$

Esto demuestra que el carro ganador es el carro B, el cual hace el recorrido en un tiempo menor (3,83s menos que el carro A), para el espacio de diferencia se debe calcular el espacio recorrido por el carro A en el tiempo del carro B, como ya se sabe que hasta la mitad del recorrido el carro A toma 27 segundos, el tiempo restante que toma el carro A a partir de la mitad de la pista es con velocidad variable (desacelerada) de donde se tiene:

$$t_{A3-B} = t_{BT} - t_{AM} = 54,13 - 27 = 27,13 \text{ s}$$

De la Ecuación 4 se tiene que el espacio recorrido en este tiempo es de:

$$s_{A3} = v_f t_{A3-B} - \frac{a_A t_{A3-B}^2}{2} = 8,04 \times 27,13 - \frac{0,1 \times 27,13^2}{2}$$

$$s_{A3} = 181,323 \text{ m}$$

Por consiguiente, el espacio total recorrido por el carro A en el tiempo del carro B es de  $S_{AT-B} = 382,323 \text{ m}$  (suma del espacio hasta la mitad del recorrido y el espacio calculado en el tiempo de B), finalmente, como el carro B completo todo el recorrido (402 m) se dice que el carro B le tomo una distancia de 19,67m en la meta al carro A.

**Ejemplo 1.2:** un carro C lleva una velocidad  $v_c = 80 \text{ km/h}$  y pasa por el frente de una patrulla de policía, la cual tarda 10 s en reaccionar, el conductor de la patrulla acelera rápidamente y alcanzar la velocidad  $v_p = 100 \text{ km/h}$  en 15 s. Después de un tiempo la patrulla alcanza el carro y le ordena detenerse, lo cual ocurre al cabo de 4 s para los dos carros. Para los datos suministrados determinar el espacio total recorrido.

### Desarrollo

Cuando la patrulla arranca, el carro C ha recorrido un espacio constante en 10 s, de la Ecuación 1 se tiene:

$$s_{C1} = v_c t$$

Teniendo en cuenta que la velocidad del carro C en unidades del Sistema Internacional (SI) equivale a:

$$v_c = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} * \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} * \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 22.22 \text{ m/s}$$

De donde se tiene que el recorrido corresponderá a:

$$s_{C1} = 22,22 \times 10 = 222,22 \text{ m}$$

*Tips 1:* para este tipo de ejercicios es importante que se planteen ecuaciones de espacio y de movimiento de los vehículos en un mismo tiempo.

Pasados los 10 s de recorrido del carro C, planteando las ecuaciones de espacio y tiempo de recorrido de los dos vehículos, se tiene:

Del enunciado y del cálculo inicial del espacio recorrido por el carro C hasta que la patrulla lo alcance se tiene, como se observa en la Figura 1:

**Figura 1. Representación gráfica del movimiento**



Fuente: elaboración propia.

- » El tiempo total del recorrido para los dos carros es igual.
- » El espacio total del recorrido de la patrulla es igual al espacio de recorrido del carro C más  $222,22\text{m}$ , por lo tanto se tiene la siguiente ecuación:

$$s_{PT} = 222,22 + s_C \quad (5)$$

- » El espacio recorrido de la patrulla se divide en: un espacio con aceleración uniforme (15s) y un espacio a velocidad constante de donde se tiene:

$$s_{PT} = s_{P-A} + s_{P-C} \quad (6)$$

- » Para el espacio acelerado de la patrulla se tiene:  $v_0 = 0$ ,  $v_f = 100\text{km/h} = 27,77\text{m/s}$ ,  $t = 15\text{s}$ , de donde de las ecuaciones 2 y 3 se tiene:

$$v_f = v_0 + at \Rightarrow a_p = 1,8518\text{m/s}^2$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow s_{P-A} = 208,21\text{m}$$

- » Para el espacio a velocidad constante, asumiendo un tiempo ( $t_{p-co}$ ), de la Ecuación 1 se tiene:

$$s_{P-C} = v_p t_{co} = 27,77 t_{p-co}$$

- » Reemplazando en la Ecuación 6 se tiene que el espacio recorrido por la patrulla es igual a:

$$s_{PT} = s_{P-A} + s_{P-C} = 262,7 + 27,7 t_{p-co} \quad (7)$$

- Para el carro C
  - » Como ya se mencionó, el tiempo del recorrido de los autos es igual y el tiempo de recorrido del carro C será igual al de la patrulla, es decir:

$$t_C = 15 + t_{P-co}$$

- » Como el recorrido del carro C se hace a velocidad constante, de la Ecuación 1 se tiene:

$$s_C = v_C (15 + t_{P-co}) = v_C (15 + t_{P-co})$$

$$s_C = 22,22(15 + t_{P-co}) = 333,3 + 22,2t_{co} \quad (8)$$

- » Reemplazando las ecuaciones 7 y 8 en la Ecuación 5 se tiene que el tiempo de recorrido de la patrulla a velocidad constante es de:

$$262,7 + 27,77t_{P-co} = 222,22 + 333,3 + 22,22t_{P-co}$$

$$t_{P-co} = 52,76 s$$

De donde se tiene que el espacio recorrido por los carros hasta el punto donde se encuentran es de 1742,41m, Ecuación 7.

$$s_{PT} = 262,7 + 27,77t_{co} = 1727,84 m$$

Seguidamente, después de este espacio, los dos carros desaceleran en un tiempo de 4 s, por consiguiente, se tiene:

- **Para la patrulla**

Para el espacio desacelerado se tiene:  $v_0 = 27,77 m/s$ ,  $v_f = 0$ ,  $t = 4s$ , de donde de las ecuaciones 2 y 3 se tiene:

$$v_f = v_0 + at \Rightarrow a_p = -6,9425 m/s^2$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow s_{P-D} = 55,54 m$$

El espacio total recorrido por la patrulla es de:

$$s_{PTOTAL} = 1727,84 + 55,54 = 1783,38 m$$

Para el carro C se tiene:

Para el espacio desacelerado se tiene:  $v_0 = 22,22m/s$ ,  $v_f = 0$ ,  $t = 4s$ , de donde de las ecuaciones 2 y 3 se tiene:

$$v_f = v_0 + at \Rightarrow a_C = -5,555 m/s^2$$

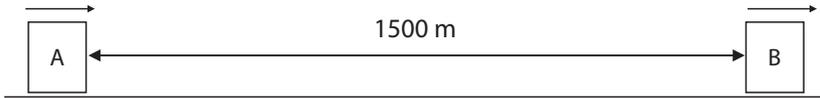
$$v_f^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow s_{C-D} = 44,44 m$$

El espacio total recorrido por el carro C es de:

$$s_{PTOTAL} = 1727,84 + 44.44 = 1772.28 m$$

**Ejemplo 1.3:** dos carros separados 1500 m, Figura 2, el carro A acelera desde 0 hasta 88 km/h en 10 s y el carro B acelera desde 0 hasta 39 km/h en 12 s. Determine el tiempo requerido para que el carro A le tome una distancia de 1500 m del carro B.

**Figura 2. Representación gráfica de la posición inicial de los vehículos**

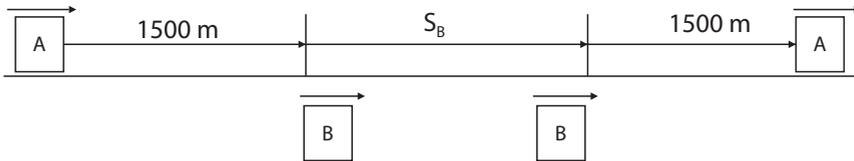


Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo

En la siguiente figura se realiza una representación gráfica del movimiento propuesto.

**Figura 3. Representación gráfica del movimiento**



Fuente: elaboración propia.

Inicialmente se debe calcular las aceleraciones de los carros y los espacios recorridos hasta alcanzar sus máximas velocidades, de las ecuaciones 2 y 3, para el carro A:  $v_0 = 0, v_f = 88 km/h = 24,4 m/s, t = 10s$ , se tiene:

$$a_A = 2,44 m/s^2 \text{ y } s_{A1} = 122,22 m$$

Para el carro B:  $v_0 = 0, v_f = 39 km/h = 10,83 m/s, t = 12s$ , se tiene:

$$a_B = 0,90 m/s^2 \text{ y } s_{B1} = 65 m$$

Como se puede apreciar, los carros llegan a su máxima velocidad sin recorrer el espacio total que los separa, como el carro que más tiempo toma en alcanzar su máxima velocidad es el B se calculan los espacios recorridos para los dos carros en el tiempo del carro B (12 s), ya que el tiempo debe ser igual para los dos.

Por consiguiente, le faltarían dos segundos de recorrido al carro A, el cual lo hace a velocidad constante, de la Ecuación 1 se tiene:

$$s_{A2} = v_f t = 24,4 \times 2 = 48,89 m$$

Seguidamente, considerando que:

- El espacio para ambos carros se divide entre un espacio acelerado y uno constante.
- El tiempo de recorrido para los dos carros es igual, adicionalmente de la Figura 3 de la representación del recorrido se tiene para el espacio recorrido la siguiente ecuación:

$$s_A = 1500 + s_B + 1500$$

$$S_{A-10} + S_{A-2} + S_{A-Cte} = S_{B-12} + S_{B-Cte} + 3000$$

$$S_{A-10} + S_{A-2} + v_A t = S_{B-12} + v_B t + 3000$$

$$122,22 + 48,89 + 24,4t = 65 + 10,83t + 3000$$

De donde el tiempo final a velocidad constante es:

$$t = 212,61s$$

Finalmente, el tiempo total del recorrido (sumándole los 12 s iniciales) es de:

$$t_{Total} = 224,61$$

**Ejemplo 1.4:** dos carros separados 1500 m, Figura 4, el carro A acelera desde 0 hasta 88 km/h en 10 s en dirección  $x$  positivo, y el carro B se dirige hacia el carro A (dirección  $x$  negativo) y acelera desde 0 hasta 39 km/h en 12 s. Determine el tiempo requerido para que después de que se crucen exista entre los dos carros una distancia de 1500 m.

**Figura 4. Representación gráfica de la posición inicial de los vehículos**

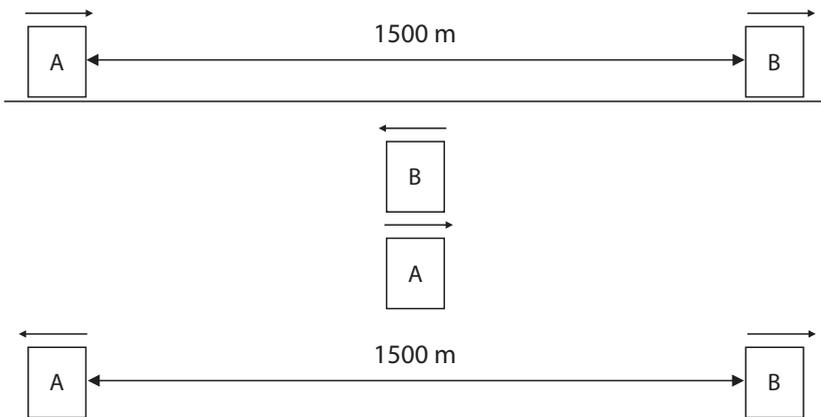


Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo

En la siguiente figura se realiza una representación del movimiento propuesto.

**Figura 5. Representación gráfica del movimiento**



Fuente: elaboración propia.

Inicialmente se debe calcular las aceleraciones de los carros y los espacios recorridos hasta alcanzar sus máximas velocidades, de las ecuaciones 2 y 3, para el carro A:  $v_0 = 0, v_f = 88 \text{ km/h} = 24,4 \text{ m/s}, t = 10 \text{ s}$ , se tiene:

$$a_A = 2,44 \text{ m/s}^2 \text{ y } s_{A1} = 122,22 \text{ m}$$

Para el carro B,  $v_0 = 0, v_f = 39 \text{ km/h} = 10,83 \text{ m/s}, t = 12 \text{ s}$ , se tiene:

$$a_B = 0,90 \text{ m/s}^2 \text{ y } s_{B1} = 65 \text{ m}$$

Como se puede apreciar, los carros llegan a su máxima velocidad sin recorrer el espacio total que los separa, como el carro que más tiempo toma en alcanzar su máxima velocidad es el B, se calculan los espacios recorridos para los dos carros en el tiempo del carro B (12 s), ya que el tiempo debe ser igual para los dos. Por consiguiente, le faltarían dos segundos de recorrido al carro A, el cual lo hace a velocidad constante, de la Ecuación 1 se tiene:

$$s_{A2} = v_f t = 24,4 * 2 = 48,89 \text{ m}$$

Considerando que:

- Según la Figura 5 de representación del movimiento, cuando los carros se cruzan han recorrido entre los dos 1500 m, pero según el enunciado la distancia a determinar será después de cruzarse y haber recorrido 1500 m adicionales, por consiguiente, el espacio total recorrido entre los dos carros es de 3000 m.
- La velocidad de los carros después de 12 segundos es constante.
- El tiempo para los dos carros después de los 12 s es el mismo, por consiguiente, se tiene:

$$s_{A-10} + s_{A-2} + s_{B-12} + s_{A-Cte} + s_{B-Cte} = 3000$$

$$s_{A-10} + s_{A-2} + s_{B-12} + v_A t + v_B t = 3000$$

$$122,22 + 48,89 + 65 + 24,4t + 10,83t = 3000$$

Solucionando se tiene que el tiempo de recorrido a velocidad constante es:

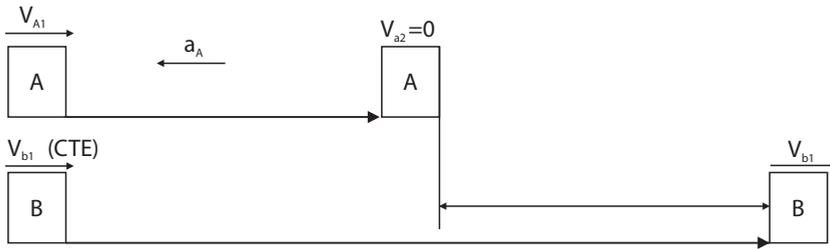
$$t = 78,35 \text{ s}$$

Finalmente, el tiempo total del recorrido, sumándole los 12 s iniciales, es de:

$$t_{Total} = 90,35 \text{ s.}$$

**Ejemplo 1.5:** en el instante mostrado, Figura 6, los carros A y B de la figura llevan las velocidades  $V_{A1}$  y  $V_{B1}$  respectivamente, si se sabe que el carro A se desacelera hasta detenerse y que la velocidad del carro B es constante, determinar la distancia **d** que los separa en función de los datos suministrados cuando A se detenga.

Figura 6. Representación del movimiento de los vehículos



Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo

Para el recorrido descrito se sabe que los dos carros utilizan el mismo tiempo, por consiguiente:

$$t_A = t_B = t$$

De las ecuaciones de movimiento variable, ecuaciones 2 y 4, para el carro A se tiene:

$$v_{A2} = v_{A1} - a_A t \Rightarrow t = \frac{v_{A1}}{a_A}$$

$$s_A = v_{A1} \left( \frac{v_{A1}}{a_A} \right) - \frac{a_A \left( \frac{v_{A1}}{a_A} \right)^2}{2}$$

Por lo tanto:

$$s_A = \frac{v_{A1}^2}{a_A} - \frac{v_{A1}^2}{2a_A} = \frac{v_{A1}^2}{2a_A}$$

En el mismo tiempo, para el carro B se tiene espacio a velocidad constante Ecuación 1:

$$s_B = v_{B1} t = v_{B1} \frac{v_{A1}}{a_A}$$

De donde el espacio que separa los dos carros al final del recorrido es igual a:

$$d = s_B - s_A = v_{B1} \frac{v_{A1}}{a_A} - \frac{v_{A1}^2}{2a_A}$$

## 1.2 Velocidades dependientes y relativas

En la solución de muchos problemas que envuelven la dinámica del movimiento es importante determinar si el movimiento de un cuerpo depende o no del movimiento de otros, de igual forma es importante saber cómo un cuerpo se mueve en relación a otro o

un punto fijo, a continuación, se dará una explicación de la dinámica del movimiento de los objetos cuando dependen de otros y su movimiento relativo.

### 1.2.1. Velocidades dependientes

Para desarrollar ejemplos de este tipo es importante detallar en cada uno de ellos la ecuación de la cuerda o cuerdas que componen el sistema, para esto se tendrán en cuenta las siguientes recomendaciones que son aplicadas en los ejemplos desarrollados:

- Para plantear la ecuación de la cuerda, se deben seleccionar sistemas de referencia en puntos estáticos de la cuerda.
- A partir de los puntos estáticos se determina la ubicación de los cuerpos, estas distancias son positivas.
- En la ecuación de la cuerda no se deben incluir segmentos los cuales son constantes, ya que al derivarlos el resultado es cero.

### 1.2.2. Velocidades relativas

Para desarrollar ejemplos de este tipo se deben tener en cuenta las siguientes ecuaciones de espacio ( $S$ ), velocidad ( $V$ ) y aceleración ( $a$ ) (Hibbeler, 2015):

$$s_{A/B} = s_A - s_B \quad (9)$$

$$v_{A/B} = v_A - v_B \quad (10)$$

$$a_{A/B} = a_A - a_B \quad (11)$$

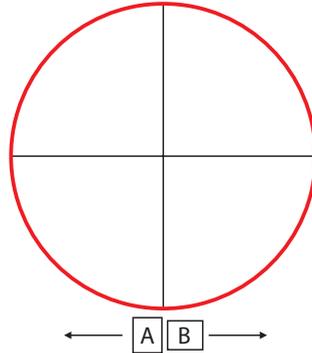
Adicionalmente, para este tipo de ejercicios se deben tener en cuenta los siguientes *tips*:

- Para el cálculo de las velocidades y aceleraciones relativas se deben tener en cuenta todas sus componentes según el tipo de ejercicio: velocidades tangencial, radial, transversal, y aceleraciones tangencial, normal, radial y transversal.
- Adicionalmente se deben hacer los respectivos cálculos teniendo en cuenta las sumas en las coordenadas cartesianas en lo posible, con el objetivo de facilitar los cálculos.

A continuación, se desarrollarán algunos ejemplos de cada tipo:

**Ejemplo 1.6:** los dos carros de la Figura 7 parten del reposo desde la posición mostrada, el carro A acelera desde 0 hasta 70 km/h en 12 s y el carro B acelera desde 0 hasta 100 km/h en 10 s. Si se sabe que la pista tiene un radio de 100 m, determine la aceleración del carro B con respecto al carro A después de 10 s.

**Figura 7. Movimiento de vehículos – velocidades relativas**



Fuente: elaboración propia.

Para cada uno de los carros se debe calcular su velocidad, su aceleración, el espacio recorrido a lo largo de 10 s y su localización en la pista. De las ecuaciones 2 y 4, para el carro A, se tiene:

$$v_A = 0 \rightarrow 70 \frac{km}{h} = 0 \rightarrow 19,44 m/s$$

$$v_{fA} = v_{oA} + a_A t_A$$

$$a_A = \frac{v_{fA} - v_{oA}}{t_A} = \frac{19,44 - 0}{12} = 1,62 m/s^2$$

$$s_{A-10} = v_{oA} t + \frac{a_A t_{AB}^2}{2} = 0 + \frac{1,62 \times 10^2}{2} = 81 m$$

Se debe recalculer la velocidad de A para un tiempo de 10 s, ya que el recorrido se da en este tiempo, el cual es menor al especificado en el ejercicio, de la Ecuación 2 se tiene:

$$v_{A-10} = v_{oA} + a_A t_{AB} = 16,2 m/s$$

De igual forma para el carro B se tiene:

$$v_B = 0 \rightarrow 100 km/h = 0 \rightarrow 27,77 m/s$$

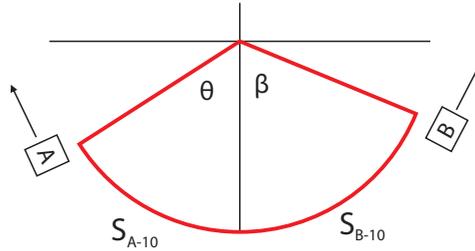
$$v_{fB} = v_{oB} + a_B t_B$$

$$a_B = \frac{v_{fB} - v_{oB}}{t_B} = \frac{27,77 - 0}{10} = 2,77 m/s^2$$

$$s_{B-10} = v_{oB} t + \frac{a_B t_{AB}^2}{2} = 0 + \frac{2,77 \times 10^2}{2} = 138,5 m$$

En el caso del carro B, la velocidad al cabo de 10 s es la máxima, ya que el tiempo de recorrido es el mismo que el tiempo de especificado en el ejercicio. A continuación, se deben ubicar las posiciones de los carros al cabo de los 10 s, (Figura 8), como se indica a continuación:

**Figura 8. Recorrido y posición final de los vehículos**



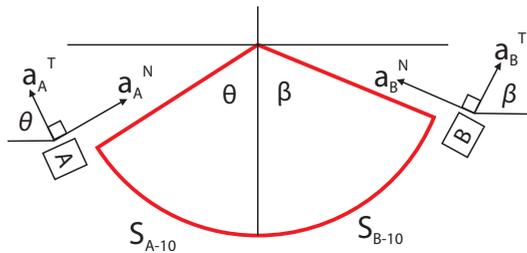
Fuente: elaboración propia.

$$\theta = \frac{s_{A-10}}{r} = \frac{81}{100} = 0,81 \text{ rad} = 46,409^\circ$$

$$\beta = \frac{s_{B-10}}{r} = \frac{138,5}{100} = 1,385 \text{ rad} = 79,354^\circ$$

Seguidamente, en estos puntos de localización se ubican y se descomponen las aceleraciones presentes en los dos carros como se observa en la siguiente figura:

**Figura 9. Dirección es de las aceleraciones**



Fuente: elaboración propia.

Aplicando la fórmula de aceleración relativa de la Ecuación 11 y ampliándola, dado que los dos carros se están moviendo por una pista circular, ambos tienen aceleración tangencial y normal, por consiguiente:

$$a_{B/A} = a_B^T + a_B^N - a_A^T - a_A^N$$

$$a_{B/A} = a_B^T + \frac{v_{B-10}^2}{r} - a_A^T - \frac{v_{A-10}^2}{r} \tag{12}$$

Para el caso de las aceleraciones del carro B:

$$a_B^T = a_B (\cos \beta i + \text{sen} \beta j) = 0,511 i + 2,722 j \text{ m/s}^2$$

$$a_B^N = \frac{v_{B-10}^2}{r} (-\cos(90 - \beta) i + \text{sen}(90 - \beta) j)$$

Aplicando identidades trigonométricas se puede deducir que:

$$\cos(90 - \beta) = \cos(90)\cos(\beta) + \text{sen}(90)\text{sen}(\beta) = \text{sen}(\beta)$$

$$\text{sen}(90 - \beta) = \text{sen}(90)\cos(\beta) - \cos(90)\text{sen}(\beta) = \cos(\beta)$$

Por tanto:

$$a_B^N = \frac{v_{B-10}^2}{r} (-\text{sen}\beta i + \cos\beta j) = -7.578i + 1.4246j \quad m/s^2$$

Para el carro A, de forma análoga, se tiene:

$$a_A^T = a_A (-\cos\theta i + \text{sen}\theta j) = -1.116i + 1.173j \quad (m/s^2)$$

$$a_A^N = \frac{v_{A-10}^2}{r} (\cos(90 - \theta)i + \text{sen}(90 - \theta)j)$$

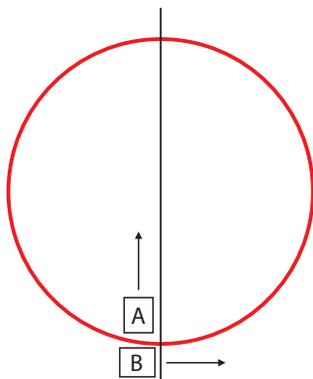
$$a_A^N = \frac{v_{A-10}^2}{r} (\text{sen}\theta i + \cos\theta j) = 1.9i + 1.809j \quad (m/s^2)$$

Reemplazando en la Ecuación 12 se tiene:

$$a_{B/A} = -7.851i + 1.1646j \quad (m/s^2)$$

**Ejemplo 1.7:** los dos carros de la Figura 10 parten del reposo desde la posición mostrada, el carro A acelera desde 0 hasta 80 km/h en 11 segundos (línea recta) y el carro B acelera desde 0 hasta 90 km/h en 10 segundos (pista circular de radio 120 metros). Determine la aceleración del carro A con respecto al carro B después de 11 segundos.

**Figura 10. Movimiento de vehículos – velocidades relativas**



Fuente: elaboración propia.

Para cada uno de los carros se debe calcular su velocidad, su aceleración, el espacio recorrido a lo largo de 10 s y su localización en la pista, de las ecuaciones 2 y 4 para el carro A se tiene:

$$v_A = 0 \rightarrow 80 \text{ km/h} = 0 \rightarrow 22.22 \text{ m/s}$$

$$v_{fA} = v_{oA} + a_A t_A$$

$$a_A = \frac{v_{fA} - v_{oA}}{t_A} = \frac{22.22}{11} = 2.02 \text{ m/s}^2$$

$$s_{A-10} = v_{oA} t + \frac{a_A t_{AB}^2}{2} = 0 + \frac{2.02 \times 11^2}{2} = 122.22 \text{ m}$$

En el caso del carro A, la velocidad al cabo de 11 s es máxima, ya que el tiempo de recorrido es el mismo que el tiempo de aceleración especificado en el ejercicio. De igual forma, para el carro B se tiene:

$$v_B = 0 \rightarrow 90 \text{ km/h} = 0 \rightarrow 25 \text{ m/s}$$

$$v_{fB} = v_{oB} + a_B t_B$$

$$a_B = \frac{v_{fB} - v_{oB}}{t_B} = \frac{25}{10} = 2.5 \text{ m/s}^2$$

En el caso del carro B la velocidad es la máxima debido a que el tiempo de recorrido es mayor al tiempo de aceleración y por qué el carro no puede sobrepasar su máxima velocidad, pero en el caso del espacio recorrido este se compone de un espacio a velocidad variable, Ecuación 4, y un espacio a velocidad constante, Ecuación 1:

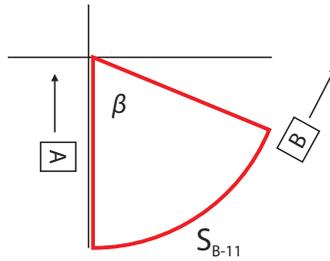
$$s_{B-10} = v_{oB} t + \frac{a_B t_{AB}^2}{2} = 0 + \frac{2.5 \times 10^2}{2} = 125 \text{ m}$$

$$s_{B-1} = v_B t = 25 \times 1 = 25 \text{ m}$$

De donde el espacio total recorrido por B es:

$$s_{B-11} = s_{B-10} + s_{B-1} = 150 \text{ m}$$

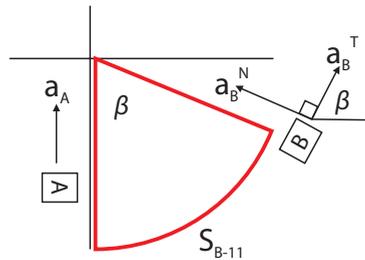
A continuación, se deben ubicar las posiciones de los carros al cabo de 11 s como se indica a continuación:

**Figura 11. Recorrido y posición final de los vehículos**

Fuente: elaboración propia.

$$\beta = \frac{S_{B-11}}{r} = \frac{150}{120} = 1.25 \text{ rad} = 71.619^\circ$$

Seguidamente, en estos puntos de localización se ubican y se descomponen las aceleraciones presentes en los dos carros como se observa en la siguiente figura:

**Figura 12. Dirección es de las aceleraciones**

Fuente: elaboración propia.

Aplicando la fórmula de aceleración relativa, Ecuación 11, y ampliándola dado que el carro B se está moviendo por una pista circular tiene aceleración tangencial y normal, por consiguiente:

$$\begin{aligned} a_{A/B} &= a_A - a_B^T - a_B^N \\ a_{A/B} &= a_A - a_B^T - \frac{v_{B-10}^2}{r} \end{aligned} \quad (13)$$

Para el carro A se tiene:

$$a_A = 2.02 \text{ j} \left( \text{m} / \text{s}^2 \right)$$

Para el carro B, debido a que ya el tiempo de aceleración pasó y se encuentra en velocidad constante su aceleración tangencial es cero, por consiguiente se tiene:

$$a_B^T = 0$$

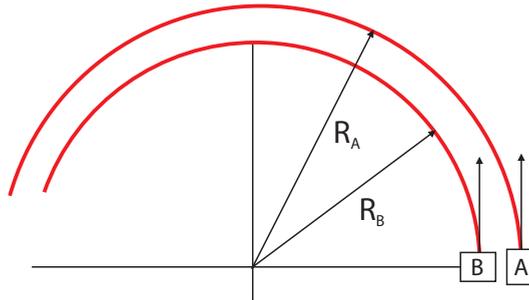
$$a_B^N = \frac{v_{B-11}^2}{r} = \frac{v_{B-11}^2}{r} (-\text{sen} \beta \text{ i} + \text{cos} \beta \text{ j}) = -4.942 \text{ i} + 1.642 \text{ j}$$

Reemplazando en la Ecuación 13 se tiene:

$$a_{B/A} = 4.942i + 0.378j \left( m/s^2 \right)$$

**Ejemplo 1.8:** en el instante mostrado, el auto de carreras A sobrepasa al B con una velocidad relativa ( $v_{A/B} = 1 \text{ m/s}$ ). Si se sabe que las velocidades de los carros son constantes y que la aceleración relativa de A con respecto a B es ( $a_{A/B} = 0.3 \text{ m/s}^2$ ) apuntando hacia el centro de giro. Determinar las velocidades de los carros, teniendo en cuenta que  $R_A = 105 \text{ m}$  y  $R_B = 100 \text{ m}$

**Figura 13. Movimiento de vehículos – velocidades relativas**



Fuente: elaboración propia.

De la fórmula de velocidades relativas, Ecuación 10, se tiene:

$${}_a v_{A/B} = v_A - v_B = 1 \text{ m/s } j \quad (14)$$

De la fórmula de aceleraciones relativas, Ecuación 11, y teniendo en cuenta que los carros tienen solo aceleración normal, ya que la aceleración tangencial de los carros es cero (velocidad constante) se tiene:

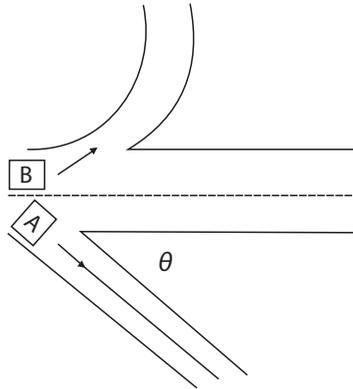
$$\begin{aligned} a_{A/B} &= -a_A^N - (-a_B^N) = -0.3 \text{ m/s}^2 i \\ a_{A/B} &= -\frac{v_A^2}{R_A} + \frac{v_B^2}{R_B} = -0.3 \text{ m/s}^2 (2) \end{aligned} \quad (15)$$

Reemplazando la Ecuación 14 en la Ecuación 15:

$$\begin{aligned} -\frac{(v_B + 1)^2}{R_A} + \frac{v_B^2}{R_B} &= -0.3 \\ -R_B (v_B + 1)^2 + R_A v_B^2 &= -0.3 R_B R_A \\ -R_B v_B^2 - 2 R_B v_B - R_B + R_A v_B^2 &= -0.3 R_B R_A \\ -5 v_B^2 - 200 v_B + 3050 &= 0 \\ v_B &= 11.78 \text{ m/s} \\ v_A &= 12.78 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.9:** los dos automóviles de la Figura 14 están en un semáforo (línea horizontal), si se sabe que los dos carros arrancan con rumbos diferentes, el carro A con  $a_A = 2m/s^2$  toma una carretera con una desviación en línea recta de  $35^\circ$  a su derecha, el carro B con  $a_B = 1.5m/s^2$  toma un retorno circular de radio  $200m$  a su izquierda. Para los datos proporcionados determinar la velocidad y aceleración del carro B con respecto al carro A al cabo de 8 s de haber arrancado.

**Figura 14. Movimiento de vehículos – velocidades relativas**



Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo

Para cada uno de los carros se debe calcular la velocidad, aceleración, el espacio recorrido a lo largo de 8 s y la localización en la pista, de las ecuaciones 2 y 4 se tiene:

- Carro A

$$v_f = v_o + at = 0 + 2 \times 8 = 16 \text{ m/s}$$

$$s = v_o t + \frac{at^2}{2} = \frac{2 \times 8^2}{2} = 64 \text{ m}$$

- Carro B

$$v_f = v_o + at = 0 + 1.5 \times 8 = 12 \text{ m/s}$$

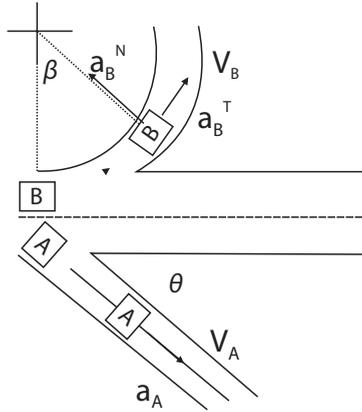
$$s = v_o t + \frac{at^2}{2} = \frac{1.5 \times 8^2}{2} = 48 \text{ m}$$

Adicionalmente, para el carro B se debe calcular e identificar su ubicación en la pista circular, como se indica a continuación:

$$\beta = \frac{s}{r} = \frac{48}{200} = 0.24 \text{ rad} = 13.7^\circ$$

Según los cálculos realizados, en la siguiente figura se detallan las velocidades, las aceleraciones y los puntos de ubicación de los autos al cabo de 8 s:

Figura 15. Ubicación geométrica de los autos



Fuente: elaboración propia.

De la Ecuación 10 de velocidades relativas se tiene:

$$\begin{aligned} v_{B/A} &= v_B - v_A \\ v_{B/A} &= v_B (\cos \beta i + \operatorname{sen} \beta j) - v_A (\cos \theta i - \operatorname{sen} \theta j) \\ v_{B/A} &= 10.64 i + 5.54 j - 13.1 i + 9.17 j \\ v_{B/A} &= -2.46 i + 14.71 j \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

De la Ecuación 11 de aceleraciones relativas y ampliando para el carro B que se mueve por una pista circular se tiene:

$$\begin{aligned} a_{B/A} &= a_B^T + a_B^N - a_A \\ a_{B/A} &= a_B (\cos \beta i + \operatorname{sen} \beta j) + \frac{v_B^2}{r} (-\operatorname{sen} \beta i + \cos \beta j) - a_A (\cos \theta i - \operatorname{sen} \theta j) \\ a_{B/A} &= 1.33 i + 0.692 j - 5.319 i + 10.218 j - 1.638 i + 1.147 j \\ a_{B/A} &= -5.627 i + 12.057 j \text{ (m/s}^2\text{)} \end{aligned}$$



## CAPÍTULO 2

# TRABAJO Y ENERGÍA

El principio de trabajo y energía se deriva de la segunda Ley de Newton y presenta otra visión mediante la cual se pueden desarrollar los problemas de la dinámica del movimiento de los objetos, como se indica a continuación.

### 2.1. Principio de trabajo y energía

El principio de trabajo y energía es una forma de trabajar algunos ejercicios, en los cuales se tiene en cuenta la aplicación de las fuerzas en determinado espacio dado del movimiento. Este principio se deriva de la formula general de la Segunda Ley de Newton, de donde se tiene (Navarro y Arguedas, 2020):

$$\sum F = m a \quad (16)$$

De la Ecuación 16 se tiene que la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, por consiguiente:

$$\sum F = m \frac{dv}{dt} \quad (17)$$

Para poder insertar el espacio en la Ecuación 17 se multiplica el término de la derecha por la derivada del espacio con respecto al espacio, lo cual da como resultado la unidad, lo cual no afecta la ecuación:

$$\sum F = m \frac{dv}{dt} \frac{ds}{ds} \quad (18)$$

Reorganizando la ecuación anterior y teniendo en cuenta que la derivada del espacio con respecto al tiempo en la velocidad se tiene:

$$\sum F = m \frac{ds}{dt} \frac{dv}{ds} = m v \frac{dv}{ds}$$

$$\sum F ds = m v dv \quad (19)$$

Realizando la integral a cada lado de la ecuación y teniendo que los límites para las integrales son: para el espacio va de cero (inicio del recorrido) hasta un espacio S por definir y para la velocidad los límites van desde una velocidad inicial ( $v_1$ ) y para un espacio S del recorrido la velocidad es ( $v_2$ ), se tiene:

$$\int_0^S \sum F ds = \int_{v_1}^{v_2} m v dv$$

$$\int_0^S \sum F ds = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \int_0^S \sum F ds = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad (20)$$

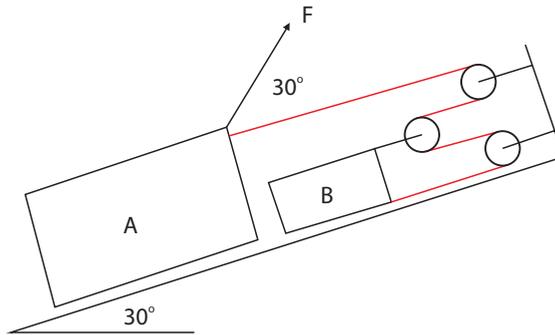
Esta última ecuación, conocida como la ecuación del principio de trabajo y energía, indica que la energía cinética de un cuerpo en un primer instante se ve afectada por la sumatoria de las integrales de las fuerzas que actúan sobre él en determinado espacio de su recorrido, por consiguiente, se obtiene la energía cinética en un segundo instante del recorrido. Algunas de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la fricción, fuerzas puntuales, fuerzas dependientes del espacio, fuerzas de resortes, entre otras.

A continuación, se desarrollarán varios ejemplos de aplicaciones en las cuales es útil el empleo del principio de trabajo y energía para su solución.

**Ejemplo 2.1:** aplicación con referencia a velocidades dependientes y 2 Ley de Newton. Para el sistema de la figura determinar la aceleración relativa del bloque B con respecto al bloque A ( $a_{B/A}$ ) teniendo en cuenta que se conocen los siguientes datos: la masa de los bloques es  $m_A$  y  $m_B$ , respectivamente, el coeficiente de fricción de los bloques con el piso es  $\mu$  y la fuerza aplicada es F.

**Matlab.** Con el fin de evaluar la influencia del ángulo de aplicación de la fuerza F en la magnitud de la tensión y la aceleración relativa ( $a_{B/A}$ ), variar el ángulo entre  $10^\circ$  y  $80^\circ$  con intervalos de  $10^\circ$  y graficar los resultados.

Figura 16. Aplicación de movimiento de bloques

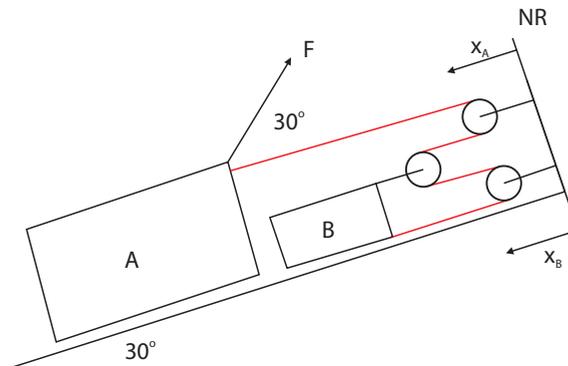


Fuente: elaboración propia.

**Desarrollo**

Del diagrama de cuerpo libre de los bloques y asumiendo que el bloque A baja, se tiene:

Figura 17. Movimiento de bloques y direcciones



Fuente: elaboración propia.

De la Figura 17 y de los *tips* dados en la sección 1.2.1 se desarrolla la ecuación de la posición de los bloques y la longitud de la cuerda:

$$L = 3x_A + x_B \quad (21)$$

Derivando la Ecuación 21 con respecto al tiempo se determina la ecuación que relaciona las velocidades de los bloques:

$$0 = 3v_A + v_B \quad (22)$$

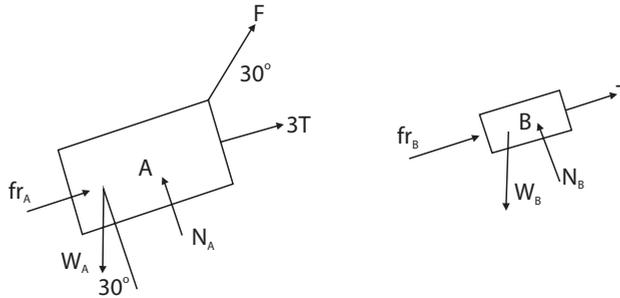
Derivando la Ecuación 22, con respecto al tiempo, se determina la ecuación que relaciona las aceleraciones de los bloques:

$$0 = 3a_A + a_B$$

$$a_A = -\frac{a_B}{3} \quad (23)$$

Seguidamente en la Figura 18 se desarrollan los diagramas de cuerpo libre de los bloques con las fuerzas que interactúan en su movimiento:

**Figura 18. Diagramas de cuerpo libre de los bloques**



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del bloque A, aplicando la 2 Ley de Newton, Ecuación 16, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum F_{A-Perpendicular \text{ al sentido del Movimiento}} &= 0 \\ N_A - w_A \cos 30 + F \text{sen} 30 &= 0 \\ N_A &= w_A \cos 30 - F \text{sen} 30 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sum F_{A-Sentido \text{ del Movimiento}} &= m_A a_A \\ w_A \text{sen} 30 - fr_A - 3T - F \cos 30 &= m_A a_A \\ w_A \text{sen} 30 - \mu N_A - 3T - F \cos 30 &= m_A a_A \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de  $N_A$ , Ecuación 24, en esta última ecuación se obtiene:

$$w_A \text{sen} 30 - \mu w_A \cos 30 + \mu F \text{sen} 30 - 3T - F \cos 30 = m_A a_A$$

Despejando la aceleración ( $a_A$ ):

$$\frac{w_A \text{sen} 30 - \mu w_A \cos 30 + \mu F \text{sen} 30 - 3T - F \cos 30}{m_A} = a_A \quad (25)$$

Reemplazando la Ecuación 23 en la Ecuación 25 se tiene:

$$-3 \frac{w_A \text{sen} 30 - \mu w_A \cos 30 + \mu F \text{sen} 30 - 3T - F \cos 30}{m_A} = a_B \quad (26)$$

Del diagrama de cuerpo libre del bloque B se tiene:

$$\begin{aligned}\sum F_{B-\text{Perpendicular al sentido del Movimiento}} &= 0 \\ N_B - w_B \cos 30 &= 0 \\ N_B &= w_B \cos 30\end{aligned}\quad (27)$$

$$\begin{aligned}\sum F_{B-\text{Sentido del Movimiento}} &= m_B a_B \\ -w_B \text{sen}30 - f_r + T &= m_B a_B \\ -w_B \text{sen}30 - \mu N_B + T &= m_B a_B\end{aligned}$$

Reemplazando el valor de  $N_B$ , Ecuación 27, en esta última ecuación se obtiene:

$$-w_B \text{sen}30 - \mu w_B \cos 30 + T = m_B a_B$$

Despejando la aceleración de B ( $a_B$ ):

$$\frac{-w_B \text{sen}30 - \mu w_B \cos 30 + T}{m_B} = a_B \quad (28)$$

Igualando las ecuaciones 26 y 28 y despejando la tensión del cable se tiene:

$$\begin{aligned}-3 \frac{w_A \text{sen}30 - \mu w_A \cos 30 + \mu F \text{sen}30 - 3T - F \cos 30}{m_A} &= \frac{-w_B \text{sen}30 - \mu w_B \cos 30 + T}{m_B} \\ T &= (-3 m_B w_A \text{sen}30 + 3 m_B \mu w_A \cos 30 - 3 m_B \mu F \text{sen}30 \\ &+ 3 m_B F \cos 30 + m_A w_B \text{sen}30 + m_A \mu w_B \cos 30) / (m_A - 9 m_B)\end{aligned}\quad (29)$$

De esta última ecuación se determina la tensión del cable, la cual permitirá determinar la aceleración del bloque B por medio de la Ecuación 26 y la del bloque A con la Ecuación 23, por último, se determina la aceleración relativa del bloque B con respecto al bloque A con la Ecuación 11.

**Script en Matlab**

```

% % Velocidades dependientes y relativas
clc
clear
% Ejemplo 1.6
% Aceleración relativa y Tensión en el cable
% Suponiendo mA = 10 kg, mB=20 kg, F= 1000 N y mu = 0.3

mA = 40; mB = 15; F = 100; mu = 0.05;
g = 9.81;
% Cálculo del peso de los bloques
WA = mA*g; WB = mB*g;

ang_theta = 10:5:80; % ángulo en grados
% Convertir el ángulo a radianes
rad_theta = ang_theta*pi/180;

% Ecuación para la magnitud de la tensión en el cable
T= (-3*mB*WA*sin(30*pi/180) + 3*mB*mu*WA*cos(30*pi/180)-3*mB*mu*F.*sin(rad_theta) +3*mB*F.*cos(rad_theta)+mA*WB.*sin(30*pi/180)+mA*mu*WB.*cos(rad_theta))./(mA-9*mB);

figure1 = figure('Color',[1 1 1]);
plot(ang_theta,T);
grid on
title('Magnitud de la Tensión del cable','FontSize',14);
xlabel('Ángulo de F con el cable [^o]','FontSize',12);
ylabel('Tensión [N]','FontSize',12);

print -dpng EJE_1-6a.png %Guarda la Figura

% Cálculo de la aceleración relativa
aA = (WA*sin(30*pi/180)-mu*WA*cos(30*pi/180) +mu*F.*sin(rad_theta)-3.*T-F*cos(rad_theta))./mA;
aB = -3*(WA*sin(30*pi/180)-mu*WA*cos(30*pi/180) +mu*F.*sin(rad_theta)-3.*T-F*cos(rad_theta))./mA;

aA_B = aB - aA;

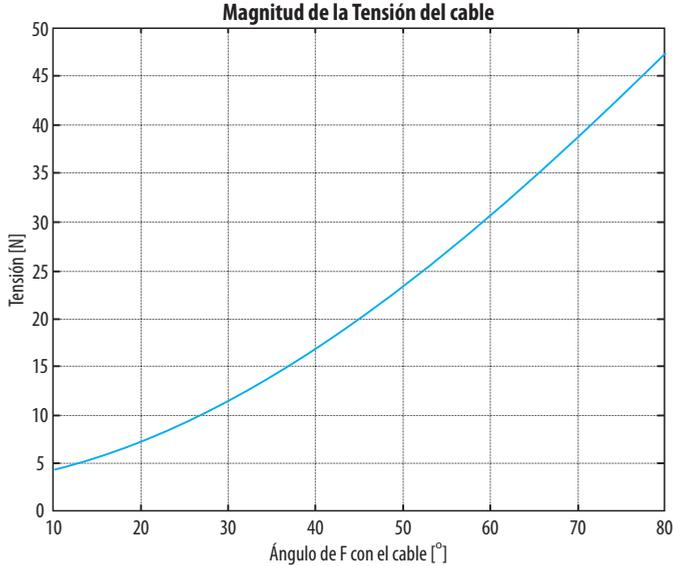
figure2 = figure('Color',[1 1 1]);
plot(ang_theta,aA_B);
grid on
title('Aceleración relativa de B respecto a A','FontSize',14);
xlabel('Ángulo de F con el cable [^o]','FontSize',12);
ylabel('a_{A/B} [m/s^2]','FontSize',12);

print -dpng EJE_1-6b.png % Guarda la Figura

```

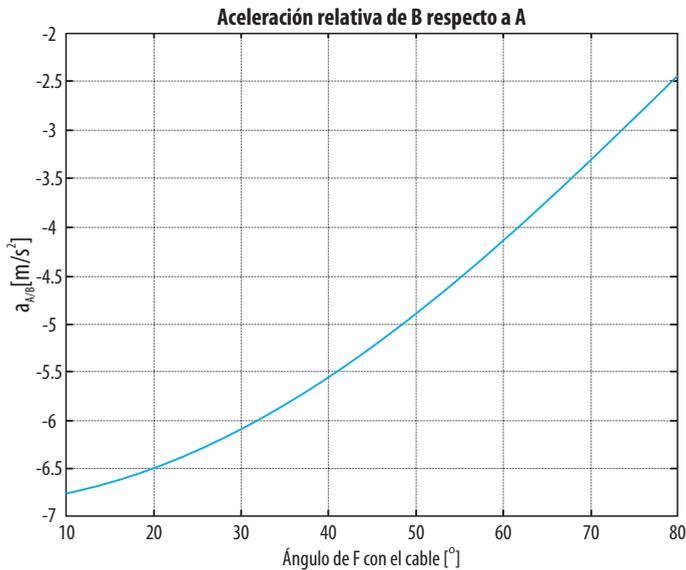
Las figuras obtenidas muestran que tanto la tensión de cuerda como la aceleración relativa del bloque B con respecto al bloque A aumentan a medida que el ángulo que forma la fuerza  $F$  con el cable también aumenta.

**Figura 19. Tensión del cable vs. ángulo de aplicación la fuerza  $F$**



Fuente: elaboración propia.

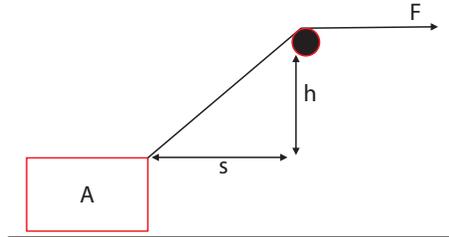
**Figura 20. Aceleración relativa vs. ángulo de aplicación de la fuerza**



Fuente: elaboración propia.

**Ejemplo 2.2:** sabiendo que el bloque de la figura parte del reposo  $s = 6 \text{ m}$ ,  $h = 4 \text{ ft}$  y que su coeficiente de rozamiento es  $\mu=0.12$ , determinar la fuerza  $F$  que se debe aplicar para que el bloque A (2 lb) se mueva 1 m (3,28 ft) y alcance una velocidad de 3 ft/s.

**Figura 21. Bloque con fuerza dependiente del espacio**

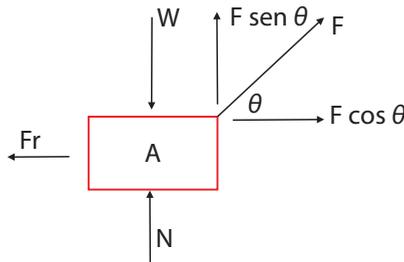


Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo conceptual

**Tips:** lo primero que se debe desarrollar es colocar todo el ejercicio en un sistema de unidades único, en este caso el mejor sería el sistema inglés por consiguiente se tiene:  $s = 6 \text{ m} = 19.685 \text{ ft}$ , movimiento del bloque A ( $1 \text{ m} = 3.28 \text{ ft}$ ). Desarrollando el diagrama de cuerpo libre del bloque A se tiene:

**Figura 22. Diagrama de cuerpo libre del bloque A**



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre se tiene:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = W - F \text{sen} \theta \quad (30)$$

$$\text{sen} \theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \quad (31)$$

$$\text{cos} \theta = \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} \quad (32)$$

Aplicando el principio de trabajo y energía, Ecuación 20, se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \int Fr ds + \int F \cos \theta ds = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (33)$$

Reemplazando las ecuaciones 30, 31 y 32 en la Ecuación 33 se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 - \int \mu N ds + \int F \cos \theta ds &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ \frac{1}{2}mv_1^2 - \int \mu (W - F \operatorname{sen} \theta) ds + \int F \cos \theta ds &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ \frac{1}{2}mv_1^2 - \int \mu \left( W - F \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \right) ds + \int F \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds &= \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (34) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la posición inicial y la posición final del bloque se tienen los siguientes límites para las integrales:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \int_{s-3,28}^s \mu \left( W - F \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \right) ds + \int_{s-3,28}^s F \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (35)$$

### Desarrollando las integrales

Para la fricción se tiene:

$$-\int_{s-3,28}^s \mu \left( W - F \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \right) ds = -\mu W s + \mu F h \int_{s-3,28}^s \frac{1}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds$$

Aplicando cambio de variable e integración inversa (cotangente) se tiene:

$$\begin{aligned} s &= h \cot \theta \\ ds &= -h(1 + \cot^2 \theta) d\theta \end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} &= -\mu W s - \mu F h \int_{s-3,28}^s \frac{h(1 + \cot^2 \theta)}{\sqrt{h^2 + h^2 \cot^2 \theta}} d\theta \\ &= -\mu W s - \mu F h \int_{s-3,28}^s \frac{h(1 + \cot^2 \theta)}{h\sqrt{1 + \cot^2 \theta}} d\theta \\ &= -\mu W s - \mu F h \int_{s-3,28}^s \sqrt{1 + \cot^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\mu W s - \mu F h \int_{s-3,28}^s \operatorname{cosec} \theta d\theta \\
&= -\mu W s - \mu F h \ln |\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta| \\
&= -\mu W s - \mu F h \ln \left| \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} + \frac{1}{\tan \theta} \right| \\
-\int_{s-3,28}^s \mu \left( W - F \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \right) ds &= -\mu W s - \mu F h \ln \left| \frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{h} + \frac{s}{h} \right| \quad (36)
\end{aligned}$$

Para la fuerza se tiene:

$$\int_{s-3,28}^s F \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds$$

Aplicando cambio de variable se tiene:

$$\begin{aligned}
r &= h^2 + s^2 \\
dr &= 2s ds
\end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\int_{s-3,28}^s F \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds = \int_{s-3,28}^s F \frac{s}{\sqrt{r}} \frac{dr}{2s} = F \sqrt{r} = F \sqrt{h^2 + s^2} \quad (37)$$

Reemplazando las ecuaciones 36 y 37 en la Ecuación 35 se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} m v_1^2 - \int_{16,405}^{19,685} \mu \left( W - F \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \right) ds + \int_{16,405}^{19,685} F \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds &= \frac{1}{2} m v_2^2 \\
\frac{1}{2} m v_1^2 - \mu W s - \mu F h \ln \left| \frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{h} + \frac{s}{h} \right| + F \sqrt{h^2 + s^2} &= \frac{1}{2} m v_2^2 \quad (38)
\end{aligned}$$

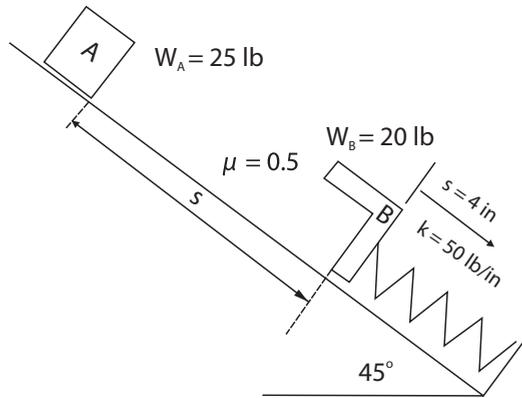
Evaluando para los límites determinados se tiene:

$$\begin{aligned}
-0,7872 - 0,6578 F + 3,20 F &= 0,279 \\
F &= 0,4196 lb
\end{aligned}$$

**Ejemplo 2.3:** si se sabe que el bloque A de la figura se encaja en el bloque B cuando chocan, determine el espacio S desde donde cae el bloque A para que el resorte se comprima 4 in. Adicionalmente se sabe que el resorte en su longitud libre tiene ( $L = 9$  in) y que esta inicialmente comprimido por el peso del bloque B.

**Matlab.** Desarrollar un programa con el fin de evaluar la influencia de la inclinación de la rampa en la distancia requerida para comprimir el resorte 4 in.

**Figura 23. Bloque con sistema de resorte**



Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo conceptual

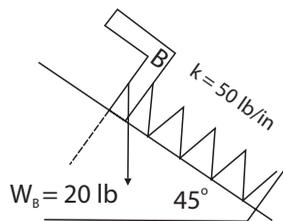
Inicialmente se deben colocar todas las unidades del ejercicio en el Sistema Ingles:

$$k = 50 \frac{lb}{in} = 600 lb / ft$$

$$s = 4 in = 0.333 ft$$

Por el enunciado y la Figura 24 se sabe que el resorte no está en su longitud libre, por lo que se debe calcular cuánto está comprimido por efecto de la parte del peso del bloque B que actúa sobre el:

**Figura 24. Compresión del resorte por efecto del bloque B**



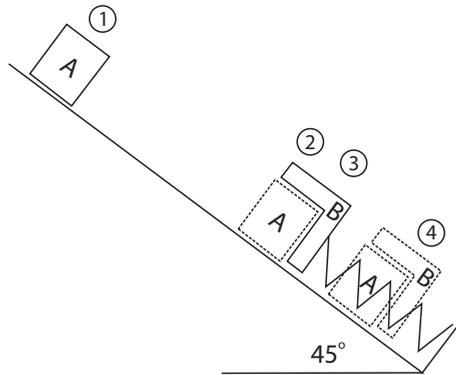
Fuente: elaboración propia.

$$y = \frac{F}{k} = \frac{w_B \cdot \text{sen} \theta}{k} = \frac{14.14}{600} = 0.0235 ft$$

**Tips:** en muchos ejercicios es importante detallar las etapas del movimiento de los bloques e indicar que tipos de ecuaciones se puede utilizar en cada etapa.

## Descripción de las etapas del movimiento de los bloques

Figura 25. Etapas del movimiento de los bloques



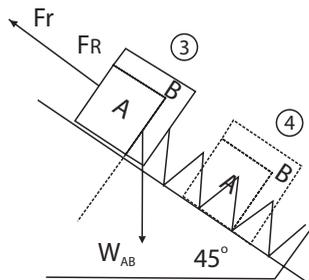
Fuente: elaboración propia.

- **Etapa 1-2:** el bloque A va desde el instante mostrado, Figura 25, hasta antes de tocar el bloque B bajo la acción de las fuerzas dadas por el peso y la fricción (Trabajo y Energía).
- **Etapa 2-3:** el bloque A choca y se une al bloque B (principio de cantidad de movimiento – sección 3.2.2).
- **Etapa 3-4:** los dos bloques comprimen el resorte hasta detenerse ( $v_4 = 0$ ) bajo la acción de las fuerzas dadas por el peso, el resorte y la fricción (en un espacio de 0.333 ft) (principio de trabajo y energía).

**Tips:** una vez descrito el movimiento de los bloques es importante determinar por donde se empieza el ejercicio, en este caso como se solicitan datos de entrada y se tienen los datos de salida se realiza la reconstrucción del movimiento (de las etapas finales a las iniciales)

### Etapa 3-4 principio de trabajo y energía

Figura 26. Diagrama de cuerpo libre bloques A y B – etapas 3 y 4



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre de los dos bloques, Figura 26, y aplicando el principio de trabajo y energía, se tiene:

$$N = W_{AB} \cos 45^\circ, v_{AB4} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_{AB} v_{AB3}^2 - \int_0^{0.333} F_r ds + \int_0^{0.333} W_{AB} \text{sen} 45 ds - \int_{0.0235}^{0.356} F_r ds_1 &= \frac{1}{2} m_{AB} v_{AB4}^2 \\ \frac{1}{2} m_{AB} v_{AB3}^2 - \mu m_{AB} g \cos 45 s + m_{AB} g \text{sen} 45 s - \frac{1}{2} k s_1^2 &= \frac{1}{2} m_{AB} v_{AB4}^2 \\ v_{AB3}^2 - 2 \mu g \cos 45 s + 2 g \text{sen} 45 s - \frac{k}{m_{AB}} s_1^2 &= 0 \\ v_{AB3} &= \sqrt{2 \mu g \cos 45 s - 2 g \text{sen} 45 s + \frac{k}{m_{AB}} s_1^2} \end{aligned}$$

Evaluando para los límites dados se tiene:

$$v_{AB3} = 6.8258 \text{ ft} / \text{s}$$

### **Etapa 2-3 principio de cantidad de movimiento**

De la sección 3.2.2 del principio de cantidad de movimiento y del movimiento de los cuerpos etapas 2 y 3 se tiene:

$$\begin{aligned} m_A v_{A2} + m_B v_{B2} &= (m_A + m_B) v_{AB3} \\ m_A v_{A2} + 0 &= (m_A + m_B) v_{AB3} \\ v_{A2} &= 12.286 \text{ ft} / \text{s} \end{aligned}$$

### **Etapa 1-2 Principio de trabajo y energía**

De forma similar al movimiento dado entre las etapas 3 y 4 y entre las etapas 1 y 2 se da el movimiento del bloque A bajo la acción de las fuerzas dadas por el peso y la fricción, aplicando el principio de trabajo y energía, se tiene:

$$\begin{aligned} N &= W_A \cos 45 \\ \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 - \int_0^s F_r ds + \int_0^s W_A \text{sen} 45 ds &= \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 \\ -\mu m_A g \cos 45 s + m_A g \text{sen} 45 s &= \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 \\ -2 \mu g \cos 45 s + 2 g \text{sen} 45 s &= v_{A2}^2 \\ s &= \frac{v_{A2}^2}{-2 \mu g \cos 45 + 2 g \text{sen} 45} \\ s &= 6.63 \text{ ft} \end{aligned}$$

## Script en Matlab

```

%% Trabajo y Energía
clc
clear
% Ejemplo 2.2
% Evaluar la distancia requerida variando la inclinación de la rampa
% Datos de entrada WA, WB, mu, k,

% Pesos de los bloques
WA = 25; WB = 20;
% Coeficiente de fricción
mu = 0.5;
% Constante de rigidez del resorte
k = 600;
% Distancia que se debe comprimir el resorte
s = 4/12;
% Ángulo de inclinación de la rampa
ang_theta = 30:5:60;
% Convertir el ángulo a radianes
rad_theta = ang_theta*pi/180;
% Longitud comprimida inicial
y = WB.*sin(rad_theta)/k;
% Longitud comprimida final
sf = s+y;

% Etapa 3-4 principio de trabajo y energía
% Cálculo de la velocidad al inicio de la etapa
V_AB3 = (2*32.2*s*(mu.*cos(rad_theta)-sin(rad_theta))+k*(sf.^2-y.^2)/
((WA+WB)/32.2)).^0.5;

% Etapa 2-3 principio de conservación de energía
% Cálculo de la velocidad del bloque A en el instante del impacto
V_A2 = (WA+WB).*V_AB3/WA;

% Etapa 1-2 principio de trabajo y energía
% Cálculo de la distancia S requerida
S = V_A2.^2./(2*32.2.*(-mu.*cos(rad_theta)+sin(rad_theta)));

figure2 = figure('Color',[1 1 1]);
plot(ang_theta,S);
grid on
title('Distancia requerida para comprimir el resorte','FontSize',14);
xlabel('Ángulo de la rampa [^\circ]','FontSize',14);
ylabel('Distancia requerida, S [ft]','FontSize',14);

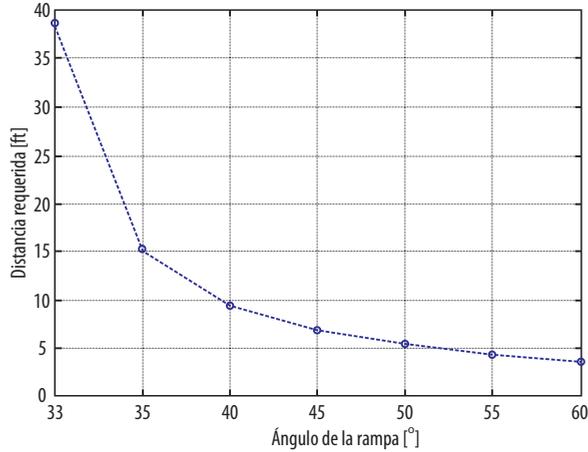
print -dpng EJE_2-2.png % Guarda la Figura

```

La Figura 27 muestra que a medida que se aumenta el ángulo de inclinación de la rampa se requiere una menor distancia para comprimir el resorte en 4 in. También se observa que con

ángulos mayores a  $50^\circ$  la distancia requerida para comprimir el resorte varía muy poco, muy contrario de lo que ocurre para ángulos menores, como se observa en la siguiente gráfica:

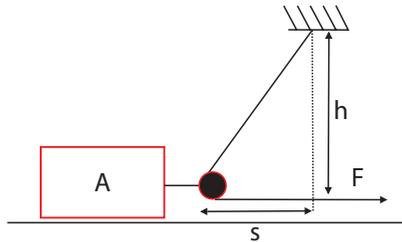
**Figura 27. Ángulo de la rampa vs. distancia requerida**  
Distancia requerida para comprimir el resorte



Fuente: elaboración propia.

**Ejemplo 2.4:** sabiendo que el bloque A parte del reposo,  $s = 6\text{ m}$ ,  $h = 4\text{ ft}$  y que su coeficiente de rozamiento es  $\mu = 0.12$ , determinar la fuerza  $F$  que se debe aplicar para que el bloque A (2 lb) se mueva 1 m (3,28 ft) y alcance una velocidad de 3 ft/s.

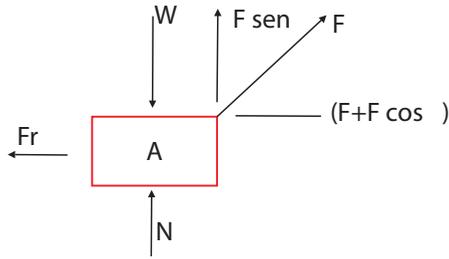
**Figura 28. Bloque bajo la acción de una fuerza dependiente del espacio**



Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo conceptual

Lo primero que se debe desarrollar es colocar todo el ejercicio en un sistema de unidades único, en este caso el mejor sería el sistema inglés por consiguiente se tiene:  $s = 6\text{ m} = 19.685\text{ ft}$ , movimiento del bloque A ( $1\text{ m} = 3,28\text{ ft}$ ). En la siguiente figura se desarrolla el diagrama de cuerpo libre del movimiento del bloque A:

**Figura 29. Diagrama de cuerpo libre del bloque A**

Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre se tiene:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = W - F \text{sen} \theta \quad (39)$$

$$\text{sen} \theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \quad (40)$$

$$\text{cos} \theta = \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} \quad (41)$$

Aplicando el principio de trabajo y energía se tiene:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \int F_r ds + \int (F + F \text{cos} \theta) ds = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad (42)$$

Reemplazando las ecuaciones 39, 40 y 41 en la Ecuación 42 se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_1^2 - \int \mu N ds + \int (F + F \text{cos} \theta) ds &= \frac{1}{2} m v_2^2 \\ \frac{1}{2} m v_1^2 - \int \mu (W - F \text{sen} \theta) ds + \int (F + F \text{cos} \theta) ds &= \frac{1}{2} m v_2^2 \\ \frac{1}{2} m v_1^2 - \int \mu \left( W - F \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \right) ds + \int F + F \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds &= \frac{1}{2} m v_2^2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la posición inicial y la posición final del bloque, se tienen los siguientes límites para las integrales:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \int_{s=3,28}^s \mu \left( W - F \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \right) ds + \int_{s=3,28}^s F + F \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad (42)$$

**Desarrollando las integrales**

Para la fricción se tiene:

$$-\int_{s-3,28}^s \mu \left( W - F \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \right) ds = -\mu W s + \mu F h \int_{s-3,28}^s \frac{1}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds$$

Aplicando cambio de variable e integración inversa (cotangente) se tiene:

$$s = h \cot \theta \\ ds = -h(1 + \cot^2 \theta) d\theta$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} &= -\mu W s - \mu F h \int_{s-3,28}^s \frac{h(1 + \cot^2 \theta)}{\sqrt{h^2 + h^2 \cot^2 \theta}} d\theta \\ &= -\mu W s - \mu F h \int_{s-3,28}^s \sqrt{1 + \cot^2 \theta} d\theta \\ &= -\mu W s - \mu F h \int_{s-3,28}^s \operatorname{cosec} \theta d\theta \\ &= -\mu W s - \mu F h \ln |\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta| \\ &= -\mu W s - \mu F h \ln \left| \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} + \frac{1}{\tan \theta} \right| \\ -\int_{s-3,28}^s \mu \left( W - F \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \right) ds &= -\mu W s - \mu F h \ln \left| \frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{h} + \frac{s}{h} \right| \quad (43) \end{aligned}$$

Para la fuerza se tiene:

$$\int_{s-3,28}^s F + F \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds$$

Aplicando cambio de variable se tiene:

$$r = h^2 + s^2 \\ dr = 2s ds$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} \int_{s-3,28}^s F + F \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds &= Fs + F \int_{s-3,28}^s \frac{s}{\sqrt{r}} \frac{2 dr}{s} = Fs + 2F \int_{s-3,28}^s r^{-1/2} dr \\ \int_{s-3,28}^s F \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds &= Fs + F\sqrt{r} = Fs + F\sqrt{h^2 + s^2} \quad (44) \end{aligned}$$

Reemplazando las ecuaciones 43 y 44 en la Ecuación 42 se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \int_{16,405}^{19,685} \mu \left( W - F \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}} \right) ds + \int_{16,405}^{19,685} Fs + F \frac{s}{\sqrt{h^2 + s^2}} ds = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \mu W s - \mu F h \ln \left| \frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{h} + \frac{s}{h} \right| + Fs + F \sqrt{h^2 + s^2} = \frac{1}{2}mv_2^2$$

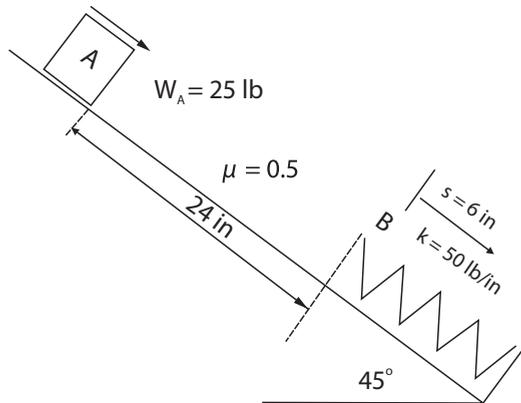
Evaluando para los límites determinados se tiene:

$$-0,7872 - 0,6578F + 3,28F + 3,20F = 0,279$$

$$F = 0,183 \text{ lb}$$

**Ejemplo 2.5:** determinar la velocidad  $V_A$  del bloque A si se sabe que es capaz de comprimir el resorte de la figura  $s = 6$  in. El resorte está en su longitud libre.

**Figura 30. Bloque en caída con amortiguamiento**



Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo conceptual

Se deben colocar todas las unidades en el Sistema Ingles:

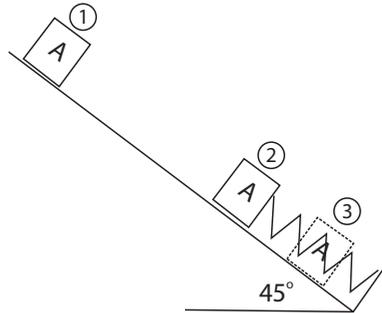
$$k = 50 \frac{\text{lb}}{\text{in}} = 600 \text{ lb} / \text{ft}$$

$$s_1 = 24 \text{ in} = 2 \text{ ft}$$

$$s = 6 \text{ in} = 0.5 \text{ ft}$$

### Descripción de las etapas del movimiento del bloque

Figura 31. Etapas del movimiento del bloque



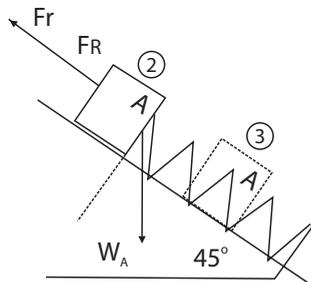
Fuente: elaboración propia.

- **Etapa 1-2:** el bloque de la Figura 31 va desde el instante mostrado hasta antes de tocar el resorte, bajo la acción de las fuerzas dadas por el peso y la fricción (principio de trabajo y energía).
- **Etapa 2-3:** el bloque va desde el instante que toca el resorte hasta detenerse ( $v_3=0$ ) bajo la acción de las fuerzas dadas por el peso, el resorte y la fricción (principio de trabajo y energía).

**Tips:** una vez descrito el movimiento del bloque es importante determinar por donde se empieza el ejercicio, en este caso como se solicitan datos de entrada y se tienen los datos de salida se realiza la reconstrucción del movimiento (desde las etapas finales a las iniciales).

### Etapa 2-3 Principio de trabajo y energía

Figura 32. Diagrama de cuerpo libre bloque A – etapas 2 y 3



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del bloque, Figura 32, y aplicando el principio de trabajo y energía, se tiene:

$$N = W \cos 45, v_3 = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \int_0^{0.5} F_r ds + \int_0^{0.5} W \sin 45 ds - \int_0^{0.5} F_R ds = \frac{1}{2} m v_3^2$$

$$v_2 = 13.4839 \text{ ft} / \text{s}$$

**Etapa 1-2 Principio de trabajo y energía**

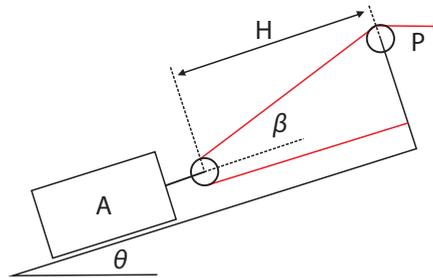
De forma similar al movimiento dado entre las etapas 2 y 3, entre las etapas 1 y 2 se da el movimiento del bloque A bajo la acción de las fuerzas dadas por el peso y la fricción, aplicando el principio de trabajo y energía, se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \int_0^2 F_r ds + \int_0^2 W \text{sen}45 ds = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$v_1 = 11.673 \text{ ft/s}$$

**Ejemplo 2.6:** el bloque A de la Figura 33 parte del reposo, sabiendo que el coeficiente de fricción es  $\mu$  y que se le aplica una fuerza  $P$ , determine la velocidad para cuando el bloque ha recorrido un espacio  $s$  en metros, se conocen los siguientes datos de la tabla:  $\theta, \beta, W_A$  y  $s$ .

**Figura 33. Bloque bajo la acción de una fuerza dependiente del espacio**

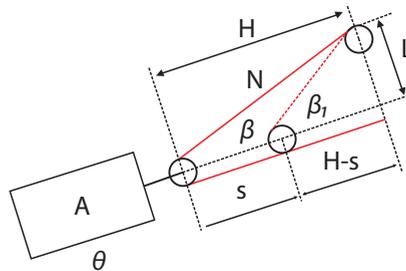


Fuente: elaboración propia.

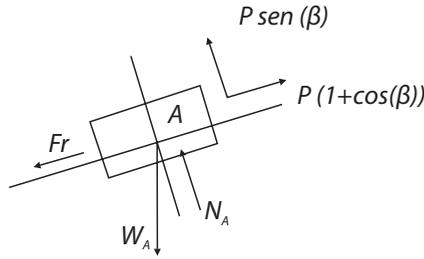
**Desarrollo conceptual**

Asumiendo que el bloque se mueve subiendo, se tiene:

**Figura 34. Diagrama del movimiento del bloque**



Fuente: elaboración propia.

**Figura 35. Diagrama de cuerpo libre del bloque**

Fuente: elaboración propia.

De la Figura 34 se sabe que el ángulo  $\beta$  cambia conforme el espacio  $s$  va avanzando de donde se tiene que:

$$L = H \tan \beta \quad (45)$$

$$N = \sqrt{(H-s)^2 + L^2} \quad (46)$$

De la Figura 35 se tiene:

$$N_A = W_A \cos \theta - P \sin \beta = W_A \cos \theta - \frac{PL}{\sqrt{(H-s)^2 + L^2}} \quad (47)$$

Aplicando el principio de trabajo y energía, y sabiendo que el bloque parte del reposo, se tiene:

$$\int_0^s P(1 + \cos \beta) ds - \int_0^s W_A \sin \theta ds - \int_0^s Fr ds = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 \quad (48)$$

De donde, para la integral de la fuerza, se tiene:

$$\int_0^s P(1 + \cos \beta) ds = \int_0^s P ds + \int_0^s P \cos \beta ds = \int_0^s P ds + \int_0^s P \left( \frac{H-s}{\sqrt{(H-s)^2 + L^2}} \right) ds$$

Realizando cambio de variable:

$$x = (H-s)^2 + L^2, dx = -2(H-s) ds$$

Reemplazando:

$$\int_0^s P ds + \int_0^s P \left( \frac{H-s}{\sqrt{(H-s)^2 + L^2}} \right) ds = Ps - \frac{P}{2} \int_0^s x^{-\frac{1}{2}} dx = Ps - P \sqrt{(H-s)^2 + L^2} \quad (49)$$

Para la integral de la fuerza del peso se tiene:

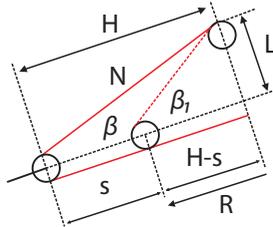
$$-\int_0^s W_A \sin \theta ds = -W_A \sin \theta s \quad (50)$$

Para la integral de la fuerza de la fricción:

$$\begin{aligned} -\int_0^s F r ds &= -\int_0^s \mu N ds = -\int_0^s \mu \left( W_A \cos \theta - \frac{PL}{\sqrt{(H-s)^2 + L^2}} \right) ds \\ &= -\int_0^s \mu W_A \cos \theta ds + \int_0^s \mu \left( \frac{PL}{\sqrt{(H-s)^2 + L^2}} \right) ds \\ &= -\mu W_A \cos \theta s + \mu PL \int_0^s \frac{1}{\sqrt{(H-s)^2 + L^2}} ds \end{aligned}$$

Realizando para la integral un cambio de variable y reorganizando la integral de acuerdo a la Figura 36 se tiene:

**Figura 36. Diagrama trigonométrico del movimiento**



Fuente: elaboración propia.

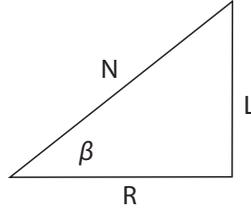
$$R = H - s$$

$$dR = ds$$

Reemplazando:

$$= -\mu W_A \cos \theta s + \mu PL \int_H^{H-R} \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2}} dR$$

Aplicando integración por sustitución trigonométrica de la Figura 37 se tiene:

**Figura 37. Diagrama trigonométrico de sustitución**

Fuente: elaboración propia.

$$N = \sqrt{R^2 + L^2}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{L}{N}, N = \frac{L}{\text{sen } \beta}, N = L \csc \beta$$

$$\tan \beta = \frac{L}{R}, R = \frac{L}{\tan \beta}, R = L \cot \beta$$

$$dR = -L \csc^2 \beta d\beta$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} &= -\mu W_A \cos \theta s + \mu P L \int_H^{H-R} \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2}} dR \\ &= -\mu W_A \cos \theta s + \mu P L \int_H^{H-R} \frac{-L \csc^2 \beta}{L \csc \beta} d\beta \\ &= -\mu W_A \cos \theta s - \mu P L \int_H^{H-R} \csc \beta d\beta \\ &= -\mu W_A \cos \theta s - \mu P L \left( -\ln(\csc \beta + \cot \beta) \right) \\ &= -\mu W_A \cos \theta s + \mu P L \left( \ln \left( \frac{1}{\text{sen } \beta} + \frac{\cos \beta}{\text{sen } \beta} \right) \right) \\ &= -\mu W_A \cos \theta s + \mu P L \left( \ln \left( \frac{1 + \frac{R}{L}}{\frac{L}{N}} \right) \right) \\ &= -\mu W_A \cos \theta s + \mu P L \left( \ln \left( \frac{N + R}{L} \right) \right) \\ &= -\mu W_A \cos \theta s + \mu P L \left( \ln \left( \frac{\sqrt{R^2 + L^2} + R}{L} \right) \right) \end{aligned}$$

$$-\int_0^s \mu N ds = -\mu W_A \cos \theta s + \mu PL \left( \ln \left( \frac{\sqrt{(H-s)^2 + L^2} + (H-s)}{L} \right) \right) \quad (51)$$

Reemplazando las ecuaciones 49, 50 y 51 en la Ecuación 48, se tiene:

$$\int_0^s P(1 + \cos \beta) ds - \int_0^s W_A \sin \theta ds - \int_0^s F_r ds = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2$$

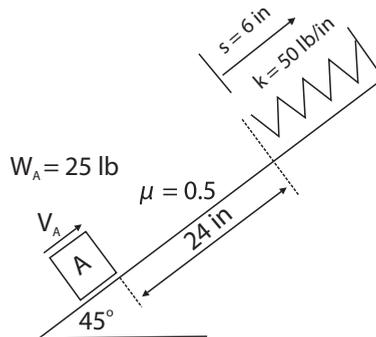
$$Ps + P\sqrt{(H-s)^2 + L^2} - W_A \sin \theta s - \mu W_A \cos \theta s$$

$$+ \mu PL \left( \ln \left( \frac{\sqrt{(H-s)^2 + L^2} + (H-s)}{L} \right) \right) = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 \quad (52)$$

Para determinar la velocidad del bloque en el instante 2, Ecuación 52, es importante saber los parámetros de entrada del ejercicio, por lo cual se deja indicado en función de estos.

**Ejemplo 2.7:** determinar la velocidad  $V_A$  del bloque A, Figura 38, si se sabe que es capaz de comprimir el resorte de la figura  $s = 6$  in. El resorte está en su longitud libre.

**Figura 38. Bloque subiendo – fuerza del resorte**



Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo conceptual

Se deben colocar todas las unidades en el sistema ingles:

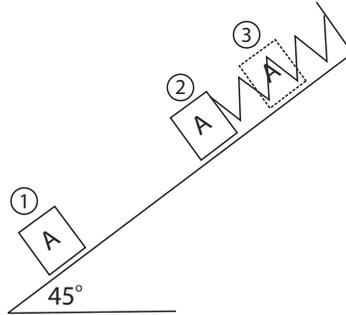
$$k = 50 \frac{\text{lb}}{\text{in}} = 600 \text{ lb} / \text{ft}$$

$$s_1 = 24 \text{ in} = 2 \text{ ft}$$

$$s = 6 \text{ in} = 0.5 \text{ ft}$$

## Descripción de las etapas del movimiento del bloque

Figura 39. Etapas del movimiento del bloque



Fuente: elaboración propia.

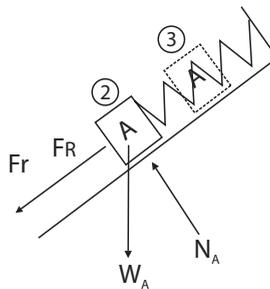
**Etapas 1-2:** el bloque A, Figura 39, va desde el instante mostrado hasta antes de tocar el resorte bajo la acción de las fuerzas dadas por el peso y la fricción (principio de trabajo y energía).

**Etapas 2-3:** el bloque va desde el instante que toca el resorte hasta detenerse ( $v_3 = 0$ ) bajo la acción de las fuerzas dadas por el peso, el resorte y la fricción (principio de trabajo y energía).

**Tips:** una vez descrito el movimiento del bloque es importante determinar por donde se empieza el ejercicio, en este caso como se solicitan datos de entrada y se tienen los datos de salida, se realiza la reconstrucción del movimiento de las etapas finales a las iniciales.

### Etapas 2-3 Principio de trabajo y energía

Figura 40. Diagrama de cuerpo libre bloque A – etapas 2 y 3



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del bloque, Figura 40, y aplicando el principio de trabajo y energía, se tiene:

$$N = W \cos 45, v_3 = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \int_0^{0.5} F_r ds - \int_0^{0.5} W \sin 45 ds - \int_0^{0.5} F_R ds = \frac{1}{2}mv_3^2$$

$$v_2 = 15,078 \text{ ft / seg}$$

**Etapa 1-2 Principio de trabajo y energía**

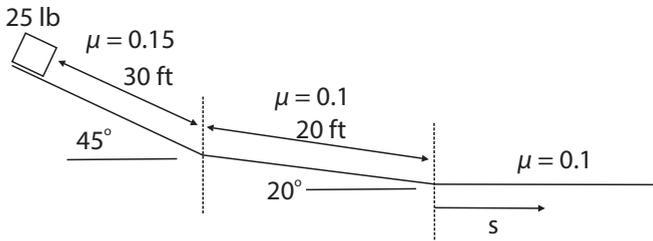
De forma similar al movimiento dado entre las etapas 2 y 3, entre las etapas 1 y 2 se da el movimiento del bloque A bajo la acción de las fuerzas dadas por el peso y la fricción, aplicando el principio de trabajo y energía, se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \int_0^2 F_r ds - \int_0^2 W \text{sen}45 ds = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$v_1 = 19,077 \text{ ft / s}$$

**Ejemplo 2.8:** el bloque de la Figura 41 se deja caer desde el reposo en la posición indicada, determine el espacio s recorrido antes de detenerse.

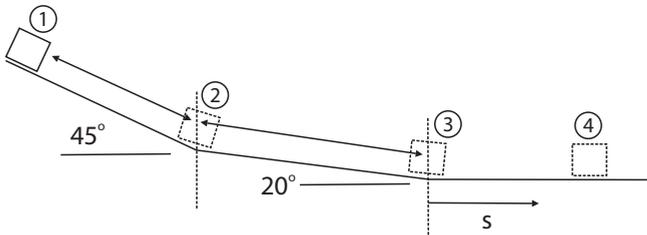
**Figura 41. Bloque bajando con varias pendientes**



Fuente: elaboración propia.

**Descripción de las etapas del movimiento del bloque**

**Figura 42. Etapas del movimiento del bloque**



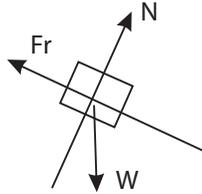
Fuente: elaboración propia.

- **Etapa 1-2:** el bloque de la Figura 42 se desplaza por la primera rampla hasta antes de cambiar de pendiente y de coeficiente de fricción, en esta sección se mueve bajo la acción de las fuerzas dadas por el peso y la fricción (principio de trabajo y energía).
- **Etapa 2-3:** el bloque de la Figura 42 se desplaza por la segunda rampla hasta antes de cambiar de pendiente y de coeficiente de fricción, en esta sección se mueve bajo la acción de las fuerzas dadas por el peso y la fricción (principio de trabajo y energía).
- **Etapa 3-4:** por último, el bloque se mueve en la sección plana hasta detenerse ( $v_4 = 0$ ) bajo la acción de las fuerzas dadas por la fricción únicamente (principio de trabajo y energía).

**Tips:** una vez descrito el movimiento del bloque es importante determinar por dónde se empieza el ejercicio, en este caso como se solicitan datos de entrada y se tienen los datos de salida se realiza la reconstrucción del movimiento desde las etapas iniciales a las finales. Adicionalmente, en las dos ramplas de movimiento desde 1 hasta 3 el diagrama de cuerpo libre del bloque es muy similar, ya que las fuerzas que actúan son muy parecidas (el peso y la fricción) como se indica en la Figura 43.

### DCL del bloque

**Figura 43. Diagrama de cuerpo libre del bloque**



Fuente: elaboración propia.

#### **Principio de trabajo y energía – etapa 1-2**

Del diagrama de cuerpo libre del bloque, Figura 43, y aplicando el principio de trabajo y energía, se tiene:

$$N = W \cos 45, v_1 = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \int_0^{30} F_r ds + \int_0^{30} W \sin 45 ds = \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$v_2 = 34,076 \text{ ft / s}$$

#### **Principio de trabajo y energía – etapa 2-3**

Del diagrama de cuerpo libre del bloque, Figura 43, y aplicando el principio de trabajo y energía, se tiene:

$$N = W \cos 30, v_2 = 34,076 \text{ ft / s}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \int_0^{20} F_r ds + \int_0^{20} W \sin 20 ds = \frac{1}{2}mv_3^2$$

$$v_3 = 38,4798 \text{ ft / s}$$

#### **Principio de trabajo y energía – etapa 3-4**

De forma similar que en las etapas anteriores, para esta sección se tendrá que el bloque está únicamente bajo la acción de la fricción hasta detenerse, aplicando el principio de trabajo y energía, se tiene:

$$N = W, v_3 = 38.4798 \frac{\text{ft}}{\text{s}}, v_4 = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - \int_0^s F_r ds = \frac{1}{2}mv_4^2$$

$$s = 229,922 \text{ ft}$$

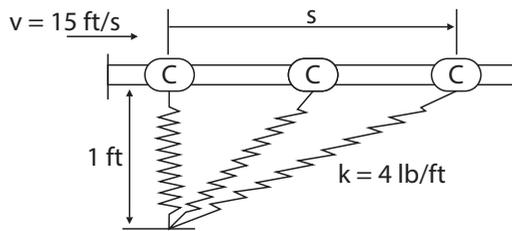
**Ejemplo 2.9:** el collarín C de 2 lb se ajusta con holgura sobre la barra lisa, Figura 44. Si se sabe que: el resorte no está estirado cuando  $s = 0$ , para la posición mostrada el collarín lleva una velocidad de 15 ft/s, determine la velocidad del collar cuando  $s = 1 \text{ ft}$  (Ejercicio adaptado de Hibbeler, 2015)

**Link del acompañamiento mediante video:**

<https://www.youtube.com/watch?v=1sI16rKRqYY&t=174s>

**Tips:** en este ejercicio se muestran dos enfoques para el desarrollo del mismo, en el primer enfoque se detalla el movimiento del collarín y cómo la fuerza ejercida por el resorte cambia con el movimiento del collarín y en el segundo enfoque se realiza de forma que se evalúa la energía almacenada por el resorte entre una posición inicial y una posición final, los dos enfoques son valederos al momento de desarrollar este tipo de ejercicios, pero es importante entender la mecánica del movimiento del mecanismo.

**Figura 44. Collarín - resorte**

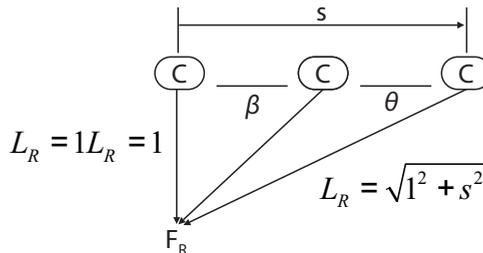


Fuente: Adaptado de Hibbeler, 2015.

• **Enfoque 1**

Inicialmente se debe desarrollar el diagrama de cuerpo libre del movimiento del collarín, Figura 45, para poder entender cómo cambia la magnitud de la fuerza aplicada por el resorte:

**Figura 45. Diagrama de cuerpo libre del movimiento del collarín**



Fuente: elaboración propia.

Teniendo en cuenta que la fuerza de un resorte está dada por la siguiente ecuación, y realizando la adaptación al ejercicio propuesto se tiene:

$$F_R = k \times s = k \times (L_F - L_I) = k \times (\sqrt{1^2 + s^2} - 1) \quad (53)$$

De acuerdo con la Figura 45, la porción de la fuerza del resorte en sentido del movimiento y aplicada al collarín está dada por la siguiente ecuación:

$$F_R = k \times (\sqrt{1^2 + s^2} - 1) \cos \theta = k \times (\sqrt{1^2 + s^2} - 1) \frac{s}{\sqrt{1^2 + s^2}}$$

$$F_R = k \times \left( s - \frac{s}{\sqrt{1^2 + s^2}} \right) \quad (54)$$

### Principio de trabajo y energía

Aplicando el principio de trabajo y energía, para describir el movimiento del collarín entre el instante 1 y el instante 2 de movimiento, se tiene:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \int_0^s F_R ds = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad (55)$$

Para la integral de la fuerza del resorte, Ecuación 54, se tiene:

$$\int_0^s F_R ds = \int_0^s k \times \left( s - \frac{s}{\sqrt{1^2 + s^2}} \right) ds$$

$$\int_0^s F_R ds = \int_0^s k \times s ds - \int_0^s k \times \frac{s}{\sqrt{1^2 + s^2}} ds$$

$$\int_0^s F_R ds = k \left( \frac{s^2}{2} - \sqrt{1^2 + s^2} \right)$$

Evaluando para

$$\int_0^s F_R ds = 0,085 k$$

De la Ecuación 55 se tiene:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - 0,0857 k = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{W}{g} v_1^2 - 0,0857 k = \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_2^2$$

$$v_2 = 14,245 \text{ ft} / \text{s}$$

- **Enfoque 2**

Aplicando el principio de trabajo y energía, al inicio y al final del movimiento, pero haciendo enfoque en la energía almacenada por el resorte en ambos instantes se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \int F_R ds = \frac{1}{2}mv_2^2 + \int F_R ds$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k(L_1 - L_{Libre})^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}k(L_2 - L_{Libre})^2$$

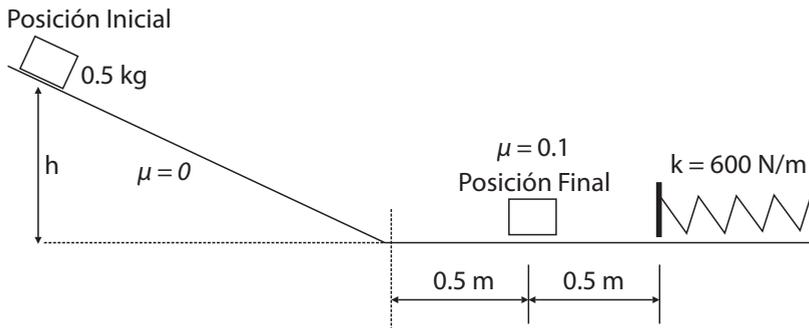
$$\frac{1}{2}mv_1^2 - 0.0857k = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$v_2 = 14.245 \text{ ft / s}$$

Al comparar los resultados son semejantes, pero en el primer enfoque se detalla mucho mejor el movimiento realizado por el collarín, aunque en muchas aplicaciones es difícil aplicar este método, por lo cual se utiliza el segundo enfoque.

**Ejemplo 2.10:** el bloque de la Figura 46 se deja caer desde la posición inicial (reposo), seguidamente va hasta el resorte que se mantiene comprimido 0.05 m y después se devuelve hasta llegar a su posición final. Para el recorrido descrito determine la altura de la cual se dejó caer el bloque.

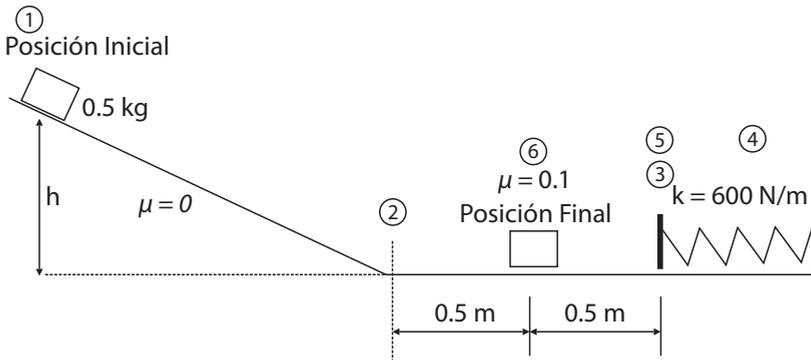
**Figura 46. Bloque en caída con resorte de amortiguamiento**



Fuente: elaboración propia.

Este ejercicio es una aplicación muy similar a las antes desarrolladas, por consiguiente, se realizará un desarrollo conceptual etapa a etapa del movimiento del bloque y las sugerencias de las ecuaciones que se utilizarán en cada etapa.

Figura 47. Descripción del movimiento del bloque



Fuente: elaboración propia.

### Etapas del movimiento del bloque

- El bloque baja sin fricción desde la posición 1 hasta la posición 2 bajo la acción de la fuerza dada por el peso únicamente (principio de trabajo y energía).
- Desde la posición 2 hasta la posición 3 el bloque se mueve bajo la acción de la fuerza dada por la fricción únicamente, el bloque se va frenando (principio de trabajo y energía).
- Desde la posición 3 hasta la posición 4 el bloque es detenido por la acción de las fuerzas dadas por la fricción y el resorte, ambas negativas, ( $V_4 = 0$ ) (principio de trabajo y energía).
- Desde la posición 4 hasta la posición 5 el bloque parte del reposo ( $V_4 = 0$ ) y es impulsado por la fuerza dada por el resorte, contrario a su movimiento está la fuerza de la fricción (principio de trabajo y energía).
- Desde la posición 5 hasta la posición 6 el bloque se mueve hasta detenerse y actúa únicamente la fuerza dada por la fricción ( $V_6 = 0$ ) (principio de trabajo y energía).

**Tips:** una vez descrito el movimiento del bloque es importante determinar por donde se empieza el ejercicio, en este caso como se solicitan datos de entrada y se tienen los datos de salida, se realiza la reconstrucción del movimiento desde las etapas finales a las iniciales.

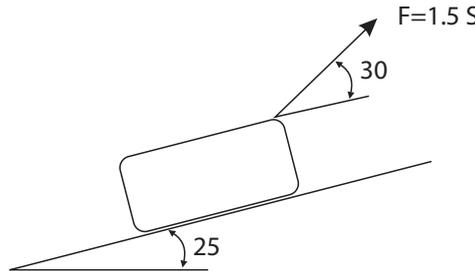
### Solución con el método de trabajo y energía

- Se debe comenzar en la etapa 5-6, de donde ( $V_5^2 = 0.981 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ,  $V_5 = 0.990 \text{ m/s}$ ).
- Seguidamente, en la etapa 4-5 el bloque es impulsado por el resorte (la integral para este debe ser de **0.05 hasta 0.05 + S** y para la fricción que es negativa la integral debe ser de **0 a S**), por consiguiente, determinamos en que espacio se alcanza la velocidad 5 partiendo del reposo ( $s = 0.007707 \text{ m}$ ).
- Después en la etapa 3-4 el bloque es detenido por el resorte (la integral para este debe ser de **0.05 hasta 0.05 + S** y para la fricción que es negativa la integral debe ser de **0 a S**) como ya se conoce **S del punto anterior**, determinamos la velocidad en el punto 3 ( $V_3^2 = 1.01123 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ,  $V_3 = 1.0056 \text{ m/s}$ ).

- Seguidamente en la etapa 2-3 el bloque es frenado únicamente por acción de la fricción en un espacio de un metro, por consiguiente, se debe determinar la velocidad en el punto 2 ( $V_2 = 1.724 \text{ m/s}$ ).
- Por último, en la etapa 1-2 el bloque adquiere velocidad por acción del peso que trabaja en la altura, por consiguiente, se debe determinar la altura desde donde partió el movimiento ( $h = 0.1515412 \text{ m}$ ).

**Ejemplo 2.11:** el bloque de la figura parte del reposo, sabiendo que su masa es de 10 kg, el coeficiente de fricción es  $\mu = 0.1$  y que se le aplica una fuerza  $F$  en función del espacio ( $S$ ), determine la velocidad para cuando el bloque ha recorrido 150 m en total.

**Figura 48. Bloque subiendo con fuerza dependiente del espacio**



Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo

Aplicando el principio de trabajo y energía para el bloque, asumiendo que el bloque sube, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 - \int W \sin 25 ds - \int f_r ds + \int F \cos 25 ds &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ -\int W \sin 25 ds - \int \mu (W \cos 25 - 1.5 \sin 30 s) ds + \int 1.5 s \cos 30 ds &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ -W \sin 25 s - \mu \left( W \cos 25 s - \frac{1.5 \sin 30 s^2}{2} \right) + \frac{1.5 s^2}{2} \cos 30 &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ -8.2916 s - 1.778 s + 0.0075 s^2 + 0.1298 s^2 &= v_2^2 \\ -10.0696 s + 0.1373 s^2 &= v_2^2 \end{aligned}$$

Para  $s = 150 \text{ m}$

$$-1510.44 + 3089.25 = v_2^2 \quad (56)$$

De la Ecuación 56 se sabe que la velocidad no puede ser negativa y que inicialmente la fuerza aplicada no es capaz de vencer las restricciones del movimiento como lo son el peso y la fricción, por consiguiente, como el bloque no sube se analiza el ejercicio como si el bloque bajara y aplicando el principio de trabajo y energía, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 + \int W \sin 25 ds - \int f_r ds - \int F \cos 25 ds &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ \int W \sin 25 ds - \int \mu (W \cos 25 - 1.5 \sin 30 s) ds - \int 1.5 s \cos 30 ds &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ W \sin 25 s - \mu \left( W \cos 25 s - \frac{1.5 \sin 30 s^2}{2} \right) - \frac{1.5 s^2}{2} \cos 30 &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ 8.2916 s - 1.778 s + 0.0075 s^2 - 0.1298 s^2 &= v_2^2 \\ 6.5136 s - 0.1223 s^2 &= v_2^2 \end{aligned}$$

Para  $s = 150 \text{ m}$

$$977.04 - 2751.75 = v_2^2 \quad (57)$$

En este caso, como nuevamente la velocidad da negativa se debe verificar si el bloque baja y se detiene, ya que la fuerza aplicada al bloque depende del espacio recorrido y va aumentando con el movimiento, esto puede en determinado momento equilibrar las fuerzas, por consiguiente, analizando para una velocidad en un segundo instante igual a cero, se tiene que el espacio recorrido para que el bloque se detenga nuevamente es:

$$s = 53.2591 \text{ m}$$

Como se analizó, el espacio recorrido es menor que el indicado por el ejercicio para el recorrido, como el bloque no puede bajar más y como la fuerza va aumentando con el espacio recorrido, con el espacio restante se calcula nuevamente la velocidad para el bloque subiendo aplicando el principio de trabajo y energía y se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 - \int W \sin 25 ds - \int f_r ds + \int F \cos 25 ds &= \frac{1}{2}mv_3^2 \\ \frac{1}{2}mv_2^2 - W \sin 25 s - \mu \left( W \cos 25 s - \frac{1.5 \sin 30 s^2}{2} \right) + \frac{1.5 s^2}{2} \cos 30 &= \frac{1}{2}mv_3^2 \\ v_2^2 - 8.2916 s - 1.778 s + 0.0075 s^2 + 0.1298 s^2 &= v_3^2 \\ v_2^2 - 10.0696 s + 0.1373 s^2 &= v_3^2 \end{aligned}$$

Para  $s = 53.2591 \text{ m}$  y  $150 \text{ m}$ , con  $v_2 = 0$ , se tiene:

$$v_3 = 41.54 \text{ m/s}$$



## CAPÍTULO 3

# PRINCIPIO DE IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

El principio de impulso y cantidad de movimiento se deriva de la segunda Ley de Newton y presenta otra visión mediante la cual se pueden desarrollar los problemas de la dinámica del movimiento de los objetos, adicionalmente, de este principio se desprenden las ecuaciones de cantidad de movimiento y los problemas de choques, a continuación, se dará una explicación y se desarrollaran ejemplos de aplicación.

### 3.1. Principio de impulso y cantidad de movimiento

El principio de impulso y cantidad de movimiento es una forma de trabajar determinados ejercicios, donde se tiene en cuenta la aplicación de las fuerzas en determinado tiempo del movimiento.

Este principio se deriva de la formula general de la Segunda Ley de Newton, Ecuación 16, seguidamente de la Ecuación 17. Como la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo y reorganizando la ecuación, se tiene:

$$\sum F dt = m dv \quad (58)$$

Realizando la integral a cada lado de la ecuación y teniendo como límites que para el tiempo cero (inicio del recorrido) la velocidad es ( $v_1$ ) y que para un tiempo  $t$  del recorrido la velocidad es ( $v_2$ ), se tiene:

$$\int_0^t \sum F dt = \int_{v_1}^{v_2} m dv$$
$$\int_0^t \sum F dt = mv_2 - mv_1$$

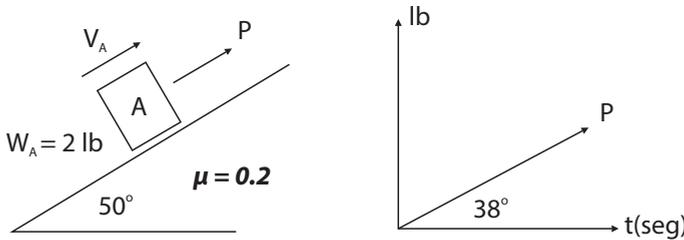
$$mv_1 + \int_0^t \sum F dt = mv_2 \tag{59}$$

Esta última ecuación es conocida como la ecuación del principio de impulso y cantidad de movimiento e indica que la cantidad de movimiento de un cuerpo, en un primer instante, se ve afectada por la sumatoria de las integrales de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en determinado tiempo de su recorrido, por consiguiente, se obtiene la cantidad de movimiento en un segundo instante del recorrido.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la fricción, fuerzas puntuales, fuerzas dependientes del tiempo, entre otras. A continuación, se desarrollarán varios ejemplos de aplicaciones en las cuales es útil el empleo del principio de impulso y cantidad de movimiento para su solución.

**Ejemplo 3.1:** el bloque de la figura lleva una velocidad inicial,  $V_A = 20 \text{ ft/s}$  si se le aplica la fuerza  $P$  dada por la figura, determine la velocidad del bloque en  $t = 3.5\text{s}$ :

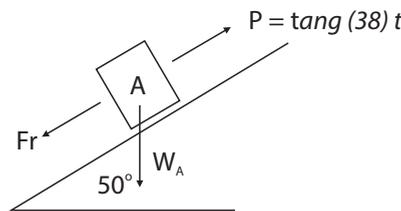
**Figura 49. Bloque subiendo con fuerza dependiente del tiempo**



Fuente: elaboración propia.

**Solución**

**Figura 50. Diagrama de cuerpo libre del bloque subiendo**



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del bloque y aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento, Ecuación 59, para el bloque subiendo se tiene:

$$N = W \cos 50$$

$$m_A v_{A1} + \int_0^{3.5} P dt - \int_0^{3.5} W_A \text{sen} 50 dt - \int_0^{3.5} F_r dt = m_A v_{A2}$$

$$m_A v_{A1} + \int_0^{3.5} 0.781 t dt - \int_0^{3.5} W_A \text{sen} 50 dt - \int_0^{3.5} \mu W_A \cos 50 dt = m_A v_{A2}$$

$$m_A v_{A1} + 0.3905 t^2 - W_A \text{sen} 50 t - \mu W_A \cos 50 t = m_A v_{A2}$$

$$v_{A1} + \frac{0.3905}{m_A} t^2 - g \operatorname{sen} 50t - \mu g \cos 50t = v_{A2}$$

$$v_{A1} + 6.287 t^2 - 28.806 t = v_{A2}$$

$$20 + 77.01 - 100.821 = v_{A2}$$

Como la velocidad tiende a ser negativa y el bloque inicialmente va subiendo, se puede decir que el bloque se detiene en su recorrido subiendo, por consiguiente se debe determinar el tiempo en el cual se detiene, aplicando nuevamente el principio de impulso y cantidad de movimiento, se determina el tiempo en el cual se detiene el bloque ( $v_{A2} = 0$ ):

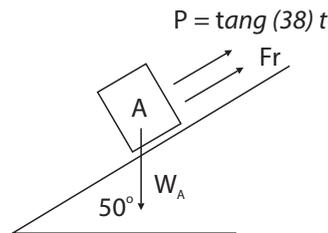
$$m_A v_{A1} + \int_0^t P dt - \int_0^t W_A \operatorname{sen} 50 dt - \int_0^t F_r dt = 0$$

$$v_{A1} + 6.287 t^2 - 28.806 t = 0$$

$$t = 0.8531 s$$

Como el bloque no sube más y el tiempo estimado del recorrido es mayor, se plantea la ecuación de movimiento del bloque en sentido contrario, en este caso bajando, del digrama de cuerpo libre del bloque bajando, Figura 51, y aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento, ( $v_{A2} = 0$ ) se tiene:

**Figura 51. Diagrama de cuerpo libre del bloque bajando**



Fuente: elaboración propia.

$$m_A v_{A2} - \int_{0.8531}^{3.5} P dt + \int_{0.8531}^{3.5} W_A \operatorname{sen} 50 dt - \int_{0.8531}^{3.5} F_r dt = m_A v_{A3}$$

$$-\frac{0.3905}{m_A} t^2 + g \operatorname{sen} 50t - \mu g \cos 50t = v_{A3}$$

$$-6.287 t^2 + 20.527 t = m_A v_{A3}$$

$$-72.44 + 54.33 = m_A v_{A3}$$

Nuevamente la velocidad tiende a ser negativa y como la fuerza aplicada va cambiando con el tiempo, aumentando, se debe verificar si el bloque cambia nuevamente de sentido del movimiento, por consiguiente se plantea determinar el tiempo en el cual el bloque nuevamente se detenga, aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento bajando, pasando de a  $v_{A3} = 0$  se tiene:

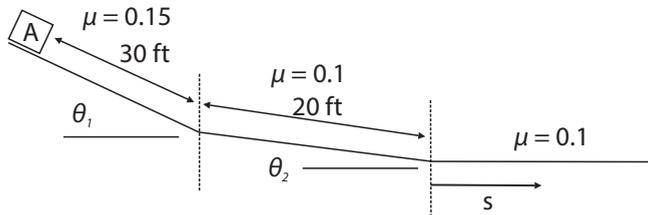
$$-\int_{0.852}^{0.852+t} P dt + \int_{0.852}^{0.852+t} W_A \operatorname{sen} 50 dt - \int_{0.852}^{0.852+t} F_r dt = 0$$

$$\begin{aligned}
 -\int_{0.852}^{0.852+t} 0.781t \, dt + \int_{0.852}^{0.852+t} W_A \sin 50 \, dt - \int_{0.852}^{0.852+t} \mu W_A \cos 50 \, dt &= 0 \\
 -0.3905t^2 + W_A \sin 50t - \mu W_A \cos 50t &= 0 \\
 -0.3905t^2 + 1.532t - 0.2571t &= 0 \\
 -0.3905t + 1.2749 &= 0 \\
 t &= 3.264 \, \text{s}
 \end{aligned}$$

De donde se tiene que al calcular el tiempo total en el segundo segmento es de  $t_{\text{Total}} = 4.116\text{s}$ , el cual supera el tiempo total del movimiento que es  $3.5 \text{ s}$ , por consiguiente el bloque no se mueve más.

**Ejemplo 3.2:** si se sabe que  $\theta_1 = 30^\circ$  y  $\theta_2 = 20^\circ$  determinar el espacio recorrido para el bloque en un tiempo de  $12 \text{ s}$ . Tener en cuenta que los coeficientes de fricción cambian durante el recorrido. Adicionalmente, realizar la validación del ejercicio con Matlab.

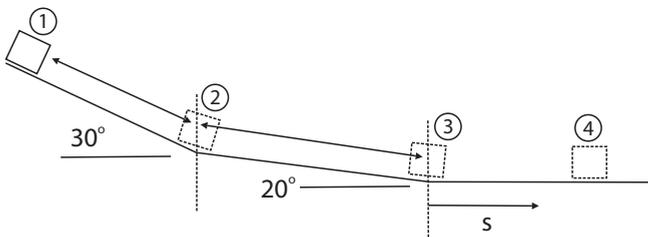
**Figura 52. Bloque bajando con varias pendientes**



Fuente: elaboración propia.

### Descripción de las etapas del movimiento del bloque

**Figura 53. Etapas del movimiento del bloque**



Fuente: elaboración propia.

- **Etapa 1-2:** el bloque de la Figura 53 se desplaza por la primera rampa hasta antes de cambiar de pendiente y de coeficiente de fricción, en esta sección se mueve bajo la acción de las fuerzas dadas por el peso y la fricción, se utiliza el principio de trabajo y energía, inicialmente para determinar la velocidad en el instante 2 y posteriormente se utiliza el principio de impulso y cantidad de movimiento, en el mismo tramo para determinar el tiempo de recorrido.
- **Etapa 2-3:** esta sección se trabaja de forma similar que la sección 1-2.

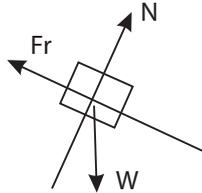
- **Etapa 3-4:** por último, el bloque se mueve en la sección plana hasta detenerse ( $v_4 = 0$ ) bajo la acción de las fuerzas dadas por la fricción únicamente (principio de impulso y cantidad de movimiento).

**Tips:** una vez descrito el movimiento del bloque es importante determinar por dónde se empieza el ejercicio, en este caso como se solicitan datos de entrada y se tienen los datos de salida se realiza la reconstrucción del movimiento desde las etapas iniciales a las finales.

Adicionalmente, en las dos ramplas de movimiento desde 1 hasta 3, el diagrama de cuerpo libre del bloque es muy similar, ya que las fuerzas que actúan son muy parecidas (el peso y la fricción) como se indica en la Figura 54.

### DCL del bloque

Figura 54. Diagrama de cuerpo libre del bloque



Fuente: elaboración propia.

### Primera rampa – etapa 1-2 – Principio de trabajo y energía

Del diagrama de cuerpo libre del bloque, Figura 54, y aplicando el principio de trabajo y energía, se tiene:

$$\begin{aligned}
 N &= W_A \cos \theta_1, v_{A1} = 0 \\
 \frac{1}{2} m_A v_1^2 - \int_0^{30} F_r ds + \int_0^{30} W_A \text{sen} \theta_1 ds &= \frac{1}{2} m_A v_2^2 \\
 -\mu m_A g \cos \theta_1 s + m_A g \text{sen} \theta_1 s &= \frac{1}{2} m_A v_2^2 \\
 -2 \mu g \cos \theta_1 s + 2 g \text{sen} \theta_1 s &= v_2^2 \\
 \sqrt{-2 \mu g \cos \theta_1 s + 2 g \text{sen} \theta_1 s} &= v_2 \\
 v_2 &= 26.739 \text{ ft} / \text{s}
 \end{aligned}$$

### Primera rampa – etapa 1-2 – Principio de impulso y cantidad de movimiento

Del diagrama de cuerpo libre del bloque, Figura 54, y aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento, se tiene:

$$\begin{aligned}
 m_A v_1 - \int_0^t F_r dt + \int_0^t W_A \text{sen} \theta_1 dt &= m_A v_2 \\
 -\mu m_A g \cos \theta_1 t + m_A g \text{sen} \theta_1 t &= m_A v_2 \\
 -\mu g \cos \theta_1 t + g \text{sen} \theta_1 t &= v_2
 \end{aligned}$$

$$t_1 = \frac{v_2}{-\mu g \cos \theta_1 + g \sin \theta_1}$$

$$t_1 = 2.2437 \text{ s.}$$

### Segunda rampa – etapa 2-3 – Principio de trabajo y energía

Del diagrama de cuerpo libre del bloque, Figura 54, y aplicando el principio de trabajo y energía, se tiene:

$$N = W_A \cos \theta_2$$

$$\frac{1}{2} m_A v_2^2 - \int_0^{20} F_r ds + \int_0^{20} W_A \sin \theta_2 ds = \frac{1}{2} m_A v_3^2$$

$$\frac{1}{2} m_A v_2^2 - \mu m_A g \cos \theta_2 s + m_A g \sin \theta_2 s = \frac{1}{2} m_A v_3^2$$

$$v_2^2 - 2 \mu g \cos \theta_2 s + 2 g \sin \theta_2 s = v_3^2$$

$$\sqrt{v_2^2 - 2 \mu g \cos \theta_2 s + 2 g \sin \theta_2 s} = v_3$$

$$v_3 = 32.163 \text{ ft / s.}$$

### Primera rampa – etapa 2-3 – Principio de impulso y cantidad de movimiento

Del diagrama de cuerpo libre del bloque, Figura 54, y aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento, se tiene:

$$m_A v_2 - \int_0^t F_r dt + \int_0^t W_A \sin \theta_2 dt = m_A v_3$$

$$m_A v_2 - \mu m_A g \cos \theta_2 t + m_A g \sin \theta_2 t = m_A v_3$$

$$v_2 - \mu g \cos \theta_2 t + g \sin \theta_2 t = v_3$$

$$t_2 = \frac{v_3 - v_2}{-\mu g \cos \theta_2 + g \sin \theta_2}$$

$$t_2 = 0.6791 \text{ s}$$

**Nota:** en este ejercicio las integrales se tomaron desde un tiempo cero (0) hasta un tiempo ( $t$ ), esto se puede hacer, ya que no hay fuerzas que dependan del tiempo, todas las fuerzas son puntuales. Por consiguiente, se tiene que el tiempo total de recorrido en las dos rampas es de  $t_{1-2} = 2.923 \text{ s}$ , de donde se confiere que resta un tiempo de  $9.077 \text{ s}$  para completar el recorrido.

### ***Tercera parte – etapa 3-4 - plano – Principio de impulso y cantidad de movimiento***

De forma similar que en las etapas anteriores, para esta sección se tendrá que el bloque esta únicamente bajo la acción de la fricción hasta detenerse; sin embargo, primero se verifica si el bloque se detiene o está en movimiento después de 9.37s. Aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento, se tiene:

$$m_A v_3 - \int_0^t F_r dt = m_A v_4$$

$$m_A v_3 - \mu m_A g t = m_A v_4$$

$$v_3 - \mu g t = v_4$$

$$v_4 = 2.9356 \text{ ft / s}$$

Como el bloque sigue en movimiento, seguidamente se calcula el espacio recorrido en este tiempo, pero si la velocidad fuera negativa se debería verificar en cuánto tiempo se detiene y posteriormente el espacio recorrido en dicho tiempo.

### ***Tercera parte – etapa 3-4 - plano – Principio de trabajo y energía***

$$N = W_{A, v_4} = 0$$

$$\frac{1}{2} m_A v_3^2 - \int_0^s F_r ds = \frac{1}{2} m_A v_4^2$$

$$\frac{1}{2} m_A v_3^2 - \mu m_A g s = \frac{1}{2} m_A v_4^2$$

$$v_3^2 - 2 \mu g s = v_4^2$$

$$\frac{v_3^2 - v_4^2}{2 \mu g} = s$$

$$s = 159.301 \text{ ft}$$

Por consiguiente, el espacio total recorrido al cabo de 12 s es:

$$s_T = 30 + 20 + 159,301 = 209,301 \text{ ft}$$

**Matlab.** Con el objetivo de evaluar la influencia de la inclinación de la rampa 1 en la distancia recorrida variar la inclinación entre 30° y 60° con intervalos de 5°.

## Script en Matlab

```

%% Impulso y Cantidad de Movimiento
clc
clear
% Ejemplo 3.2
% Evaluar la distancia requerida variando la inclinación de la rampa

% Primera rampa, Trabajo y Energía,
mu1 = 0.15;
g = 32.2;
s1 = 30;
% Ángulo de inclinación de la rampa1
ang_theta1 = 30:5:60;
% Convertir el ángulo a radianes
rad_theta1 = ang_theta1*pi/180;
% Cálculo de la integral-1
fun = @(x)mu1*g*cos(rad_theta1);
I1 = integral(fun,0,s1,'ArrayValued',true);
% Cálculo de la integral-2
fun = @(x)g*sin(rad_theta1);
I2 = integral(fun,0,s1,'ArrayValued',true);
% Cálculo de la Velocidad al final de la rampa1
V2 = (2*(-I1+I2)).^0.5;
% Primera rampa, Impulso y Cantidad de movimiento
mu2 = 0.1;
s2 = 20;
% Cálculo del tiempo
t1 = V2./(-mu1*g.*cos(rad_theta1)+g*sin(rad_theta1));

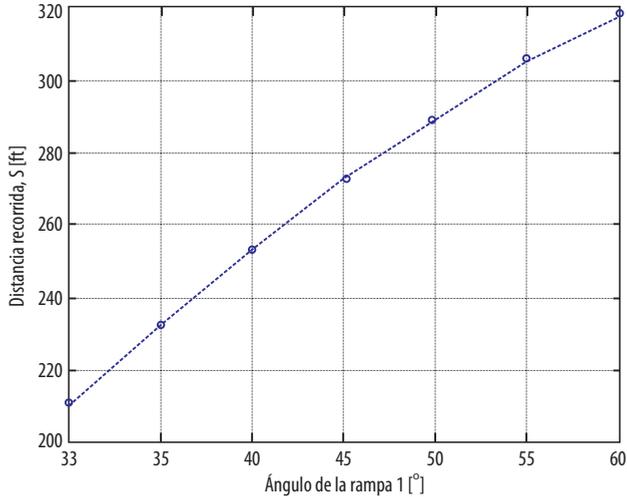
% Segunda rampa, Trabajo y Energía
rad_theta2 = 20*pi/180;
% Cálculo de la velocidad al final de la rampa2
V3 = (V2.^2+2*g*s2*(-mu2*cos(rad_theta2)+sin(rad_theta2))).^0.5;
% Segunda rampa, Impulso y cantidad de movimiento
% Cálculo del tiempo
t2 = (V3-V2)./(g*(-mu2*cos(rad_theta2) + sin(rad_theta2)));

% Tercera parte, impulso y cantidad de energía
t3 = 12-t2-t1;
mu3 = 0.1;
% Verificación si continua en movimiento, V4>0
V4 = V3-mu3*g.*t3;
% Tercera parte, trabajo y energía
% Cálculo de distancia recorrida
s3 = (V3.^2-V4.^2)./(2*mu3*g);
% Distancia total recorrida
S = s1+s2+s3;
figure2 = figure('Color',[1 1 1]);
plot(ang_theta1,S,'-ob');
grid on
title('Distancia recorrida por el bloque en 12 s','FontSize',14);
xlabel('Ángulo de la rampa 1 [^o]','FontSize',14);
ylabel('Distancia recorrida, S [ft]','FontSize',14);
print -dpng EJE_3-2.png %Guarda la Figura

```

La Figura 55 obtenida muestra que aumentar el ángulo de inclinación de la rampa 1 tiene como consecuencia el aumento de la distancia recorrida por el bloque al final en la parte plana; básicamente debido a que al finalizar el recorrido en la rampa 1, el bloque posee mayor energía, lo cual le permite alcanzar mayores distancias.

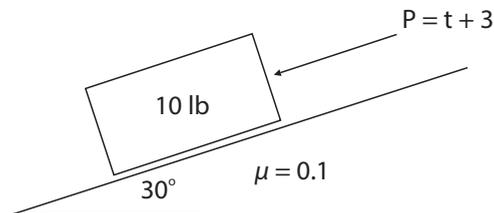
**Figura 55. Diagrama inclinación rampa 1 vs. espacio recorrido**  
Distancia requerida por el bloque 12 s



Fuente: elaboración propia.

**Ejemplo 3.3:** sabiendo que el bloque de la figura parte del reposo, determine su velocidad al cabo de 3,5 s.

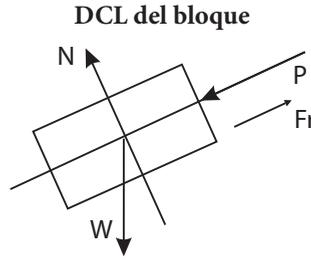
**Figura 56. Bloque con fuerza dependiente del tiempo**



Fuente: elaboración propia.

Para el desarrollo de este ejercicio se realiza primero el diagrama de cuerpo libre del bloque y posteriormente se plantea la ecuación de Principio y cantidad de movimiento, para determinar su movimiento:

**Figura 57. Diagrama de cuerpo libre del bloque**



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del bloque, Figura 57, y aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento se tiene:

$$N = W \cos 30, v_1 = 0$$

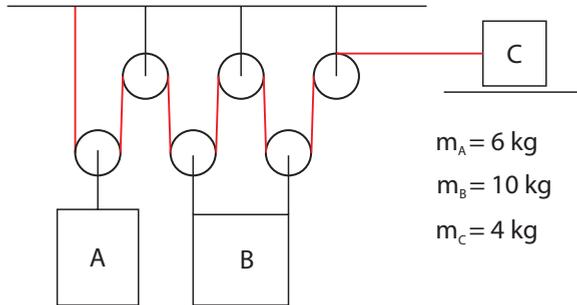
$$mv_1 - \int_0^{3.5} F_r dt + \int_0^{3.5} W \sin 30 dt + \int_0^{3.5} P dt = mv_2$$

$$mv_1 - \mu N t + W \sin 30 t + \frac{1}{2} t^2 + 3 t = mv_2$$

$$v_2 = 100.12 \text{ ft / s}$$

**Ejemplo 3.4:** el sistema de la figura parte desde el reposo, determinar la  $v_{A/B}$  después de haber transcurrido un segundo.

**Figura 58. Sistema de bloques**

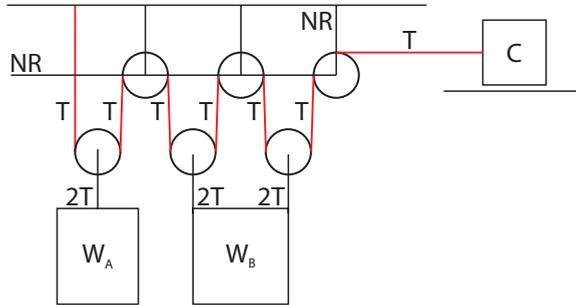


Fuente: elaboración propia.

Para el desarrollo de este ejercicio se realiza primero el diagrama de cuerpo libre de los bloques, seguidamente se plantean las ecuaciones de Movimiento dependiente y de Principio y cantidad de movimiento de estos.

**DCL de los bloques**

**Figura 59. Diagrama de cuerpo libre de los bloques**



Fuente: elaboración propia.

De la Figura 59 y de los *tips* dados en la sección 1.2.1 se desarrolla la ecuación de la posición de los bloques y la longitud de la cuerda:

$$2X_A + 4X_B + X_C = L \tag{60}$$

Derivando la Ecuación 60 con respecto al tiempo, se determina la ecuación que relaciona las velocidades de los bloques:

$$2v_A + 4v_B + v_C = 0 \tag{61}$$

Del diagrama de cuerpo libre y aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento se tiene:

- **Bloque A**

$$v_{A1} = v_{B1} = v_{C1} = 0$$

$$m_A v_{A1} - \int_0^1 2T dt + \int_0^1 W_A dt = m_A v_{A2}$$

$$\frac{-2T + W_A}{m_A} = v_{A2} \tag{62}$$

- **Bloque B**

$$m_B v_{B1} - \int_0^1 4T dt + \int_0^1 W_B dt = m_B v_{B2}$$

$$\frac{-4T + W_B}{m_B} = v_{B2} \tag{63}$$

- **Bloque C**

$$m_C v_{C1} + \int_0^1 T dt = m_C v_{C2}$$

$$\frac{T}{m_C} = v_{C2} \quad (64)$$

Reemplazando las ecuaciones 62, 63 y 64, en la Ecuación 61 se tiene:

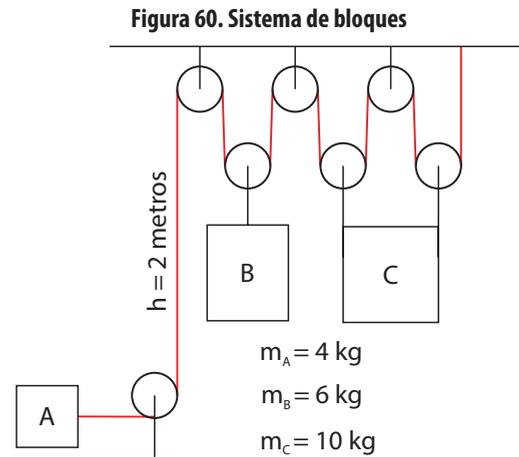
$$T = 29.2835 \text{ N}$$

$$v_{A2} = 0.04883 \frac{\text{m}}{\text{s}} (-j)$$

$$v_{B2} = 1.9034 \frac{\text{m}}{\text{s}} (j)$$

$$v_{A2/B2} = -0.04883 - 1.9034 = 1.95 \frac{\text{m}}{\text{s}} (-j)$$

**Ejemplo 3.5:** el sistema de la figura parte desde el reposo, determinar la  $v_{A/B}$ , después de haber transcurrido un segundo.

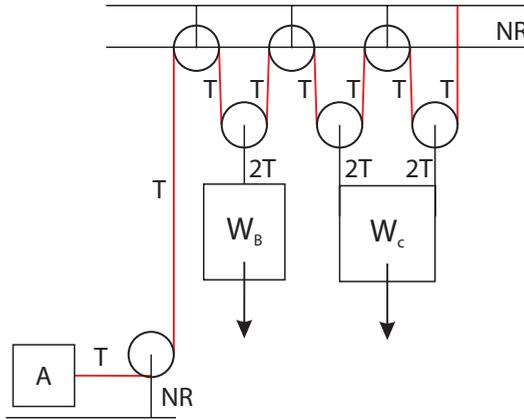


Fuente: elaboración propia.

Para el desarrollo de este ejercicio se realiza primero el diagrama de cuerpo libre de los bloques y posteriormente se plantean las ecuaciones de Movimiento dependiente y de Principio y cantidad de movimiento de estos.

**DCL de los Bloques**

**Figura 61. Diagrama de cuerpo libre de los bloques**



Fuente: elaboración propia.

De la Figura 61 y de los *tips* dados en la sección 1.2.1 se desarrolla la ecuación de la posición de los bloques y la longitud de la cuerda:

$$X_A + 2X_B + 4X_C = L \tag{65}$$

Derivando la Ecuación 65 con respecto al tiempo se determina la ecuación que relaciona las velocidades de los bloques:

$$v_A + 2v_B + 4v_C = 0 \tag{66}$$

Del diagrama de cuerpo libre y aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento se tiene:

- **Bloque A**

$$\begin{aligned}
 v_{A1} &= v_{B1} = v_{C1} = 0 \\
 m_A v_{A1} + \int_0^1 T dt &= m_A v_{A2} \\
 \frac{T}{m_A} &= v_{A2}
 \end{aligned} \tag{67}$$

- **Bloque B**

$$m_B v_{B1} - \int_0^1 2T dt + \int_0^1 W_B dt = m_B v_{B2}$$

$$\frac{-2T + W_B}{m_B} = v_{B2} \quad (68)$$

- **Bloque C**

$$m_C v_{C1} - \int_0^1 4T dt + \int_0^1 W_C dt = m_C v_{C2}$$

$$\frac{-4T + W_C}{m_C} = v_{C2} \quad (69)$$

Reemplazando las ecuaciones 67, 68 y 69 en la Ecuación 66 se tiene:

$$T = 29.2835 N$$

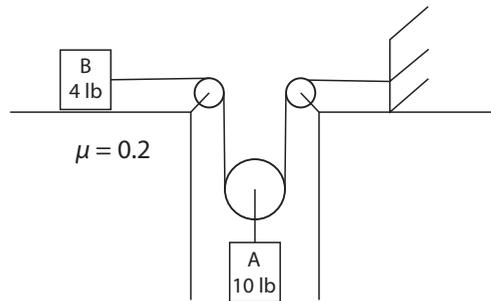
$$v_{A2} = 7.32 \frac{m}{s} (i)$$

$$v_{B2} = 0.04883 \frac{m}{s} (-j)$$

$$v_{A2/B2} = -7.32 (i) + 0.04883 (j) (m/s)$$

**Ejemplo 3.6:** para el instante mostrado en la Figura 62, el bloque A lleva una velocidad  $v_A = 5 \text{ ft/s}$  bajando, determinar la velocidad del bloque A al cabo de 2 s.

**Figura 62. Sistema de bloques**



Fuente: elaboración propia.

Para el desarrollo de este ejercicio se realiza primero la ecuación de Movimiento dependiente y posteriormente las ecuaciones de Principio y cantidad de movimiento de los cuerpos.

De la Figura 62 y de los *tips* dados en la sección 1.2.1 se desarrolla la ecuación de la posición de los bloques y la longitud de la cuerda:

$$L = 2X_A + X_B \quad (70)$$

Derivando la Ecuación 70 con respecto al tiempo se determina la ecuación que relaciona las velocidades de los bloques:

$$V_B = -2V_A \quad (71)$$

Por consiguiente, para el punto de partida, como la velocidad de A es 5 ft/s, la de B será 10 ft/s. Aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento, para los bloques se tiene:

- **Bloque A**

$$m_A v_{A1} + \int_0^2 W_A dt - \int_0^2 2T dt = m_A v_{A2} \quad (72)$$

- **Bloque B**

$$m_B v_{B1} - \int_0^2 F_r dt + \int_0^2 T dt = m_B v_{B2} \quad (73)$$

Resolviendo el sistema dado por la ecuaciones 71, 72 y 73 se tiene:

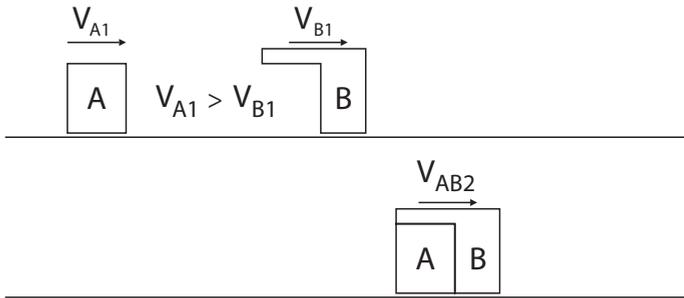
$$v_{A2} = 25.81 \frac{ft}{s}, v_{B2} = 51.62 \frac{ft}{s}, T = 3.22 lb$$

## 3.2. Choques

Los choques de objeto son la base para muchos estudios de criminalística y de reconstrucción de accidentes automovilísticos, en los cuales se necesita saber cómo fue el proceder de los objetos involucrados. Para el desarrollo de esta temática se hace uso del principio de impulso y cantidad de movimiento teniendo como base el instante antes del choque y el instante después del choque, para esto se supone que el tiempo es tan pequeño que la influencia de las fuerzas es demasiado pequeña. Por consiguiente, se debe tener claro que hay dos clases de choques: los frontales y los oblicuos y, adicionalmente, cuando ocurre un choque se presentan dos alternativas: la primera es que los objetos después del choque queden unidos y la segunda es que los objetos después del choque queden separados. A continuación se hará una breve descripción de las formulas a utilizar en el desarrollo de cada uno de los casos propuestos.

### 3.2.1 Choque con objetos unidos – Cantidad de movimiento

Según lo indicado en la siguiente figura, los dos objetos tienen una velocidad antes del choque y una velocidad conjunta después de este.

**Figura 63. Choque de bloques que se unen**

Fuente: elaboración propia.

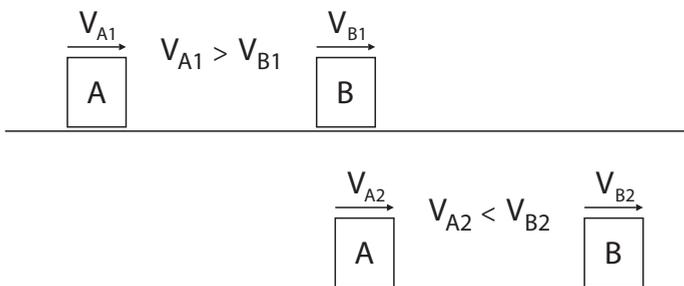
Haciendo uso de la ecuación de Impulso y cantidad de movimiento, para un tiempo pequeño se tiene que la cantidad de movimiento no se pierde, sino que se transforma:

$$m_A V_{A1} + m_B V_{B1} = (m_A + m_B) V_{AB2} \quad (74)$$

Esta ecuación es más conocida como la ecuación de conservación de energía para bloques que se unen y, como se observa en la Figura 63, la ecuación se plantea asumiendo un sentido positivo de la ecuación, por consiguiente, si un cuerpo tiene una velocidad contraria al sentido asumido, se debe corregir la ecuación.

### 3.2.2 Choque con objetos separados – cantidad de movimiento

Según lo indicado en la siguiente figura, los dos objetos tienen una velocidad antes del choque y una velocidad después del choque.

**Figura 64. Choque de bloques**

Fuente: elaboración propia.

Haciendo uso de la ecuación de Impulso y cantidad de movimiento, para un tiempo pequeño se tiene que la cantidad de movimiento no se pierde, sino que se transforma:

$$m_A V_{A1} + m_B V_{B1} = m_A V_{A2} + m_B V_{B2} \quad (75)$$

Esta ecuación es más conocida como la ecuación de conservación de energía para dos bloques que se chocan y no se unen y, como se observa en la Figura 64, la ecuación se

plantea asumiendo un sentido positivo de la ecuación, por consiguiente, si un cuerpo tiene una velocidad contraria al sentido asumido, se debe corregir la ecuación.

### 3.2.2 Choque frontales

Debido a la dinámica del movimiento de los cuerpos, durante el choque frontal, como se indica en la Figura 64, la energía no se pierde, sino que se transforma; sin embargo, la Ecuación 75 presenta dos incógnitas: las velocidades de los cuerpos después del choque.

Para la solución de esta ecuación se debe hacer uso de una segunda ecuación que relacione estas incógnitas, para esto se utiliza la ecuación del coeficiente de restitución, la cual nos indica el porcentaje de energía que se transfiere durante el choque, es por eso que muchas veces los choques son plásticos o elásticos dependiendo del tipo de materiales que intervengan. A continuación se indica la ecuación del coeficiente de restitución que se da durante el choque de dos objetos.

$$e = \frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - v_{B1}} \quad (76)$$

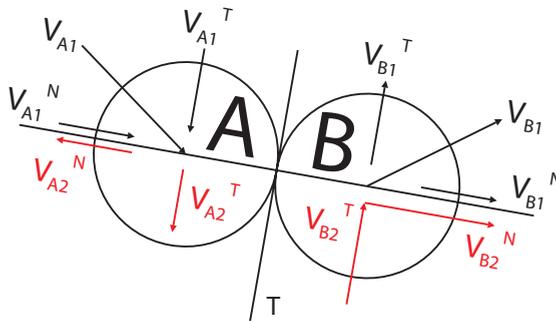
La ecuación anterior nos indica que el coeficiente de restitución ( $e$ ) relaciona la velocidad relativa de los cuerpos después del choque (salida), dividida entre la velocidad relativa de los cuerpos antes del choque (entrada).

#### Link del acompañamiento mediante video:

<https://www.youtube.com/watch?v=LZ23xYZGNhQ>

### 3.2.3 Choque oblicuos

Figura 65. Diagrama de velocidades en un choque oblicuo



Fuente: elaboración propia.

Como indica la figura anterior, las velocidades de los cuerpos antes del choque no son paralelas entre ellas (velocidades 1 - entrada) ni con el eje de impacto o normal, el cual pasa por los centros de gravedad de los objetos, adicionalmente, se tiene un eje tangencial, el cual está a 90 grados del eje normal.

**Tips de desarrollo:** Posteriormente, se calculan las componentes de las velocidades de entrada (1) en los ejes antes mencionados. Para las velocidades de salida se tiene las siguientes reglas:

- La velocidad tangencial de los cuerpos se conserva, tanto en magnitud como en dirección, por consiguiente, la velocidad tangencial de entrada es igual a la velocidad tangencial de salida, para el cuerpo A se tendrá:

$$v_{T1}^A = v_{T2}^A \quad (77)$$

- Para la solución de las velocidades normales de los cuerpos después del choque, se hace uso de la ecuación de conservación de energía, Ecuación 75, y la ecuación del coeficiente de restitución, Ecuación 76.

#### Link del acompañamiento mediante video:

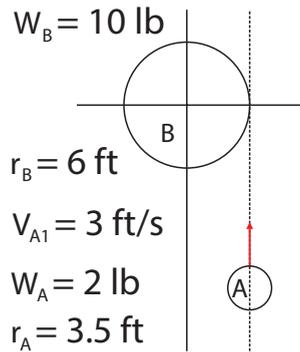
[https://www.youtube.com/watch?v=I\\_\\_nLRVnkBk](https://www.youtube.com/watch?v=I__nLRVnkBk)

A continuación, se desarrollarán varios ejemplos de aplicaciones en las cuales es útil el empleo de los conceptos estudiados.

**Ejemplo 3.7:** si se sabe que el coeficiente de restitución del choque de las esferas A con B es  $e = 0.65$  y el coeficiente de fricción de la esfera B con el piso es de  $\mu = 0.1$ , determine el espacio recorrido por la esfera B después de 0.1 s. El movimiento se da en el plano horizontal.

**Matlab:** con el objetivo de evaluar la influencia del coeficiente de restitución en la distancia recorrida por la esfera B en 0.1 s. Variar el coeficiente de restitución desde 0.5 y 0.8 en intervalos de 0.05.

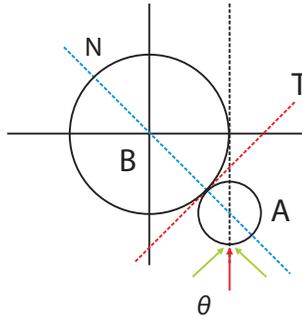
**Figura 66. Choque oblicuo de esferas**



Fuente: elaboración propia.

#### Desarrollo conceptual

**Tips:** para el desarrollo de este tipo de ejercicios es importante inicialmente realizar un diagrama en el cual se identifiquen los ejes normal y tangencial del choque y las dirección es de las velocidades, al igual que sus componentes, como se indica en la siguiente figura:

**Figura 67. Choque oblicuo de esferas – coordenadas del choque**

Fuente: elaboración propia.

Inicialmente se debe determinar el ángulo que forma el eje normal con el eje x, de la Figura 67 se tiene:

$$\cos \theta = \frac{r_B}{r_A + r_B} \theta = 50.833^\circ$$

Seguidamente se debe descomponer la velocidad de entrada de la esfera A en sus componentes normal y tangencial:

$$v_{A1}^N = v_{A1} \text{sen} \theta = 2.325 \text{ ft} / \text{s}$$

$$v_{A1}^T = v_{A1} \cos \theta = 1.894 \text{ ft} / \text{s}$$

Aplicando la ecuación de conservación de energía, Ecuación 75, con  $v_{B1}^N = 0$  y asumiendo las velocidades después del choque positivas se tiene:

$$m_A v_{A1}^N + m_B v_{B1}^N = m_A v_{A2}^N + m_B v_{B2}^N$$

$$2 v_{A1}^N = 2 v_{A2}^N + 10 v_{B2}^N \quad (78)$$

Aplicando la fórmula del coeficiente de restitución, Ecuación 76, se tiene:

$$e = \frac{v_{B2}^N - v_{A2}^N}{v_{A1}^N - v_{B1}^N}$$

$$0.65 v_{A1}^N = v_{B2}^N - v_{A2}^N \quad (2) \quad (79)$$

Solucionando las ecuaciones 78 y 79 y teniendo en cuenta que como la velocidad inicial de la esfera B es cero (velocidad de entrada), entonces la velocidad de la esfera B despues del choque es unicamente en la dirección normal y será, por consiguiente, la velocidad total de la esfera. De la solución se tiene que:

$$v_{B2}^N = 0.639 \text{ ft} / s$$

Aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento, para la esfera B, se tiene:

$$\begin{aligned} m_B v_{B2} - \mu N t &= m_B v_{B3} \\ m_B v_{B2} - \mu m_B g t &= m_B v_{B3} \\ v_{B3} &= 0.317 \text{ ft} / s \end{aligned}$$

Seguidamente, aplicando el principio de trabajo y energía para la esfera B:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2 - \mu N s &= \frac{1}{2} m_B v_{B3}^2 \\ \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2 - \mu m_B g s &= \frac{1}{2} m_B v_{B3}^2 \\ s &= 0.048 \text{ ft} \end{aligned}$$

## Script en Matlab

```

%% Choques
clc
clear
% Ejemplo 3.7
mu1 = 0.1;
g = 32.2;
t = 0.1;
WA = 2; WB = 10; % peso en lb
rA = 3.5; rB = 6; % radio en ft
VA1 = 3; % velocidad de A en t=0 s
% Coeficiente de restitución
e = 0.5:0.05:0.8;
% Ángulo formado por las esferas en el impacto, en rad
rad_theta = acos(rB/(rA+rB));
% Cálculo velocidades en las dirección es n-t de A en t=0 s
VA1n = VA1*sin(rad_theta); VA1t = VA1*cos(rad_theta);
% Principio conservación energía después del choque
% Ecuaciones (1) y (2) solución V = A\B
% Ecuación (1) 2VA2n+10VB2n=2VA1n; Ecuación (2) -VA2n-VB2n=eVA1n
A = [2 10; -1 1];
[m,n] = size(e);
V = zeros(2,7);
% Cálculo de VA2n y VB2n
for i = 1:n
    B = [2*VA1n; VA1n*e(:,i)];
    V(:,i) = A\B;
end

VA2n = V(1,:); VB2n = V(2,:);
% Aplicando principio de impulso y cantidad de movimiento a B
VB3 = VB2n-mu1*g*t;
% Calcular la distancia recorrida
s = 0.5*(VB2n.^2-VB3.^2)/(mu1*g);

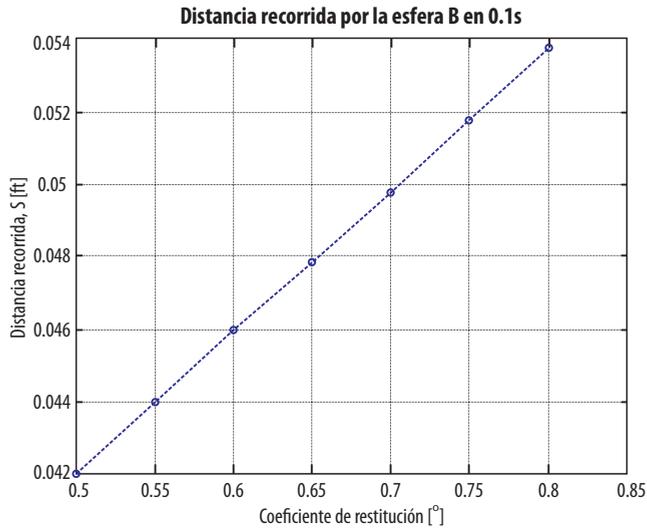
figure2 = figure('Color',[1 1 1]);
plot(e,s,'--ob');
grid on
title('Distancia recorrida por la esfera B en 0.1 s','FontSize',14);
xlabel('Coeficiente de restitución, e','FontSize',14);
ylabel('Distancia recorrida, S [ft]','FontSize',14);

print -dpng EJE_3-7.png %Guarda la Figura

```

La Figura 68 muestra que al aumentar el coeficiente de restitución aumenta la distancia recorrida por la esfera B después del choque, esto indica que la energía adsorbida por la esfera B es mayor, por consiguiente aumenta su velocidad y desplazamiento, este aumento se da de forma lineal durante el primer 0.1 s después del impacto.

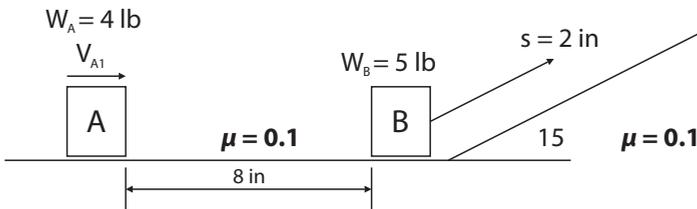
**Figura 68. Diagrama coeficiente de restitución vs. distancia recorrida**



Fuente: elaboración propia.

**Ejemplo 3.8:** el bloque **A** de la figura lleva una velocidad de  $(VA1 = 4 \text{ ft} / \text{s})$  en el instante mostrado. Si se sabe que el bloque **A** al chocar con el bloque **B**, que está en reposo, el coeficiente de restitución es de  $e = 0,4$ . Determine el tiempo que toma el bloque **B** en recorrer  $s = 2 \text{ in}$ .

**Figura 69. Choque de bloques - rampa**

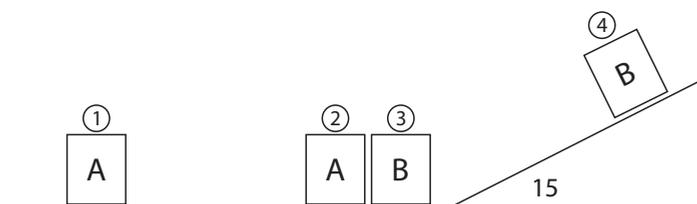


Fuente: elaboración propia.

**Desarrollo conceptual y descriptivo del movimiento**

Utilizando la misma metodología aplicada anteriormente en la cual se detallan los instantes del movimiento de los bloques, Figura 70, se tiene:

**Figura 70. Diagrama de movimiento de los bloques**



Fuente: elaboración propia.

- **Etapa 1-2:** el bloque A va desde el instante mostrado (1) hasta antes de tocar el bloque B (2), bajo la acción de la fricción únicamente (principio de trabajo y energía).
- **Etapa 2-3:** el bloque A choca con el bloque B que está en reposo ( $v_{B2} = 0$ ), (ecuaciones de conservación de energía, Ecuación 75, y coeficiente de restitución, Ecuación 76).
- **Etapa 3-4:** el bloque B va desde el instante mostrado hasta recorrer el espacio indicado. Bajo la acción de la fricción y el peso (principio de trabajo y energía y principio de impulso y cantidad de movimiento).

### **Etapa 1-2 Principio de trabajo y energía**

Desarrollando el diagrama de cuerpo libre del bloque A para el plano y colocando las unidades del ejemplo en sistema inglés se tiene:

$$N = W_{A,s} = \frac{8}{12} ft$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 - \int_0^s m_A g \mu ds = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2$$

$$v_{A2} = 3.421 ft / s$$

### **Etapa 2-3 choque**

Aplicando las ecuaciones recomendadas se tiene:

$$e = \frac{v_{B3} - v_{A3}}{v_{A2} - v_{B2}} = \frac{v_{B3} - v_{A3}}{v_{A2}}$$

$$e v_{A2} = v_{B3} - v_{A3} \quad (80)$$

$$m_A v_{A2} + m_B v_{B2} = m_A v_{A3} + m_B v_{B3}$$

$$m_A v_{A2} = m_A v_{A3} + m_B v_{B3} \quad (81)$$

Solucionando las ecuaciones 80 y 81:

$$v_{B3} = 2.1286 ft / s$$

### **Etapa 3-4 Principio de trabajo y energía**

Desarrollando el diagrama de cuerpo libre del bloque B para la sección de la rampla y colocando las unidades del ejemplo en sistema inglés, se tiene:

$$N = W_B \cos 15, s = \frac{2}{12} ft$$

$$\frac{1}{2} m_B v_{B3}^2 - \int_0^s m_B g \sin 15 ds - \int_0^s m_B g \mu \cos 15 ds = \frac{1}{2} m_B v_{B4}^2$$

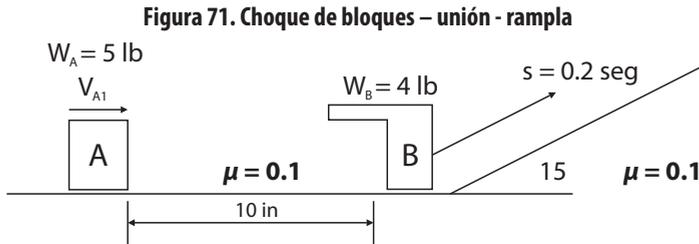
$$v_{B4} = 0.847 ft / s$$

### Etapa 3-4 Principio de impulso y cantidad de movimiento

$$m_B v_{B3} - \int_0^t m_B g \sin 15 dt - \int_0^t m_B g \mu \cos 15 dt = m_B v_{B4}$$

$$t = 0.111 s$$

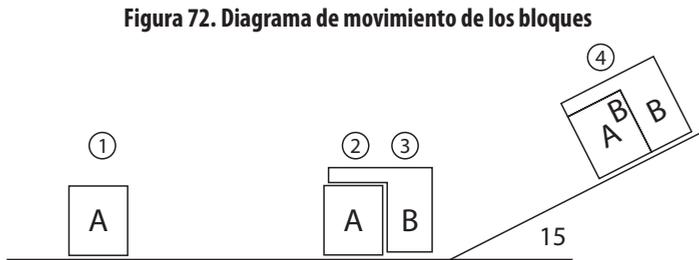
**Ejemplo 3.9:** el bloque A de la figura lleva una velocidad de ( $V_{A1}=5 \text{ ft/s}$ ) en el instante mostrado. Si se sabe que el bloque A al chocar con el bloque B se unen, determine el espacio recorrido por los bloques después de un tiempo de  $t = 0.2 \text{ s}$ .



Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo conceptual y descriptivo del movimiento

Utilizando la misma metodología aplicada anteriormente en la cual se detallan los instantes del movimiento de los bloques, Figura 72, se tiene:



Fuente: elaboración propia.

- **Etapa 1-2:** el bloque A va desde el instante mostrado (1) hasta antes de tocar el bloque B (2), bajo la acción de la fricción únicamente (principio de trabajo y energía).
- **Etapa 2-3:** el bloque A choca con el bloque B que está en reposo ( $v_{B2}=0$ ), ecuaciones de conservación de energía, Ecuación 74.
- **Etapa 3-4:** el bloque AB va desde el instante mostrado hasta recorrer el espacio indicado. Bajo la acción de la fricción y el peso (aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento y el principio de trabajo y energía).

**Etapa 1-2 principio de trabajo y energía**

Desarrollando el diagrama de cuerpo libre del bloque A para el plano y colocando las unidades del ejemplo en sistema inglés se tiene:

$$N = W_{A,s} = \frac{10}{12} ft$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 - \int_0^s m_A g \mu ds = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2$$

$$v_{A2} = 4.4309 ft / s$$

**Etapa 2-3 choque**

Aplicando las ecuaciones recomendadas se tiene:

$$m_A v_{A2} + m_B v_{B2} = (m_A + m_B) v_{AB3} \quad v_{AB3} = 2.461 ft / s$$

**Etapa 3-4 Principio de impulso y cantidad de movimiento**

Desarrollando el diagrama de cuerpo libre del bloque AB para la sección de la rampla se tiene:

$$N = W_{AB} \cos 15, t = 2 s$$

$$m_{AB} v_{AB3} - \int_0^t m_{AB} g \sin 15 dt - \int_0^t m_{AB} g \mu \cos 15 dt = m_{AB} v_{AB4}$$

$$v_{AB4} = 0.173 ft / s$$

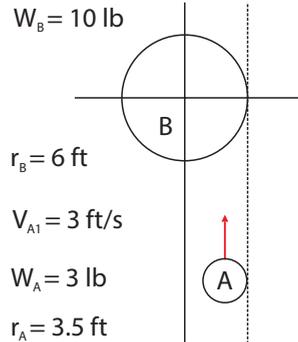
**Etapa 3-4 Principio de trabajo y energía**

$$\frac{1}{2} m_{AB} v_{AB3}^2 - \int_0^s m_{AB} g \sin 15 ds - \int_0^s m_{AB} g \mu \cos 15 ds = \frac{1}{2} m_{AB} v_{AB4}^2$$

$$s = 0.2632 ft$$

**Ejemplo 3.10:** si se sabe que el coeficiente de restitución del choque de las esferas A con B es  $e = 0.65$  y el coeficiente de fricción de la esfera B con el piso es de  $\mu = 0,1$ , determine el espacio recorrido por la esfera B después de 0.2 s. El movimiento se da en el plano horizontal.

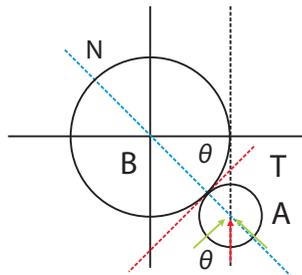
**Apropiación del conocimiento:** con base en el *script* de Matlab del ejemplo 3.7 desarrollar el *script* y las respectivas mediciones para este ejemplo.

**Figura 73. Choque oblicuo de esferas**

Fuente: elaboración propia.

**Desarrollo conceptual**

**Tips:** para el desarrollo de este tipo de ejercicios es importante inicialmente realizar un diagrama en el cual se identifiquen los ejes normal y tangencial del choque y las dirección es de las velocidades, al igual que sus componentes, como se indica en la siguiente figura:

**Figura 74. Choque oblicuo de esferas – coordenadas del choque**

Fuente: elaboración propia.

Inicialmente se debe determinar el ángulo que forma el eje normal con el eje  $x$  de la Figura 74, con lo que se tiene:

$$\cos \theta = \frac{r_B - r_A}{r_A + r_B} \quad \theta = 74.742^\circ$$

Seguidamente se debe descomponer la velocidad de entrada de la esfera A en sus componentes normal y tangencial:

$$v_{A1}^N = v_{A1} \text{sen} \theta = 2.894 \text{ ft/s}$$

$$v_{A1}^T = v_{A1} \cos \theta = 0.789 \text{ ft/s}$$

Aplicando el principio de conservación de energía, Ecuación 75, con  $v_{B1}^N = 0$  y asumiendo las velocidades después del choque positivas, se tiene:

$$m_A v_{A1}^N + m_B v_{B1}^N = m_A v_{A2}^N + m_B v_{B2}^N$$

$$3v_{A1}^N = 3v_{A2}^N + 10v_{B2}^N \quad (82)$$

Aplicando la formula del coeficiente de restitución, Ecuación 76, se tiene:

$$e = \frac{v_{B2}^N - v_{A2}^N}{v_{A1}^N - v_{B1}^N}$$

$$0.65v_{A1}^N = v_{B2}^N - v_{A2}^N \quad (83)$$

Solucionando las ecuaciones 82 y 83 y teniendo en cuenta que como la velocidad inicial de la esfera B es cero (velocidad de entrada), entonces la velocidad de la esfera B despues del choque es unicamente en la dirección normal y será, por consiguiente, la velocidad total de la esfera. De la solución se tiene que:

$$v_{B2}^N = 1.102 \text{ ft} / \text{s}$$

Aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento, para la esfera B se tiene:

$$m_B v_{B2} - \mu N t = m_B v_{B3}$$

$$m_B v_{B2} - \mu m_B g t = m_B v_{B3}$$

$$v_{B3} = 0.458 \text{ ft} / \text{s}$$

Seguidamente, aplicando el principio de trabajo y energía, para la esfera B:

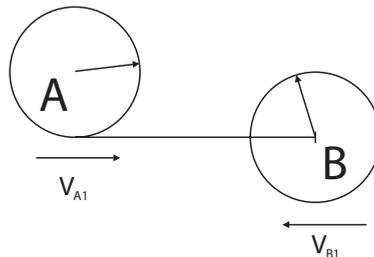
$$\frac{1}{2} m_B v_{B2}^2 - \mu N s = \frac{1}{2} m_B v_{B3}^2$$

$$\frac{1}{2} m_B v_{B2}^2 - \mu m_B g s = \frac{1}{2} m_B v_{B3}^2$$

$$s = 0.156 \text{ ft}$$

**Ejemplo 3.11:** para el choque de la figura se sabe que la esfera A tiene un radio ( $r_A$ ) y una velocidad ( $v_{A1}$ ) y la esfera B tiene un radio ( $r_B$ ) y una velocidad ( $v_{B1}$ ). Para un coeficiente de restitución ( $e$ ) determine las velocidades de las esferas después del choque.

**Figura 75. Choque oblicuo de esferas**

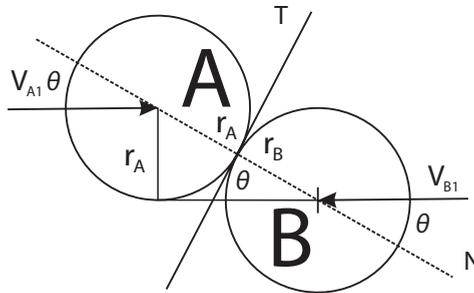


Fuente: elaboración propia.

- **Choque**

Conforme a los problemas desarrollados, se deben definir las coordenadas normal y tangencial del choque y colocar las velocidades de las esferas en estas coordenadas.

**Figura 76. Choque oblicuo de esferas – coordenadas del choque**



Fuente: elaboración propia.

De la Figura 76 se tiene:

$$\theta = \text{asen} \left( \frac{r_A}{r_A + r_B} \right)$$

$$V_{A1}^N = V_{A1} \cos \theta$$

$$V_{A1}^T = V_{A1} \text{sen} \theta$$

$$V_{B1}^N = V_{B1} \cos \theta$$

$$V_{B1}^T = V_{B1} \text{sen} \theta$$

Como las velocidades tangenciales se conservan se tiene:

$$V_{A2}^T = V_{A1}^T = V_{A1} \text{sen} \theta$$

$$V_{B2}^T = V_{B1}^T = V_{B1} \text{sen} \theta$$

Asumiendo que las velocidades normales después del choque conservan su dirección, se tiene, por conservación de energía, Ecuación 75:

$$mV_{A1}^N + mV_{B1}^N = mV_{A2}^N + mV_{B2}^N$$

$$V_{A1}^N + V_{B1}^N = V_{A2}^N + V_{B2}^N$$

Tips: con respecto al eje normal, se asume que las velocidades con dirección hacia el lado derecho son positivas, de donde se puede observar que las dirección es de las velocidades normales de la esfera B son contrarias a lo asumido, por consiguiente, corrigiendo la dirección de las velocidades normales de la esfera B en la ecuación anterior, se tiene:

$$V_{A1}^N - V_{B1}^N = V_{A2}^N - V_{B2}^N \quad (84)$$

Aplicando la ecuación del coeficiente de restitución, Ecuación 76:

$$e = \frac{V_{B2}^N - V_{A2}^N}{V_{A1}^N - V_{B1}^N}$$

$$e(V_{A1}^N - V_{B1}^N) = V_{B2}^N - V_{A2}^N$$

Corrigiendo la dirección de las velocidades normales de la esfera B:

$$e(V_{A1}^N + V_{B1}^N) = -V_{B2}^N - V_{A2}^N \tag{85}$$

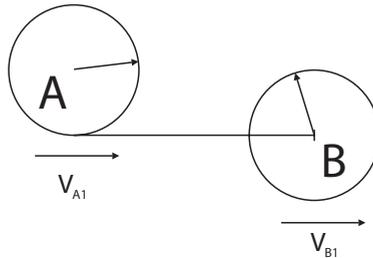
De la solución de las ecuaciones 84 y 85 se tiene:

$$V_{B2}^N = \frac{V_{A1}^N (e+1) + V_{B1}^N (e-1)}{-2}$$

$$V_{A2}^N = V_{A1}^N + V_{B1}^N - V_{B2}^N$$

**Ejemplo 3.12:** para el choque de la figura se sabe que la esfera A tiene un radio ( $r_A$ ) y una velocidad ( $v_{A1}$ ) y la esfera B tiene un radio ( $r_B$ ) y una velocidad ( $v_{B1}$ ). Para un coeficiente de restitución ( $e$ ) determine las velocidades de las esferas después del choque.

**Figura 77. Choque oblicuo de esferas**

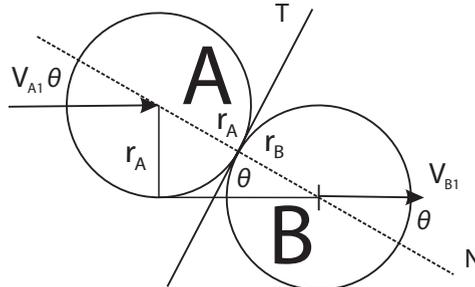


Fuente: elaboración propia.

• **Choque**

Conforme a los problemas desarrollados, se deben definir las coordenadas normal y tangencial del choque y colocar las velocidades de las esferas en estas coordenadas.

**Figura 78. Choque oblicuo de esferas – coordenadas del choque**



Fuente: elaboración propia.

De la Figura 78 se tiene:

$$\theta = \text{asen} \left( \frac{r_A}{r_A + r_B} \right)$$

$$V_{A1}^N = V_{A1} \cos \theta$$

$$V_{A1}^T = V_{A1} \text{sen} \theta$$

$$V_{B1}^N = V_{B1} \cos \theta$$

$$V_{B1}^T = V_{B1} \text{sen} \theta$$

Como las velocidades tangenciales se conservan, se tiene:

$$V_{A2}^T = V_{A1}^T = V_{A1} \text{sen} \theta$$

$$V_{B2}^T = V_{B1}^T = V_{B1} \text{sen} \theta$$

Asumiendo que las velocidades normales despues del choque conservan su dirección, se tiene por conservación de energía, Ecuación 75:

$$mV_{A1}^N + mV_{B1}^N = mV_{A2}^N + mV_{B2}^N$$

$$V_{A1}^N + V_{B1}^N = V_{A2}^N + V_{B2}^N \quad (86)$$

Aplicando la ecuación del coeficiente de restitución, Ecuación 76:

$$e = \frac{V_{B2}^N - V_{A2}^N}{V_{A1}^N - V_{B1}^N}$$

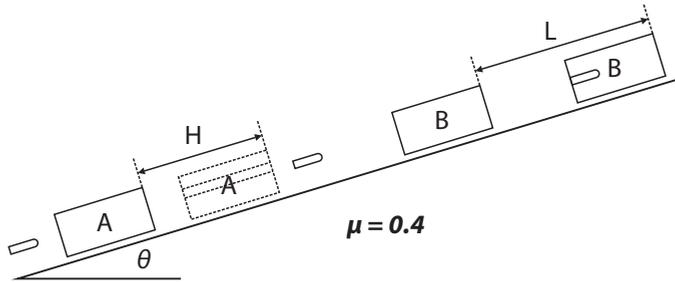
$$e(V_{A1}^N - V_{B1}^N) = V_{B2}^N - V_{A2}^N \quad (87)$$

De la solución de las ecuaciones 86 y 87 se tiene:

$$V_{B2}^N = \frac{V_{A1}^N (e+1) + V_{B1}^N (1-e)}{2}$$

$$V_{A2}^N = V_{A1}^N + V_{B1}^N - V_{B2}^N$$

**Ejemplo 3.13:** la bala de la Figura 79 traspasa el bloque A instantáneamente y seguidamente se incrusta en el bloque B. La energía entregada por la bala a los bloques hace que estos se muevan las distancias indicadas hasta el reposo. Sabiendo que los bloques inicialmente están en reposo, determinar la velocidad inicial de la bala antes de traspasar el bloque A ( $W_A=8 \text{ N}$ ,  $W_B=7 \text{ N}$ ,  $W_{BALA}=0.4 \text{ N}$ ,  $H=1.6 \text{ m}$ ,  $L=1.1 \text{ m}$  y  $\theta=10^\circ$ ):

**Figura 79. Choque bala con bloques**

Fuente: elaboración propia.

**Desarrollo conceptual**

Para el ejercicio presentado se conocen las distancias recorridas por los bloques después de recibir la energía dada por la bala, también se conoce que sus velocidades finales son iguales a cero. Observando el diagrama de la Figura 79 se puede visualizar que el movimiento se da de la siguiente forma:

**Instante 1** – bala antes del choque con el bloque A

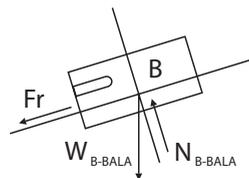
**Instante 2** – bala y bloque A después del choque

**Instante 3** – bloque A después del choque hasta detenerse

**Instante 4** – bala y bloque B después del choque

**Instante 5** – bloque B-bala después del choque hasta detenerse

Como se conocen datos del final del ejercicio, se debe realizar la reconstrucción del movimiento teniendo en cuenta lo anterior y desarrollando el diagrama de cuerpo libre para el bloque B-bala, se tiene:

**DCL del Bloque B - Bala****Figura 80. Diagrama de cuerpo libre bloque B - bala**

Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del bloque B – bala (instantes 4 - 5), y aplicando el principio de trabajo y energía, se obtiene la velocidad del bloque B junto con la bala despues del choque ( $v_{B-B3}$ ):

$$N_B = W_B \cos \theta$$

$$\frac{1}{2} m_{B-B} v_{B-B3}^2 - \int_0^L m_{B-B} g \sin \theta ds - \int_0^L \mu m_{B-B} g \cos \theta ds = 0$$

$$v_{B-B3} = \sqrt{2 g L (\sin \theta + \mu \cos \theta)} = 3.499 \text{ m / s}$$

Aplicando el principio de conservación de energía, Ecuación 14, para el choque de la bala con el bloque B, se obtiene la velocidad de la bala antes del choque (Istantes 2 – 4).

$$m_{BALA} v_{BALA2} = m_{B-B} v_{B-B3}$$

$$v_{BALA2} = \frac{m_{B-B} v_{B-B3}}{m_{BALA}} = 64.74 \text{ m / s}$$

Aplicando el principio de trabajo y energía, se obtiene la velocidad del bloque A despues del choque con la bala ( $v_{A2}$ ) (instante 3):

$$\frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 - \int_0^H m_A g \sin \theta ds - \int_0^H \mu m_A g \cos \theta ds = 0$$

$$v_{A2} = \sqrt{2 g H (\sin \theta + \mu \cos \theta)} = 4.22 \text{ m / s}$$

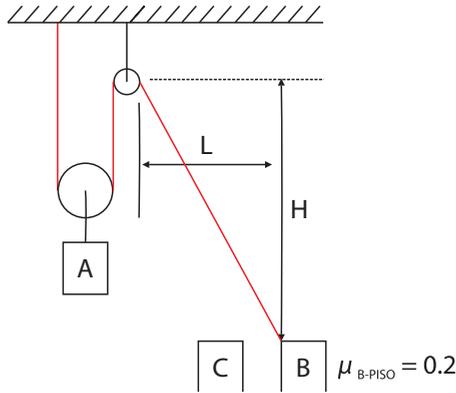
Aplicando el principio de conservación de energía para el choque de la bala con el bloque A, Ecuación 75, se obtiene la velocidad de la bala antes del choque.

$$m_{BALA} v_{BALA1} = m_A v_{A2} + m_{BALA} v_{BALA2}$$

$$v_{BALA1} = \frac{m_A v_{A2} + m_{BALA} v_{BALA2}}{m_{BALA}} = 149.14 \text{ m / s}$$

**Ejemplo 3.14:** del sistema de la Figura 81 se sabe que  $W_A=8 \text{ lb}$ ,  $W_B=20 \text{ lb}$ ,  $W_C=20 \text{ lb}$ ,  $L=10 \text{ ft}$ ,  $H=16 \text{ ft}$ . Si adicionalmente se sabe que el sistema AB está en reposo, determine la velocidad del bloque A despues del choque del bloque C con el bloque B si la velocidad del bloque C es  $v_c=6 \text{ ft/s}$  y  $e=0.6$

**Figura 81. Choque y movimiento de bloques**



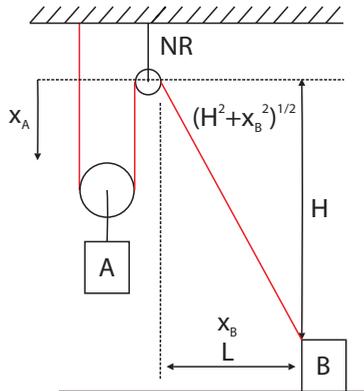
Fuente: elaboración propia.

**Desarrollo conceptual**

Inicialmente se debe desarrollar la ecuación de la cuerda del sistema AB, ya que el movimiento del bloque B depende de esta, aplicando los *tips* dados en la sección 1.2.1 se tiene:

**Diagrama de la cuerda**

**Figura 82. Diagrama – ecuación de la cuerda**



Fuente: elaboración propia.

Como la longitud  $L$  es variable, se realiza un cambio de variable y se coloca como  $x_B$ , esta detalla el movimiento del bloque B. Del diagrama de la Figura 82 se tiene:

$$L_C = 2x_A + \sqrt{H^2 + x_B^2} \quad (88)$$

Derivando la Ecuación 88, con respecto al tiempo, se tiene:

$$0 = 2v_A + \frac{1}{2} \frac{2x_B v_B}{\sqrt{H^2 + x_B^2}}$$

$$v_A = -\frac{x_B v_B}{2\sqrt{H^2 + x_B^2}} \quad (89)$$

$$v_B = -\frac{2v_A \sqrt{H^2 + x_B^2}}{x_B} \quad (90)$$

- **Choque C con B**

Aplicando el principio de conservación de energía, Ecuación 75:

$$m_C v_{C1} + m_B v_{B1} = m_C v_{C2} + m_B v_{B2}$$

$$6 = v_{C2} + v_{B2} \quad (91)$$

Aplicando la formula del coeficiente de restitución al choque Ecuación 92:

$$e = \frac{v_{B2} - v_{C2}}{v_{C1} - v_{B1}}$$

$$3.6 = v_{B2} - v_{C2} \quad (92)$$

De las ecuaciones 91 y 92 se obtiene:

$$v_{B2} = 4.8 \text{ ft} / \text{s}$$

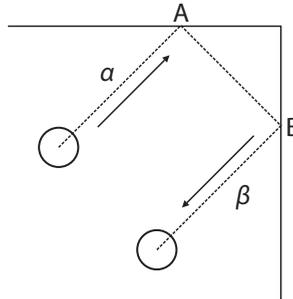
De la Ecuación 89 se tiene:

$$v_A = -\frac{x_B v_B}{2\sqrt{H^2 + x_B^2}} = -\frac{10v_{B2}}{2\sqrt{16^2 + 10^2}}$$

$$v_{A2} = 1.27 \text{ ft} / \text{s}$$

**Ejemplo 3.15:** si se sabe que la bola de billar de la Figura 83 golpea primero en **A** y después en **B** y que el coeficiente de restitución es **e**, determine el valor del ángulo **β** (de salida) en función del ángulo **α** (de entrada) (Ejercicio adaptado de Gray, 2014):

**Figura 83. Recorrido de la bola de billar**

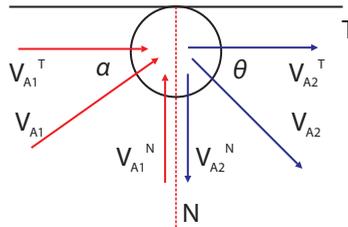


Fuente: Adaptado de Gray, 2014

Aplicando la metodología desarrollada a lo largo de los ejercicios de choques de esta sección, se analizará el primer choque de la bola de billar especificando la velocidad de entrada y la de salida y sus componentes en los ejes normal y tangencial del choque, como se especifica en la Figura 84.

**DCL del primer choque**

**Figura 84. Diagrama del primer choque**



Fuente: elaboración propia.

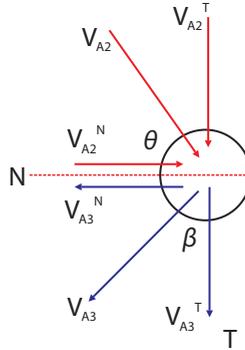
Del diagrama y de la teoría de choques se tiene:

$$\begin{aligned}
 V_{A1}^T &= V_{A1} \cos \alpha & V_{A1}^N &= V_{A1} \operatorname{sen} \alpha \\
 V_{A2}^T &= V_{A1}^T & V_{A2}^N &= e V_{A1}^N \\
 V_{A2} &= \sqrt{(V_{A2}^N)^2 + (V_{A2}^T)^2} \\
 V_{A2} &= \sqrt{(e V_{A1} \operatorname{sen} \alpha)^2 + (V_{A1} \cos \alpha)^2} \\
 V_{A2} &= V_{A1} \sqrt{e^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \\
 \tan \theta &= \frac{V_{A2}^N}{V_{A2}^T} = \frac{e V_{A1} \operatorname{sen} \alpha}{V_{A1} \cos \alpha} = e \tan \alpha \\
 \theta &= \arctan (e \tan \alpha)
 \end{aligned}$$

De igual forma que con el primer choque, se desarrolla el diagrama del segundo choque:

### DCL del segundo choque

Figura 85. Diagrama del segundo choque



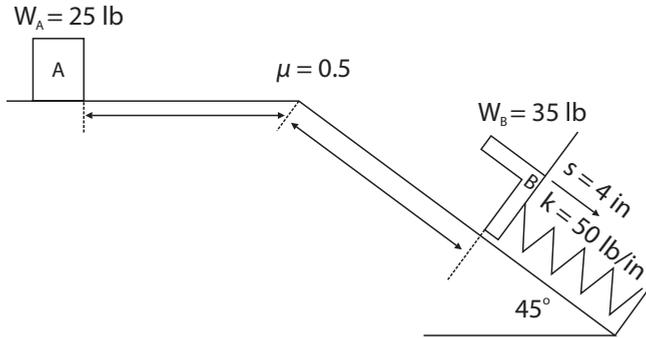
Fuente: elaboración propia.

Del diagrama y de la teoría de choques se tiene que:

$$\begin{aligned}
 V_{A2}^T &= V_{A2} \operatorname{sen} \theta & V_{A2}^N &= V_{A2} \cos \theta \\
 V_{A3}^T &= V_{A2}^T & V_{A3}^N &= e V_{A2}^N \\
 V_{A3} &= \sqrt{(V_{A3}^N)^2 + (V_{A3}^T)^2} \\
 V_{A3} &= \sqrt{(e V_{A2} \cos \theta)^2 + (V_{A2} \operatorname{sen} \theta)^2} \\
 V_{A3} &= V_{A2} \sqrt{e^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta} \\
 \tan \beta &= \frac{V_{A3}^N}{V_{A3}^T} = \frac{e V_{A2} \cos \theta}{V_{A2} \operatorname{sen} \theta} = e \cot \theta \\
 \beta &= \arctan(e \tan \theta)
 \end{aligned} \tag{94}$$

**Ejemplo 3.16:** si se sabe que el bloque A de la Figura 86 se encaja en el bloque B cuando chocan, determine la velocidad inicial del bloque A y el tiempo total del recorrido para que el resorte se comprima 4 in. Adicionalmente se sabe que el resorte en su longitud libre tiene ( $L = 9 \text{ in}$ ) y que esta inicialmente comprimido por el peso del bloque B.

**Figura 86. Bloque – Rampla - Choque**



Fuente: elaboración propia.

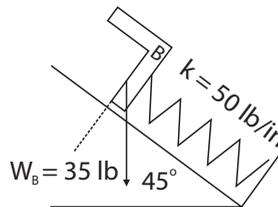
**Desarrollo conceptual del ejemplo y descripción del movimiento**

Conforme a la metodología desarrollada del movimiento del movimiento y desarrollando una reconstrucción del movimiento se tiene las siguientes etapas (nota: desarrollar el diagrama – tener como guía el ejemplo 2.3):

- Etapa 1 – posición inicial del bloque o de salida.
- Etapa 2 – posición del bloque en el borde de la rampla o bajada.
- Etapa 3 – posición del bloque A antes del choque con el bloque B ( $v_{B3}=0$ ).
- Etapa 4 – posición de los dos bloques juntos después del choque.
- Etapa 5 – posición de los dos bloques después de comprimir el resorte ( $v_{AB5}=0$ ).

Adicionalmente, del enunciado y de la Figura 87 se sabe que el resorte se encuentra inicialmente comprimido por el peso del bloque B, por consiguiente, se debe calcular cuánto esta comprimido por efecto de la parte del peso del bloque B que actúa sobre el:

**Figura 87. Compresión del resorte por efecto del bloque B**



Fuente: elaboración propia.

$$F_R = k \times \Delta y$$

De donde la fuerza del resorte ( $F_R$ ) es igual a la porción del peso del bloque B que actúa sobre el resorte:

$$W_B \text{sen}45 = k \times \Delta y$$

$$\Delta y = \frac{W_B \text{sen}45}{k} = 0.4949 \text{ in} = 0.04124 \text{ ft}$$

En este tipo de ejemplos, cuando se conocen datos del final del movimiento y se solicitan datos del inicio, se debe hacer una reconstrucción de todo el movimiento, por consiguiente, aplicando el principio de trabajo y energía entre las etapas 4 y 5 del movimiento, se tiene:

#### Etapas 4-5

$$\frac{1}{2} m_{AB} v_{AB4}^2 + \int_0^S m_{AB} g \operatorname{sen} \theta ds - \int_0^S \mu m_{AB} g \cos \theta ds - \int_{\Delta y}^{S+\Delta y} k s ds = \frac{1}{2} m_{AB} v_{AB5}^2$$

$$\frac{1}{2} m_{AB} v_{AB4}^2 + m_{AB} g \operatorname{sen} \theta s - \mu m_{AB} g \cos \theta s - \frac{k s^2}{2} = 0$$

$$v_{AB4}^2 + 2 g \operatorname{sen} \theta s - 2 \mu g \cos \theta s - \frac{k s^2}{m_{AB}} = 0$$

$$v_{AB4} = \sqrt{-2 g \operatorname{sen} \theta s + 2 \mu g \cos \theta s + \frac{k s^2}{m_{AB}}}$$

$$v_{AB4} = \sqrt{\frac{-2 \times 32.2 \times \operatorname{sen} 45 \left( \frac{4}{12} \right) + 2 \times 0.5 \times 32.2 \times \cos 45 \left( \frac{4}{12} \right) + \frac{600 \left( \left( \frac{4}{12} + 0.04124 \right)^2 - (0.04124)^2 \right)}{60 / 32.2}}$$

$$v_{AB4} = \sqrt{-15.179 + 7.5896 + 44.630} = 6.086 \frac{ft}{s}$$

De forma similar, aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento, entre las etapas 4 y 5 del movimiento para determinar el tiempo del recorrido, se tiene:

$$m_{AB} v_{AB4} + \int_0^t m_{AB} g \operatorname{sen} \theta dt - \int_0^t \mu m_{AB} g \cos \theta dt - \int_0^t k s dt = m_{AB} v_{AB5}$$

$$m_{AB} v_{AB4} + m_{AB} g \operatorname{sen} \theta t - \mu m_{AB} g \cos \theta t - k s t = 0$$

$$v_{AB4} + g \operatorname{sen} \theta t - \mu g \cos \theta t - \frac{k s t}{m_{AB}} = 0$$

$$t = \frac{v_{AB4}}{-g \operatorname{sen} \theta + \mu g \cos \theta + \frac{k s}{m_{AB}}}$$

$$t_{4-5} = \frac{6.086}{-32.2 \times \sin 45 + 0.5 \times 32.2 \times \cos 45 + \frac{600 \times \left(\frac{4}{12}\right)}{60 / 32.2}}$$

$$t_{4-5} = \frac{6.086}{-22.76 + 11.384 + 107.33}$$

$$t_{4-5} = 0.0634 \text{ s}$$

**Nota:** el cálculo del tiempo como se realizó entre las etapas 4 y 5 está mal, ya que se supuso que la fuerza ejercida por el resorte es puntual, lo cual es un concepto errado porque la fuerza del resorte cambia en función del espacio y no con el tiempo, por lo cual no se puede integrar como una fuerza puntual.

En este caso, como se tiene una velocidad inicial de  $v_{AB4} = 6.086 \text{ ft/s}$ , una velocidad final de  $v_{AB5} = 0$  y un espacio recorrido de 4 pulgadas, de las ecuaciones del movimiento rectilíneo, ecuaciones 2 y 3, se calcula la aceleración promedio para el recorrido realizado y posteriormente el tiempo, por consiguiente, se tiene:

$$v_{AB5}^2 = v_{AB4}^2 - 2a_{AB4-5} s$$

$$a_{AB4-5} = \frac{v_{AB4}^2}{2s} = \frac{6.086^2}{2\left(\frac{4}{12}\right)} = 55.559 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$$

$$v_{AB5} = v_{AB4} - a_{AB4-5} t_{4-5}$$

$$t_{4-5} = \frac{v_{AB4}}{a_{AB4-5}} = \frac{6.086}{55.559} = 0.109 \text{ s tiempo real del recorrido.}$$

### Etapas 3-4

Aplicando el principio de cantidad de movimiento, Ecuación 74, para el choque entre los bloques A y B se tiene:

$$m_A v_{A3} + m_B v_{B3} = m_{AB} v_{AB4}$$

$$v_{A3} = \frac{m_{AB} v_{AB4}}{m_A} = 14.6064 \text{ ft / s}$$

### Etapas 2-3

Aplicando el principio de trabajo y energía, entre las etapas 2 y 3 del movimiento, se tiene:

$$\frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \int_0^S m_A g \sin \theta ds - \int_0^S \mu m_A g \cos \theta ds = \frac{1}{2} m_A v_{A3}^2$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + m_A g \operatorname{sen} \theta s - \mu m_A g \cos \theta s = \frac{1}{2} m_A v_{A3}^2$$

$$v_{A2}^2 + 2 g \operatorname{sen} \theta s - 2 \mu g \cos \theta s = v_{A3}^2$$

$$v_{A2} = \sqrt{v_{A3}^2 - 2 g \operatorname{sen} \theta s + 2 \mu g \cos \theta s}$$

$$v_{A2} = \sqrt{14.6064^2 - 2 \times 32.2 \times \operatorname{sen} 45 \times \left(\frac{3}{12}\right) + 2 \times 0.5 \times 32.2 \times \cos 45 \times \left(\frac{3}{12}\right)}$$

$$v_{A2} = \sqrt{213.3469 - 11.3844 + 5.6922} = 14.41 \frac{ft}{s}$$

Aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento, entre las etapas 2 y 3 del movimiento se tiene:

$$m_A v_{A2} + \int_0^t m_A g \operatorname{sen} \theta dt - \int_0^t \mu m_A g \cos \theta dt = m_A v_{A3}$$

$$m_A v_{A2} + m_A g \operatorname{sen} \theta t - \mu m_A g \cos \theta t = m_A v_{A3}$$

$$v_{A2} + g \operatorname{sen} \theta t - \mu g \cos \theta t = v_{A3}$$

$$t = \frac{v_{A3} - v_{A2}}{g \operatorname{sen} \theta - \mu g \cos \theta}$$

$$t_{2-3} = \frac{14.6064 - 14.41}{32.2 \times \operatorname{sen} 45 - 0.5 \times 32.2 \times \cos 45}$$

$$t_{2-3} = \frac{0.1964}{22.76 - 11.384}$$

$$t_{2-3} = 0.01726 s$$

### **Etapas 1-2**

Aplicando el principio de trabajo y energía, entre las etapas 1 y 2 del movimiento se tiene:

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 - \int_0^s \mu m_A g ds = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 - \mu m_A g s = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2$$

$$v_{A1}^2 - 2 \mu g s = v_{A2}^2$$

$$v_{A1} = \sqrt{v_{A2}^2 + 2 \mu g s}$$

$$v_{A1} = \sqrt{14.41^2 + 2 \times 0.5 \times 32.2 \times \left(\frac{3}{12}\right)}$$

$$v_{A1} = \sqrt{207.6481 + 8.05} = 14.686 \frac{ft}{s}$$

Aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento, entre las etapas 1 y 2 del movimiento se tiene:

$$m_A v_{A1} - \int_0^t \mu m_A g dt = m_A v_{A2}$$

$$m_A v_{A1} - \mu m_A g t = m_A v_{A2}$$

$$v_{A1} - \mu g t = v_{A2}$$

$$t = \frac{v_{A1} - v_{A2}}{\mu g}$$

$$t_{1-2} = \frac{14.686 - 14.41}{0.5 \times 32.2}$$

$$t_{1-2} = 0.01718s$$

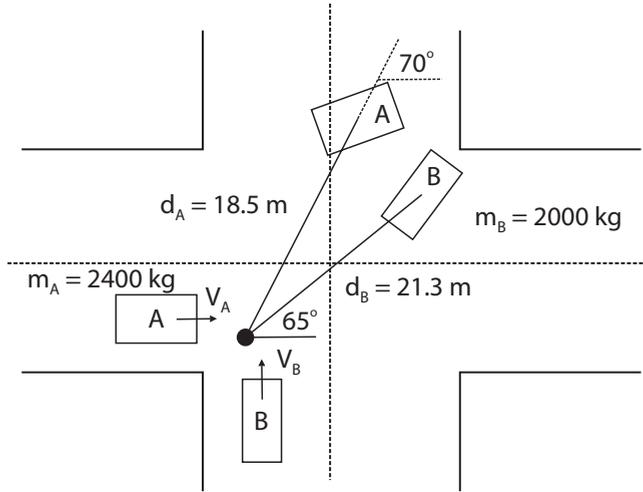
De donde se tiene que el tiempo total del recorrido es igual a:

$$t_{Total} = t_{1-2} + t_{2-3} + t_{4-5}$$

$$t_{Total} = 0.01718 + 0.01726 + 0.109 = 0.1439s$$

**Ejemplo 3.17:** después de un choque observado en la Figura 88, los carros A y B quedan en las posiciones indicadas después del choque habiendo recorrido las distancias  $d_A$  y  $d_B$ , respectivamente, hasta detenerse. Si el choque ocurrió en una superficie horizontal completamente, plana y sin cambios de nivel, y sabiendo que el coeficiente de fricción de los carros con el asfalto es ( $\mu = 0.8$ ) determine las velocidades de los carros antes del choque (ejercicio adaptado de Meriam and Kraige, 2001).

Figura 88. Choque de carros



Fuente: Adaptado de Meriam and Kraige, 2001

### Etapas del movimiento

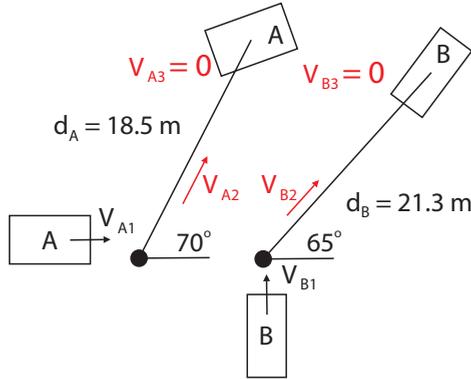
Detallando el movimiento se tiene las siguientes etapas:

- **Etapas 1:** los carros antes del choque con sus velocidades iniciales.
- **Etapas 2:** los carros un instante después del choque con sus respectivas velocidades.
- **Etapas 3:** los carros finalmente detenidos después del choque. Los dos se detiene por acción de la fricción únicamente.

Como se ha mencionado anteriormente en varios ejemplos, como se saben datos del final del ejercicio y se debe hacer una reconstrucción de este se empieza de atrás hacia adelante, por consiguiente, se tiene:

**Etapas 2-3:** en esta etapa se detalla, Figura 89, el movimiento dado por los carros después del choque hasta detenerse, en este recorrido los carros pierden velocidad por acción de la fricción únicamente. Aplicando el principio de trabajo y energía para los dos carros en este recorrido se tiene:

**Figura 89. Movimiento de los carros después del choque**



Fuente: elaboración propia.

$$\frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 - \int_0^{d_A} Fr ds = \frac{1}{2} m_A v_{A3}^2$$

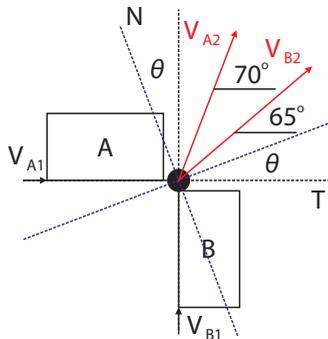
$$v_{A2} = 17.04 \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{2} m_B v_{B2}^2 - \int_0^{d_B} Fr ds = \frac{1}{2} m_B v_{B3}^2$$

$$v_{B2} = 18.28 \text{ m/s}$$

Seguidamente, durante las **etapas 1 y 2** se da el choque (un antes y un después Figura 90), asumiendo los ejes del choque (N-T) y expresando las velocidades de los carros en estos ejes se tiene:

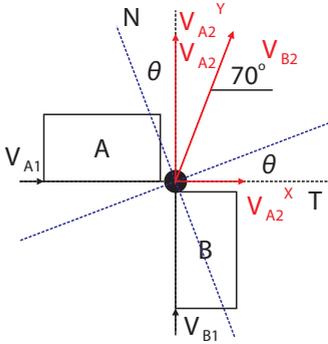
**Figura 90. Diagrama del choque**



Fuente: elaboración propia.

- Para el carro A

Figura 91. Diagrama de velocidades del carro A



Fuente: elaboración propia.

$$v_{A1}^N = v_{A1} \text{sen} \theta$$

$$v_{A1}^T = v_{A1} \text{cos} \theta$$

$$v_{A2}^X = v_{A2} \text{cos} 70$$

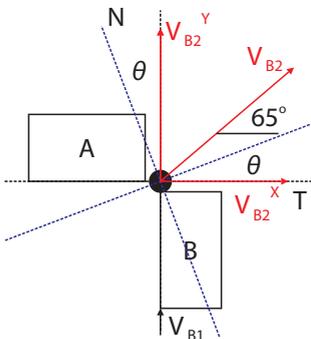
$$v_{A2}^Y = v_{A2} \text{sen} 70$$

$$v_{A2}^N = v_{A2}^Y \text{cos} \theta - v_{A2}^X \text{sen} \theta$$

$$v_{A2}^T = v_{A2}^Y \text{sen} \theta + v_{A2}^X \text{cos} \theta$$

- Para el carro B

Figura 92. Diagrama de velocidades del carro B



Fuente: elaboración propia.

$$v_{B1}^N = v_{B1} \text{cos} \theta$$

$$v_{B1}^T = v_{B1} \text{sen} \theta$$

$$v_{B2}^X = v_{B2} \text{cos} 65$$

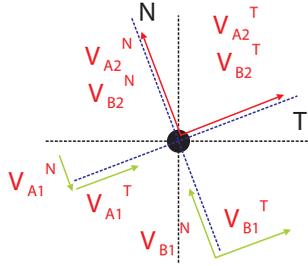
$$v_{B2}^Y = v_{B2} \text{sen} 65$$

$$v_{B2}^N = v_{B2}^Y \text{cos} \theta - v_{B2}^X \text{sen} \theta$$

$$v_{B2}^T = v_{B2}^Y \text{sen} \theta + v_{B2}^X \text{cos} \theta$$

De la dinámica del movimiento en choques se tiene que la velocidad de los carros en el eje tangencial se conserva (Sección 3.2.3), por consiguiente, del diagrama de la Figura 93 se tiene obtienen las ecuaciones 95 y 96:

**Figura 93. Diagrama de velocidades de los carros**



Fuente: elaboración propia.

$$v_{A1}^T = v_{A2}^T$$

$$v_{A1} \cos \theta = v_{A2}^Y \operatorname{sen} \theta + v_{A2}^X \cos \theta$$

$$v_{A1} \cos \theta = 16.0123 \operatorname{sen} \theta + 5.828 \cos \theta \quad (95)$$

$$v_{B1}^T = v_{B2}^T$$

$$v_{B1} \operatorname{sen} \theta = v_{B2}^Y \operatorname{sen} \theta + v_{B2}^X \cos \theta$$

$$v_{B1} \operatorname{sen} \theta = 16.567 \operatorname{sen} \theta + 7.725 \cos \theta \quad (96)$$

Para el choque, aplicando el principio de conservación de energía, Ecuación 75, y de la Figura 93 asumiendo positivo hacia arriba en el eje normal, se obtiene la siguiente ecuación:

$$-m_A v_{A1}^N + m_B v_{B1}^N = m_A v_{A2}^N + m_B v_{B2}^N$$

$$-1.2 v_{A1} \operatorname{sen} \theta + v_{B1} \cos \theta = 35.781 \cos \theta - 14.718 \operatorname{sen} \theta \quad (97)$$

De igual forma, aplicando la ecuación del coeficiente de restitución, Ecuación 76, para el choque se tiene:

$$e = \frac{\left[ v_{B/A} \right]_2^N}{-\left[ v_{B/A} \right]_1^N} = \frac{v_{B2}^N - v_{A2}^N}{-v_{A1}^N - v_{B1}^N}$$

$$e = \frac{0.5549 \cos \theta - 1.8974 \operatorname{sen} \theta}{-v_{A1} \operatorname{sen} \theta - v_{B1} \cos \theta} \quad (98)$$

Para la solución del sistema de ecuaciones 95 a 98 se tienen los siguientes datos:

- Incógnitas:  $v_{AP}$ ,  $v_{BP}$ ,  $e$  y  $\theta$
- Restricciones: el valor del coeficiente de restitución ( $e$ ) debe tener un valor comprendido entre 0 y 1; y el valor del ángulo ( $\theta$ ) oscila entre 0 y 45 grados.

De la solución en Matlab del sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes resultados:

$$v_{A1} = 12.2659 \frac{m}{s} = 44.15 \frac{km}{h}$$

$$v_{B1} = 35.7881 \frac{m}{s} = 128.83 \frac{km}{h}$$

$$e = 0.005$$

$$\theta = 21.9 \text{ (Ángulo de la línea de impacto)}$$

### Conclusiones

- El carro **B** lleva exceso de velocidad, hipótesis “tal vez aceleró para pasar un semáforo”.
- Por el coeficiente de restitución  $e$  se puede decir que el choque es casi plástico.

**Nota:** desarrollar la solución para el sistema de ecuaciones y contrastar las respuestas.

### Link del acompañamiento mediante video:

<https://www.youtube.com/watch?v=hdVd8kcuAZs&t=26s>

## CAPÍTULO 4

# CINEMÁTICA DE CUERPO RÍGIDO

### 4.1. Cinemática de cuerpo rígido

Para el desarrollo de este tipo de ejemplos es importante tener claros todos los conceptos abordados a lo largo de este libro, principalmente los siguientes:

- Velocidad constante y variable
- Velocidades y aceleraciones normal y tangencial
- Velocidades y aceleraciones relativas

Adicionalmente, como se indica en algunos ejemplos, se hace uso de la aceleración de Coriolis, la cual nos indica cómo acelera un cuerpo a través de otro que también está en movimiento.

$$a_{Coriolis} = 2\omega_{BC} \times v_{B/Sis} \quad (99)$$

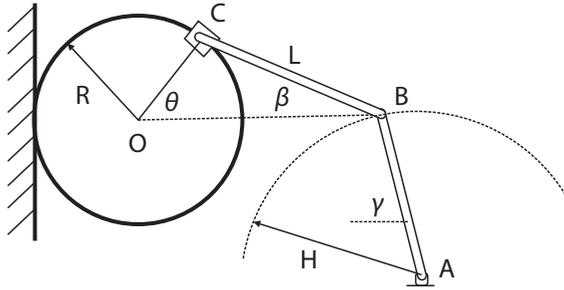
#### Link del acompañamiento mediante video:

<https://www.youtube.com/watch?v=9e32HgeHKA0>

A continuación, se desarrollarán varios ejemplos de aplicación:

**Ejemplo 4.1:** sabiendo que para el mecanismo de la Figura 94 se tiene que  $R = 600 \text{ mm}$ ,  $L = 0.9 \text{ m}$ ,  $H = 1 \text{ m}$ ,  $\theta = 37^\circ$ ,  $\beta = 25.07$ ,  $\gamma = 78.71$  y que la velocidad del punto C es  $v_c = 7 \text{ m/s}$  en el sentido horario, determine la velocidad del punto medio de la barra BC (ejercicio adaptado de Gray, 2014).

Figura 94. Mecanismo de biela – manivela



Fuente: adaptado de Gray, 2014

### Desarrollo conceptual

Como se conoce la velocidad del collarín C, esta se debe descomponer en sus componentes cartesianas  $i$  y  $j$ , adicionalmente el collarín C se mueve por una pista circular de donde se tiene que esta es perpendicular al radio, por consiguiente, se tiene:

$$v_C = 7\text{sen}\theta i - 7\text{cos}\theta j = 4.21i - 5.59 j$$

Para el cálculo de la velocidad del punto B se puede hacer desde el punto C o desde el punto A, ya que el punto B es dependiente o común a las dos barras, por consiguiente: aplicando la ecuación de Velocidades relativas, Ecuación 10, se tiene velocidad de B vista desde C:

$$v_B = v_C + v_{B/C} = v_C + \omega_{BC} \times r_{B/C}$$

Para facilitar los cálculos se asume que la velocidad angular de la barra BC está en la dirección  $k$ :

$$\begin{aligned} v_B &= 4.21i - 5.59 j + \omega_{BC} k \times (0.9 \cos 25.07 i - 0.9 \text{sen} 25.07 j) \\ v_B &= 4.21i - 5.59 j + 0.815 \omega_{BC} j + 0.381 \omega_{BC} i \\ v_B &= (4.21 + 0.381 \omega_{BC}) i - (5.59 - 0.815 \omega_{BC}) j \end{aligned} \quad (100)$$

Para el cálculo de la velocidad de B visto desde A se tiene:

$$v_B = v_A + v_{B/A} = 0 + \omega_{AB} \times r_{B/A}$$

Similarmente a lo realizado con la barra BC se asume la velocidad angular de la barra AB en dirección  $k$ :

$$\begin{aligned} v_B &= \omega_{AB} k \times (-1 \cos 78.71 i + 1 \text{sen} 78.71 j) \\ v_B &= -0.195 \omega_{AB} j - 0.98 \omega_{AB} i \end{aligned} \quad (101)$$

De las ecuaciones 100 y 101 igualando las componentes, se tiene:

$$4.21 + 0.381 \omega_{BC} = -0.98 \omega_{AB} \quad (102)$$

De la misma forma, igualando  $j = j$

$$5.59 - 0.815\omega_{BC} = 0.195\omega_{AB} \quad (103)$$

Solucionando las ecuaciones 102 y 103 se tiene:

$$\omega_{BC} = 8.695 \text{ rad / s}$$

$$\omega_{AB} = -7.676 \text{ rad / s}$$

Para el cálculo de la velocidad del punto medio (D) de la barra BC, se tiene: aplicando la ecuación de velocidades relativas, Ecuación 10, se tiene:

$$v_D = v_C + v_{D/C} = v_C + \omega_{BC} \times r_{D/C}$$

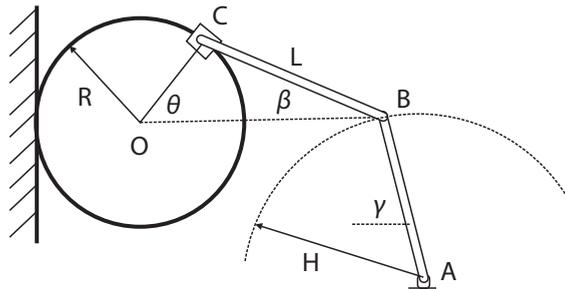
$$v_D = 4.21i - 5.59j + 8.695k \times (0.45 \cos 25.07i - 0.45 \text{sen} 25.07j)$$

$$v_D = 4.21i - 5.59j + 3.544j + 1.657i$$

$$v_D = 5.867i - 2.046j \text{ (m / s)}$$

**Ejemplo 4.2:** teniendo en cuenta los resultados del ejercicio anterior, determinar la aceleración del punto medio de la barra BC si se sabe que la velocidad del punto C es constante.

Figura 95. Mecanismo de biela – manivela



Fuente: adaptado de Gray, 2014

### Desarrollo conceptual

Como la velocidad del punto C es constante, la aceleración tangencial es igual a cero, únicamente tiene aceleración normal, aplicando la Ecuación 11 de aceleraciones relativas se tiene:

$$\omega_{OC} = \frac{v_C}{r_{OC}} = \frac{7}{0.6} = 11.666 \text{ rad / s}$$

$$a_C = a_O + a_{C/O}^N + a_{C/O}^T = 0 + a_{C/O}^N + 0 = a_{C/O}^N$$

$$a_C = -\omega_{OC}^2 \cdot r_{C/O}$$

$$a_C = -(11.666)^2 \cdot (0.6 \cos \theta i + 0.6 \text{sen} \theta j)$$

$$a_C = -65.21i - 49.142j \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Para el cálculo de la aceleración del punto B se puede hacer desde el punto C o desde el punto A, ya que el punto B es dependiente o común a las dos barras, por consiguiente: aplicando la ecuación de aceleraciones relativas, Ecuación 11, se tiene velocidad de B vista desde C:

$$a_B = a_C + a_{B/C}^T + a_{B/C}^N + a_{B/C}^T$$

$$a_B = a_C + \alpha_{BC} \times r_{B/C} - \omega_{BC}^2 \cdot r_{B/C}$$

Para facilitar los cálculos se asume la aceleración angular de la barra BC tiene la dirección dirección  $k$ :

$$a_B = -65.21i - 49.142j + \alpha_{BC} k \times (0.9 \cos 25.07i - 0.9 \sin 25.07j) - (8.695)^2 \cdot (0.9 \cos 25.07i - 0.9 \sin 25.07j)$$

$$a_B = -65.21i - 49.142j + 0.815\alpha_{BC} j + 0.381\alpha_{BC} i - 61.63i + 28.83j$$

$$a_B = (-126.84 + 0.381\alpha_{BC})i - (20.312 - 0.815\alpha_{BC})j \quad (104)$$

Para el cálculo de la aceleración de B vista desde A se tiene:

$$a_B = a_A + a_{B/A}^T + a_{B/A}^N = 0 + \alpha_{AB} \times r_{B/A} - \omega_{AB}^2 \cdot r_{B/A}$$

Similarmente a lo realizado con la barra BC se asume la aceleración angular de la barra AB en dirección  $k$ :

$$a_B = \alpha_{AB} k \times (-1 \cos 78.71i + 1 \sin 78.71j) - (-7.676)^2 \cdot (-1 \cos 78.71i + 1 \sin 78.71j)$$

$$a_B = (11.53 - 0.98\alpha_{AB})i - (57.78 + 0.195\alpha_{AB})j \quad (105)$$

De las ecuaciones 104 y 105, igualando las componentes  $i = i$ , se tiene:

$$-138.37 + 0.381\alpha_{BC} = -0.98\alpha_{AB} \quad (106)$$

De la misma forma, igualando  $j = j$

$$-37.468 - 0.815\alpha_{BC} = 0.195\alpha_{AB} \quad (107)$$

Solucionando las ecuaciones 106 y 107 se tiene:

$$\alpha_{BC} = -87.837 \text{ rad/s}^2$$

Para el cálculo de la velocidad del punto medio (D) de la barra BC, se tiene, aplicando la ecuación de aceleraciones relativas, Ecuación 11:

$$a_D = a_C + a_{D/C}^T + a_{D/C}^N$$

$$a_D = a_C + \alpha_{BC} \times r_{D/C} - \omega_{BC}^2 \cdot r_{D/C}$$

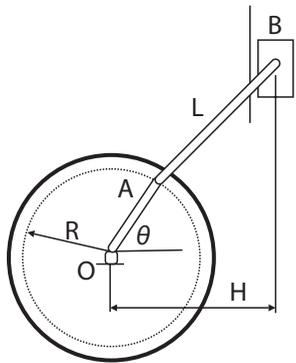
$$\begin{aligned}
 a_D &= -65.21i - 49.142j - 87.837k \times (0.45 \cos 25.07i - 0.45 \sin 25.07j) \\
 &\quad - (8.695)^2 \cdot (0.45 \cos 25.07i - 0.45 \sin 25.07j) \\
 a_D &= -65.21i - 49.142j - 35.8j - 16.748i - 30.816i + 14.415j \\
 a_D &= -112.774i - 70.527j \text{ (m/s}^2\text{)}
 \end{aligned}$$

### Link del acompañamiento mediante video:

<https://www.youtube.com/watch?v=SoWswY8J258>

**Ejemplo 4.3:** sabiendo que para el mecanismo de la Figura 96 se tiene que  $R = 20 \text{ mm}$ ,  $L = 80 \text{ mm}$ ,  $H = 38 \text{ mm}$ ,  $\theta = 20^\circ$  y que la velocidad del punto B es  $v_B = 15 \text{ m/s}$  hacia abajo, determine la velocidad del punto medio de la barra AB (ejercicio adaptado de Gray, 2014).

**Figura 96. Mecanismo de biela – manivela - corredera**

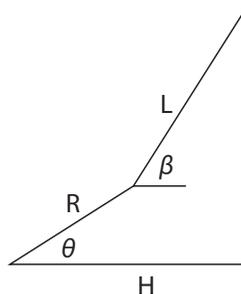


Fuente: adaptado de Gray, 2014

### Desarrollo conceptual

**Tips:** en algunos ejercicios es importante detallar gráficamente la posición de los puntos que componen su configuración, ya que esto puede cambiar la visión que se tiene inicialmente su movimiento, lo que nos puede llevar a cometer el error en su solución. A continuación, en la Figura 97 se verifican las posiciones de los puntos de referencia del mecanismo:

**Figura 97. Diagrama de verificación del mecanismo**



Fuente: elaboración propia.

Del análisis del diagrama de la Figura 97 se tiene:

$$H = R \cos \theta + L \cos \beta$$

$$38 = 20 \cos 20 + 80 \cos \beta$$

$$\beta = 76.108^\circ$$

Para el cálculo de la velocidad del punto A del mecanismo se puede hacer desde el punto B o desde el punto O, ya que el punto A es dependiente o común a las dos barras, por consiguiente: aplicando la ecuación de velocidades relativas, Ecuación 10, se tiene velocidad de A vista desde B:

$$v_A = v_B + v_{A/B} = v_B + \omega_{AB} \times r_{A/B}$$

Para facilitar los cálculos se asume la velocidad angular de la barra AB en dirección  $k$ :

$$v_A = -15 j + \omega_{AB} k \times (-0.08 \cos 76.108 i - 0.08 \sin 76.108 j)$$

$$v_A = -15 j - 0.019 \omega_{AB} j + 0.077 \omega_{AB} i$$

$$v_A = 0.077 \omega_{AB} i - (15 + 0.019 \omega_{AB}) j \quad (108)$$

Para el cálculo de la velocidad de A vista desde O se tiene:

$$v_A = v_O + v_{A/O} = 0 + \omega_{OA} \times r_{A/O}$$

Similarmente a lo realizado con la barra AB, se asume la velocidad angular del disco OA en dirección  $k$ :

$$v_A = \omega_{OA} k \times (0.02 \cos 20 i + 0.02 \sin 20 j)$$

$$v_A = 0.018 \omega_{OA} j - 0.006 \omega_{OA} i \quad (109)$$

De las ecuaciones 108 y 109, igualando las componentes, se tiene:

$$0.077 \omega_{AB} = -0.006 \omega_{OA} \quad (110)$$

Similarmente  $j = j$ :

$$-15 - 0.019 \omega_{AB} = 0.018 \omega_{OA} \quad (111)$$

Solucionando las ecuaciones 110 y 111 se tiene:

$$\omega_{AB} = 70.754 \text{ rad} / \text{s}$$

$$\omega_{OA} = -16.344 \text{ rad} / \text{s}$$

Para el cálculo de la velocidad del punto medio (D) de la barra AB, se tiene, aplicando velocidades relativas Ecuación 10:

$$v_D = v_B + v_{D/B} = v_B + \omega_{AB} \times r_{D/B}$$

$$v_D = -15 j + 70.754 k \times (-0.04 \cos 76.108 i - 0.04 \text{sen} 76.108 j)$$

$$v_D = -15 j - 0.679 j + 2.747 i$$

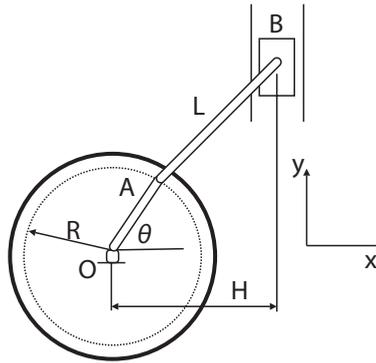
$$v_D = 2.747 i - 15.679 j \text{ (m/s)}$$

#### Link del acompañamiento mediante video:

[https://www.youtube.com/watch?v=or\\_4LmZjMoo](https://www.youtube.com/watch?v=or_4LmZjMoo)

**Ejemplo 4.4:** teniendo en cuenta los resultados del ejercicio anterior, determinar la aceleración del punto medio de la barra AB si se sabe que la velocidad del punto B es constante.

**Figura 98. Mecanismo de biela – manivela - corredera**



Fuente: elaboración propia.

#### Desarrollo conceptual

Para el cálculo de la aceleración del punto A del mecanismo, se puede hacer desde el punto B o desde el punto O, ya que el punto A es dependiente o común a las dos barras, por consiguiente: aplicando la ecuación de aceleraciones relativas, Ecuación 11, se tiene la velocidad de A vista desde B:

$$a_A = a_B + a_{A/B}^T + a_{A/B}^N = 0 + \alpha_{AB} \times r_{A/B} - \omega_{AB}^2 \cdot r_{A/B}$$

Para facilitar los cálculos se asume la aceleración angular de la barra AB en dirección k:

$$\begin{aligned}
 a_A &= \alpha_{AB} k \times (-0.08 \cos 76.108 i - 0.08 \sin 76.108 j) \\
 &\quad - (70.754)^2 \cdot (-0.08 \cos 76.108 i - 0.08 \sin 76.108 j) \\
 a_A &= -0.019 \alpha_{AB} j + 0.077 \alpha_{AB} i + 96.154 i + 388.775 j
 \end{aligned}$$

$$a_A = (96.154 + 0.077 \alpha_{AB}) i + (388.775 - 0.019 \alpha_{AB}) j \quad (112)$$

Para el cálculo de la aceleración de A vista desde O se tiene:

$$a_A = a_O + a_{A/O}^T + a_{A/O}^N = 0 + \alpha_{OA} \times r_{A/O} - \omega_{OA}^2 \cdot r_{A/O}$$

Similarmente a lo realizado con la barra AB, se asume la aceleración angular del disco OA en dirección k:

$$\begin{aligned}
 a_A &= \alpha_{OA} k \times (0.02 \cos 20 i + 0.02 \sin 20 j) \\
 &\quad - (-16.344)^2 \cdot (0.02 \cos 20 i + 0.02 \sin 20 j) \\
 a_A &= (-5.02 - 0.006 \alpha_{OA}) i + (-1.8 + 0.018 \alpha_{OA}) j
 \end{aligned} \quad (113)$$

De las ecuaciones 112 y 113, igualando las componentes  $i = i$ , se tiene:

$$96.154 + 0.077 \alpha_{AB} = -5.02 - 0.006 \alpha_{OA}$$

$$102.174 + 0.077 \alpha_{AB} = -0.006 \alpha_{OA} \quad (114)$$

Similarmente  $j = j$

$$388.775 - 0.019 \alpha_{AB} = -1.8 + 0.018 \alpha_{OA}$$

$$390.575 - 0.019 \alpha_{AB} = 0.018 \omega_{OA} \quad (115)$$

Solucionando las ecuaciones 114 y 115 se tiene:

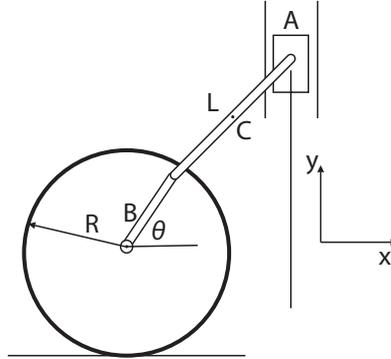
$$\alpha_{AB} = -3288.1933 \text{ rad} / s^2$$

Para el cálculo de la aceleración del punto medio (D) de la barra AB, aplicando aceleraciones relativas se tiene:

$$\begin{aligned}
 a_D &= a_B + a_{D/B}^T + a_{D/B}^N = a_B + \alpha_{AB} \times r_{D/B} - \omega_{AB}^2 \cdot r_{D/B} \\
 a_D &= -3288.1933 k \times (-0.04 \cos 76.108 i - 0.04 \sin 76.108 j) \\
 &\quad - (70.754)^2 \cdot (-0.04 \cos 76.108 i - 0.04 \sin 76.108 j) \\
 a_D &= 31.578 j - 127.68 i + 48.077 i + 194.387 j \\
 a_D &= -79.603 i + 225.965 j \left( m / s^2 \right)
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.5:** para el mecanismo de la Figura 99 se sabe que la velocidad del punto B es  $v_B = 2\text{ m/s}$  ( $i$ ) para un ángulo  $\theta = 62^\circ$ , determine la velocidad del punto medio de la barra.  $R = 350\text{mm}$ ,  $L = 1\text{m}$ .

**Figura 99. Mecanismo de biela – manivela - corredera**



Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo conceptual

Mediante la ecuación de velocidades relativas, Ecuación 10, se determina la velocidad de A vista desde el punto B:

$$v_A = v_B + v_{A/B} = 2i + \omega_{AB} \times r_{A/B}$$

Asumiendo que la velocidad del punto A tiene la dirección en el eje y y que la velocidad angular de la barra AB está en sentido contrario a las manecillas del reloj (mcr), se tiene:

$$\begin{aligned} v_A j &= 2i + \omega_{AB} k \times (1 \cos 62i + 1 \text{sen} 62 j) \\ v_A j &= 2i + 0.46 \omega_{AB} j - 0.882 \omega_{AB} i \end{aligned} \tag{116}$$

De la Ecuación 116 resolviendo, igualando  $i = i$ ,  $y j = j$ , se tiene que:

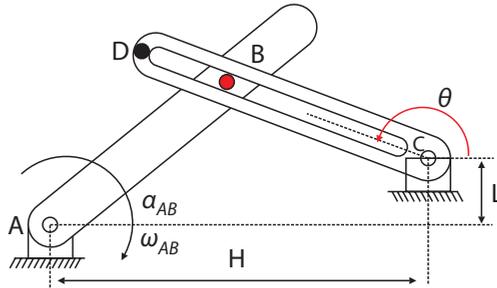
$$\begin{aligned} \omega_{AB} &= 2.267 \text{ rad/s (mcr)} \\ v_A &= 1.043 \text{ m/s (j)} \end{aligned}$$

Para el cálculo de la velocidad del punto medio (C) de la barra AB se tiene:

$$\begin{aligned} v_C &= v_B + v_{C/B} = 2i + \omega_{AB} \times r_{C/B} \\ v_c &= 2i + 2.267 k \times (0.5 \cos 62i + 0.5 \text{sen} 62 j) \\ v_C &= 2i + 0.532 j - 1i \\ v_C &= 1i + 0.532 j \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.6:** para el mecanismo de la Figura 100 se tiene que  $\omega_{AB} = 7\text{rad/s}$ ,  $\alpha_{AB} = 1\text{rad/s}^2$ , ambas en sentido de las manecillas del reloj,  $\theta = 160^\circ$   $L = 2.5\text{ ft}$ ,  $H = 10\text{ pies}$ ,  $C B = 5\text{ ft}$ . Determinar la aceleración del punto fijo D si la distancia CD es de  $7.5\text{ ft}$

**Figura 100. Mecanismo corredera**



Fuente: elaboración propia.

**Desarrollo**

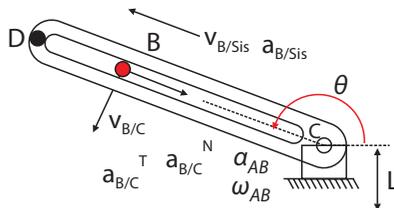
Como el punto B es común a las barras AB y CD, la velocidad y la aceleración de este punto se puede calcular con relación a cada una de ellas, aplicando velocidad y aceleración relativa, ecuaciones 10 y 11, para el punto B visto desde A se tiene:

$$\begin{aligned}
 v_B &= v_A + v_{B/A} = \omega_{BA} \times r_{B/A} \\
 v_B &= -\omega_{BA} k \times ((H - 5 \cos 20)i + (L + 5 \sin 20)j) \\
 v_B &= -7k \times (5.301i + 4.21j) \\
 v_B &= 29.47i - 37.107j \tag{117}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_B &= a_A + a_{B/A}^T + a_{B/A}^N = \alpha_{AB} \times r_{B/A} - \omega_{AB}^2 \cdot r_{B/A} \\
 a_B &= -1k \times (5.301i + 4.21j) - (-7)^2 \cdot (5.301i + 4.21j) \\
 a_B &= -5.301j + 4.21i - 259.749i - 206.29j \\
 a_B &= -255.539i - 211.591j \tag{118}
 \end{aligned}$$

Similarmente, aplicando velocidad y aceleración relativa para el punto B visto desde C. Adicionalmente, para la velocidad y la aceleración se debe tener en cuenta que como el punto B no pertenece a la barra CD, este tiene velocidad y aceleración relativa con respecto a la barra Figura 101 y aceleración de coriolis, Ecuación 99, aplicando esta teoría se tiene:

**Figura 101. Diagrama de velocidades y aceleraciones**



Fuente: elaboración propia.

$$\begin{aligned}
 v_B &= v_C + v_{B/C} + v_{B/Sis} = \omega_{BC} \times r_{B/C} + v_{B/Sis} \\
 v_B &= \omega_{BC} k \times (-5 \cos 20 i + 5 \sin 20 j) + v_{B/Sis} (-\cos 20 i + \sin 20 j) \\
 v_B &= -1.71 \omega_{BC} i - 4.69 \omega_{BC} j - 0.93 v_{B/Sis} i + 0.34 v_{B/Sis} j \quad (119)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_B &= a_C + a_{B/C}^T + a_{B/C}^N + a_{B/Sis} + a_{Coriolis} \\
 a_B &= \alpha_{BC} \times r_{B/C} - \omega_{BC}^2 \cdot r_{B/C} + a_{B/Sis} (-\cos 20 i + \sin 20 j) + 2 \omega_{BC} \times v_{B/Sis} \\
 a_B &= \alpha_{BC} k \times (-5 \cos 20 i + 5 \sin 20 j) - \omega_{BC}^2 \cdot (-5 \cos 20 i + 5 \sin 20 j) \\
 &\quad - 0.93 a_{B/Sis} i + 0.34 a_{B/Sis} j + 2 \cdot \omega_{BC} k \times v_{B/Sis} \\
 a_B &= -1.71 \alpha_{BC} i - 4.69 \alpha_{BC} j + 4.69 \omega_{BC}^2 i - 1.71 \omega_{BC}^2 j \\
 &\quad - 0.93 a_{B/Sis} i + 0.34 a_{B/Sis} j + 2 \cdot \omega_{BC} k \times v_{B/Sis} \quad (120)
 \end{aligned}$$

De las ecuaciones 117 y 119, igualando  $i = i$ ,  $y j = j$ , se tiene que:

$$29.47 = -1.71 \omega_{BC} - 0.93 v_{B/Sis} \quad (121)$$

$$-37.107 = -4.69 \omega_{BC} + 0.34 v_{B/Sis} \quad (122)$$

Solucionando las ecuaciones 121 y 122 se tiene:

$$\begin{aligned}
 v_{B/Sis} &= -40.788 \text{ ft} / \text{s} \\
 \omega_{BC} &= 4.955 \text{ rad} / \text{s}
 \end{aligned}$$

Reemplazando en la Ecuación 120, se tiene:

$$\begin{aligned}
 a_B &= -1.71 \alpha_{BC} i - 4.69 \alpha_{BC} j - 0.93 a_{B/Sis} i \\
 &\quad + 0.34 a_{B/Sis} j + 253.395 i + 337.849 j \quad (123)
 \end{aligned}$$

De las ecuaciones 118 y 123, igualando  $i = i$ ,  $y j = j$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
 -255.539 &= -1.71 \alpha_{BC} - 0.93 a_{B/Sis} + 253.395 \\
 -508.934 &= -1.71 \alpha_{BC} - 0.93 a_{B/Sis} \quad (124)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -211.591 &= -4.69 \alpha_{BC} + 0.34 a_{B/Sis} + 337.849 \\
 -549.44 &= -4.69 \alpha_{BC} + 0.34 a_{B/Sis} \quad (125)
 \end{aligned}$$

Solucionando las ecuaciones 124 y 125 se tiene:

$$a_{B/Sis} = 292.871 \text{ ft} / \text{s}^2$$

$$\alpha_{BC} = 138.383 \text{ rad} / \text{s}^2$$

Para la aceleración del punto D se tiene:

$$a_D = a_C + a_{D/C}^T + a_{D/C}^N$$

$$a_D = \alpha_{BC} \times r_{D/C} - \omega_{BC}^2 \cdot r_{D/C}$$

$$a_B = 138.383 \text{ k} \times (-7.5 \cos 20i + 7.5 \text{ sen} 20 j)$$

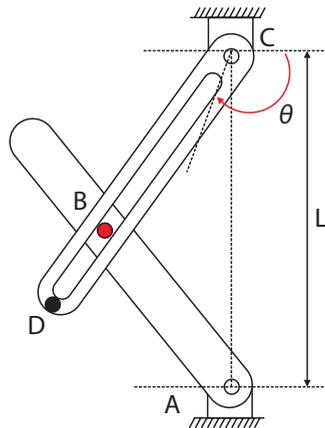
$$-(4.955)^2 \cdot (-7.5 \cos 20i + 7.5 \text{ sen} 20 j)$$

$$a_B = -975.281 j - 354.973 i + 173.035 i - 62.979 j$$

$$a_B = -181.938 i - 1038.26 j (\text{ft} / \text{s}^2)$$

**Ejemplo 4.7:** para el mecanismo de la Figura 102 se tiene que  $\omega_{BC} = 7 \text{ rad/s}$ ,  $\alpha_{BC} = 1 \text{ rad/s}^2$ , ambas en sentido contrario a las manecillas del reloj,  $\theta = 134^\circ$ ,  $L = 2 \text{ ft}$ ,  $CB = 1 \text{ ft}$  y  $BD = 0,5 \text{ ft}$ . Determine la aceleración angular de la barra AB y del punto D para el momento indicado.

**Figura 102. Mecanismo corredera**

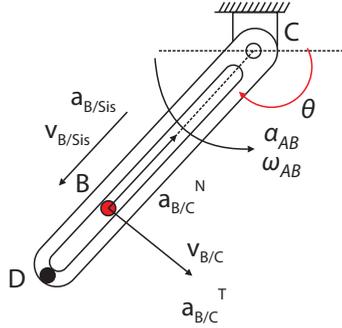


Fuente: elaboración propia.

### Desarrollo

Como el punto B es común a las barras AB y CD, la velocidad y la aceleración de este punto se puede calcular con relación a cada una de ellas, aplicando velocidad y aceleración relativa, ecuaciones 10 y 11. Adicionalmente, para la velocidad y la aceleración se debe tener en cuenta que como el punto B no pertenece a la barra CD, tiene velocidad y aceleración relativa con respecto a la barra CD y aceleración de coriolis, Ecuación 99, aplicando esta teoría se tiene:

Figura 103. Diagrama de velocidades y aceleraciones



Fuente: elaboración propia.

$$v_B = v_C + v_{B/C} + v_{B/Sis} = \omega_{BC} \times r_{B/C} + v_{B/Sis}$$

$$v_B = 7k \times (-1 \text{sen} 44 i - 1 \text{cos} 44 j) + v_{B/Sis} (-\text{sen} 44 i - \text{cos} 44 j)$$

$$v_B = 5.035 i - 4.862 j - 0.694 v_{B/Sis} i - 0.719 v_{B/Sis} j \quad (126)$$

$$a_B = a_C + a_{B/C}^T + a_{B/C}^N + a_{B/Sis} + a_{Coriolis}$$

$$a_B = \alpha_{BC} \times r_{B/C} - \omega_{BC}^2 \cdot r_{B/C} + a_{B/Sis} (-e i - \text{cos} 44 j) + 2 \omega_{BC} \times v_{B/Sis}$$

$$a_B = 1k \times (-1 \text{sen} 44 i - 1 \text{cos} 44 j) - (7)^2 \cdot (-1 \text{sen} 44 i - 1 \text{cos} 44 j)$$

$$-0.694 a_{B/Sis} i - 0.719 a_{B/Sis} j + 2 \cdot 7k \times v_{B/Sis}$$

$$a_B = -0.694 j + 0.71 i + 34.038 i + 35.247 j$$

$$-0.694 a_{B/Sis} i - 0.719 a_{B/Sis} j + 2 \cdot 7k \times v_{B/Sis}$$

$$a_B = 34.748 i + 34.553 j - 0.694 a_{B/Sis} i - 0.719 a_{B/Sis} j + 2 \cdot 7k \times v_{B/Sis} \quad (127)$$

De forma similar para el punto B visto desde A se tiene:

$$v_B = v_A + v_{B/A} = \omega_{BA} \times r_{B/A}$$

$$v_B = -\omega_{BA} k \times (-1 \text{sen} 44 i + (2 - 1 \text{cos} 44) j)$$

$$v_B = 1.28 \omega_{BA} i + 0.694 \omega_{BA} j \quad (128)$$

$$a_B = a_A + a_{B/A}^T + a_{B/A}^N = \alpha_{AB} \times r_{B/A} - \omega_{AB}^2 \cdot r_{B/A}$$

$$a_B = -\alpha_{AB} k \times (-1 \text{sen} 44 i + (2 - 1 \text{cos} 44) j) - (\omega_{AB})^2 \cdot (-1 \text{sen} 44 i + (2 - 1 \text{cos} 44) j)$$

$$a_B = 0.694\alpha_{AB} j + 1.28\alpha_{AB} i + 0.694\omega_{AB}^2 i - 1.28\omega_{AB}^2 j \quad (129)$$

De las ecuaciones 126 y 128, igualando  $i = i$ ,  $y j = j$ , se tiene que:

$$5.035 - 0.694v_{B/Sis} = 1.28\omega_{BA} \quad (130)$$

$$-4.862 - 0.719v_{B/Sis} = 0.694\omega_{BA} \quad (131)$$

Solucionando las ecuaciones 130 y 131 se tiene:

$$v_{B/Sis} = -22.131 \text{ ft / seg}$$

$$\omega_{BA} = 15.922 \text{ rad / seg}$$

Reemplazando en las ecuaciones 127 y 129 e igualando  $i = i$ ,  $y j = j$ , se tiene que:

$$-8.232 - 0.694a_{B/Sis} = 1.28\alpha_{AB} + 175.93$$

$$-184.162 - 0.694a_{B/Sis} = 1.28\alpha_{AB} \quad (132)$$

$$76.053 - 0.719a_{B/Sis} = 0.694\alpha_{AB} - 324.492$$

$$400.545 - 0.719a_{B/Sis} = 0.694\alpha_{AB} \quad (133)$$

Solucionando las ecuaciones 132 y 133 se tiene:

$$a_{B/Sis} = 1458.877 \text{ ft / s}^2$$

$$\alpha_{BA} = -935.054 \text{ rad / s}^2$$

Para la aceleración del punto D se tiene:

$$a_D = a_C + a_{D/C}^T + a_{D/C}^N$$

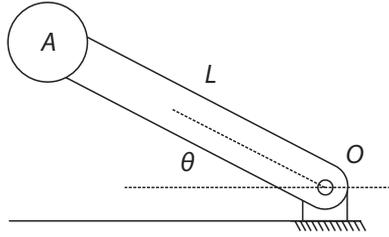
$$a_D = \alpha_{BC} \times r_{D/C} - \omega_{BC}^2 \cdot r_{D/C}$$

$$a_B = 1k \times (-1.5\text{sen}44i - 1.5\text{cos}44j) - (7)^2 \cdot (-1.5\text{sen}44i - 1.5\text{cos}44j)$$

$$a_B = -1.041j + 1.079i + 51.057i + 52.871j$$

$$a_B = 52.136i + 51.83j \text{ (ft / s}^2\text{)}$$

**Ejemplo 4.8:** la esfera A de la Figura 104 está sujeta a la barra de longitud L, la cual se deja caer desde el reposo en la posición mostrada, si se sabe que el coeficiente de restitución es e. Determine la velocidad angular de la barra después del choque.

**Figura 104. Barra con esfera - choque**

Fuente: elaboración propia.

**Desarrollo**

Aplicando el principio de trabajo y energía para determinar la velocidad de la esfera antes de chocar con el piso se tiene:

$$v_{A1} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gL\text{sen}\theta}$$

Aplicando la ecuación del coeficiente de restitución para el choque de la esfera con el piso, Ecuación 76, la velocidad de la esfera después del choque es:

$$v_{A2} = e v_{A1} = e \sqrt{2gL\text{sen}\theta} \quad (j)$$

Aplicando la ecuación de velocidades relativas, Ecuación 10, para la barra, se tiene que:

$$v_{A2} = v_O + v_{A2/O} = 0 + \omega_{OA} r_{OA}$$

$$\omega_{OA} = \frac{v_{A2}}{r_{OA}} = \frac{e \sqrt{2gL\text{sen}\theta}}{L} \quad (-k)$$



# REFERENCIAS

- Beer, F. P., Jhonston E. R., Cornwell, P. (2010). *Mecánica Vectorial para Ingenieros*. Mc Graw Hill.
- Gray, G. L. (2014). *Mecánica para Ingeniería*. Dinámica. Mc Graw Hill.
- Gonzalo Moreno. Canal de YouTube – Dinámica. [https://www.youtube.com/channel/UC3FR2Nt8vszr536\\_rDBxJlQ/featured](https://www.youtube.com/channel/UC3FR2Nt8vszr536_rDBxJlQ/featured)
- Hibbeler, R. C. (2015). *Ingeniería Mecánica*, Dinámica. Prentice Hall.
- Meriam, J. L., Kraige, L. G. (2001). *Engineering Mechanics*. Dynamics. Wiley.
- Navarro, E. A., & Arguedas-Matarrita, C. (2020). El trabajo experimental en la enseñanza de la física en tiempos de pandemia mediante el uso de la aplicación II Ley de Newton en la UNED de Costa Rica. *Innovaciones Educativas*, 22(Especial), 103-114.
- Sandu, C. (2012). Engineering Dynamics: A Comprehensive Introduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 35(1), 350-351.
- Soutas, R. (2008). *Ingeniería mecánica para ingenieros: dinámica. Edición computacional*. Cengage Learning Editores

# DINÁMICA

## TIPS PARA INGENIEROS

Por medio de esta obra se busca que el lector comprenda y aplique técnicas estructuradas para el desarrollo y solución de problemas que incluyen el movimiento de los cuerpos y de mecanismos, teniendo en cuenta las fuerzas que lo provocan o restringen. Adicionalmente, se dan *tips* que ayudan a entender mejor los ejercicios y buscar la solución de estos.

Se estructura de la siguiente forma: en el primer capítulo se describen el movimiento de la partícula y las ecuaciones que gobiernan este movimiento; seguidamente, en los capítulos 2, 3 y 4 se da una explicación de la ecuación de la Segunda Ley de Newton y sus derivadas, lo cual permite desarrollar ejercicios desde diferentes perspectivas; en el capítulo 4 se explica la mecánica de los choques y se presentan varios ejemplos al respecto. Finalmente, en el capítulo 5 se da inicio al entendimiento y desarrollo del movimiento de mecanismos, tema de importancia muy relevante en asignaturas siguientes.

Dirigida a estudiantes de la asignatura de Dinámica del programa de Ingeniería Mecánica y en general a los estudiantes de física mecánica e ingenieros que deseen comprender mejor la mecánica del movimiento de los objetos, de las ecuaciones que gobiernan este movimiento y de las fuerzas que actúan en pro o en contra de este.

## Incluye

- ▶ Ejemplos reales para el entendimiento de la mecánica del movimiento.
- ▶ Esquemas a partir de los cuales se da una mejor explicación del movimiento y de cómo este va variando con el tiempo o el espacio.
- ▶ Explicación detallada del desarrollo de los ejercicios y las ecuaciones que se deben aplicar en cada etapa del movimiento.
- ▶ *Tips* que permiten hacer un desarrollo más adecuado de los ejercicios.

### Gonzalo Guillermo Moreno Contreras

Doctor de la Universidad Federal de Santa Catarina en Brasil, máster en Ingeniería Mecánica de la Universidad de los Andes e Ingeniero Mecánico de la Universidad Francisco de Paula Santander. Docente del programa de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Pamplona y de la Maestría en Ingeniería de la Universidad Santo Tomás – sede Tunja. Ha publicado artículos en revistas de alto impacto. Coautor del libro sobre la caja de cambios Caixa de mudanças.

### Juan Carlos Serrano Rico

Doctor en Ingeniería Mecánica de la Universidad de Sao Paulo (Brasil), máster en Ingeniería Mecánica de la Universidad de los Andes e Ingeniero Mecánico de la Universidad Francisco de Paula Santander. Profesor titular del programa de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Pamplona.

### Edwin Espinel

Doctor en Ingeniería, máster en Ingeniería, especialista en Gestión de Mantenimiento Industrial e Ingeniero Mecánico. Docente e investigador asociado adscrito al Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Francisco de Paula Santander, seccional Ocaña. Posee más de 16 años de experiencia académica en asignaturas como Estática, Dinámica, Termodinámica y Mantenimiento Industrial. Autor de diversos libros y artículos científicos.



**Universidad Francisco de Paula Santander**  
Ocaña - Colombia  
Vigilada Mineducación



ISBN 978-958-503-627-7



e-ISBN 978-958-503-628-4