

# MECÁNICA

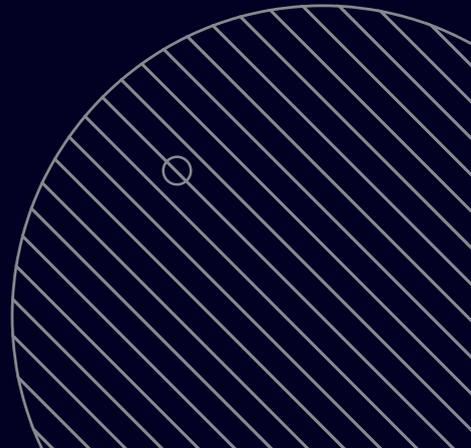
## PROBLEMAS RESUELTOS

**Cinemática y cinética de la partícula**  
**Principios y leyes del movimiento de la partícula**

**Gustavo Guerrero Gómez**  
**Nelson Afanador García**  
**Faustino Moreno Gamboa**



**Universidad Francisco  
de Paula Santander**  
Vigilada Mineducación







# **MECÁNICA PROBLEMAS RESUELTOS**

GUSTAVO GUERRERO GÓMEZ  
NELSON AFANADOR GARCÍA  
FAUSTINO MORENO GAMBOA

Guerrero Gómez, Gustavo

Mecánica, problemas resueltos : cinemática y cinética de la partícula Principios y leyes del movimiento de la partícula / Gustavo Guerrero Gómez, Nelson Afanador García, Faustino Moreno Gamboa. -- 1a ed. -- San José de Cúcuta : Universidad Francisco de Paula Santander, 2022. 101 p. -- (Ingeniería civil. Ciencias físicas, mecánica)

Contiene datos curriculares de los autores. -- Contiene glosario. -- Contiene bibliografía.

ISBN 978-958-503-338-2 -- 978-958-503-339-9 (e-book)

1. Partículas - Problemas, ejercicios, etc. 2. Cinemática - Problemas, ejercicios, etc. 3. Movimiento - Problemas, ejercicios, etc. 4. Mecánica - Problemas, ejercicios, etc. I. Afanador García, Nelson II. Moreno Gamboa, Faustino III. Título IV. Serie

CDD: 531.16 ed. 23

CO-BoBN- a1090552

---



**Área:** Ingeniería civil

**Subárea:** Ciencias físicas, mecánica



**Universidad Francisco  
de Paula Santander**

Vigilada Mineducación

© Gustavo Guerrero Gómez  
© Nelson Afanador García  
© Faustino Moreno Gamboa

© Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Avenida Gran Colombia  
No. 12E-96, Barrio Colsag  
San José de Cúcuta - Colombia  
Teléfono: 607 577 6655

► Ecoe Ediciones S.A.S.  
info@ecoeediciones.com  
www.ecoeediciones.com  
Carrera 19 # 63C 32, Tel.: 919 80 02  
Bogotá, Colombia

**Primera edición:** Bogotá, abril del 2022

**ISBN:** 978-958-503-338-2  
**e-ISBN:** 9978-958-503-339-9

Directora editorial: Claudia Garay Castro  
Coordinadora editorial: Paula Bermúdez B.  
Corrección de estilo: Andrés Caro  
Diagramación: Sindy Nicol Pulido Casallas  
Carátula: Wilson Marulanda  
Impresión: Carvajal Soluciones de  
Comunicación S.A.S.  
Carrera 69 #15-24

*Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio  
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.*

*Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados*

# AGRADECIMIENTOS

*A mi madre María Elena Gómez de Guerrero y a mi padre Gustavo Guerrero Farelo.*

*A mis hermanos Iván Guerrero Gómez y Mario Guerrero Gómez.*

*A la Universidad Francisco de Paula Santander, Seccional Ocaña.*

*A Dios.*

Gustavo Guerrero Gómez

*A la Universidad Francisco de Paula Santander Seccional Ocaña por su constante apoyo.*

Nelson Afanador García

*A la Universidad Francisco de Paula Santander.*

Faustino Moreno Gamboa



# CONTENIDO

<b>PRÓLOGO</b> .....	XI
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	XIII
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	XV
<b>CAPÍTULO 1. CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA</b> .....	1
1.1. Movimiento de una partícula: componentes rectangulares.....	1
1.1.1. Problema caso 1 .....	6
1.1.2. Problema caso 2 .....	16
<b>CAPÍTULO 2. CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA FUERZA Y ACELERACIÓN</b> .....	23
2.1. Ecuación del movimiento coordenadas rectangulares .....	23
2.1.1. Problema caso 3. ....	25
2.1.2. Problema caso 4 .....	28
2.2. Ecuación del movimiento coordenadas tangenciales y normales.....	30
2.2.1. Problema caso 5 .....	31
2.3. Ecuación del movimiento coordenadas esféricas.....	44
2.3.1. Problema caso 6 .....	45
2.4. Movimiento relativo de partículas por medio de ejes de traslación...	50
2.4.1. Problema caso 7 .....	50

<b>CAPÍTULO 3. CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA: TRABAJO Y ENERGÍA.....</b>	<b>61</b>
3.1. Fuerzas conservativas.....	61
3.1.1. Problema caso 8.....	62
3.1.2. Problema caso 9.....	71
3.2. Potencia y eficiencia.....	76
3.2.1. Problema caso 10.....	77
<b>CAPÍTULO 4. CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA: IMPULSO Y MOMENTO .....</b>	<b>83</b>
4.1. Conservación del momento lineal de un sistema de partículas.....	84
4.1.1. Problema caso 11.....	84
4.2. Impacto.....	90
4.2.1. Problema caso 12.....	91
<b>EPÍLOGO.....</b>	<b>97</b>
<b>GLOSARIO.....</b>	<b>99</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>101</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Componentes de la velocidad inicial de la partícula.....	2
Figura 2. Trayectoria de la partícula.....	7
Figura 3. Componentes de la velocidad inicial de la partícula.....	9
Figura 4. Componentes de la velocidad de la partícula un momento antes de la colisión .....	12
Figura 5. Componentes de la aceleración de la partícula un momento antes de la colisión .....	13
Figura 6. Esquema general .....	16
Figura 7. Componentes de la velocidad inicial de la partícula.....	17
Figura 8. Alcance logrado por la partícula.....	20
Figura 9. Segunda ley en coordenadas rectangulares .....	24
Figura 10. Trayectoria de la partícula.....	25
Figura 11. Segunda ley de Newton aplicada a la corredera.....	25
Figura 12. Esquema general .....	28
Figura 13. Segunda ley de Newton aplicada al tráiler.....	29
Figura 14. Esquema general .....	31
Figura 15. Trayectoria de la partícula.....	31
Figura 16. Segunda ley de Newton aplicada a la partícula.....	32

Figura 17. Distancia recorrida por la partícula.....	42
Figura 18. Segunda ley de Newton aplicada a la partícula.....	42
Figura 19. Ubicación partícula en coordenadas radial transversal.....	44
Figura 20. Esquema general.....	45
Figura 21. Segunda ley de Newton aplicada a la esfera.....	49
Figura 22. Perspectiva del sistema.....	50
Figura 23. Trayectoria de los bloques.....	51
Figura 24. Segunda ley de Newton aplicada al bloque A.....	51
Figura 25. Segunda ley de Newton aplicada al bloque B.....	52
Figura 26. Segunda ley de Newton aplicada al bloque C.....	54
Figura 27. Trayectoria de la partícula.....	63
Figura 28. Segunda ley de Newton aplicada a la partícula.....	63
Figura 29. Ubicación nivel de referencia.....	67
Figura 30. Esquema general.....	72
Figura 31. Trayectoria de la partícula.....	72
Figura 32. Ubicación nivel de referencia.....	73
Figura 33. Segunda ley de Newton aplicada a la partícula.....	75
Figura 34. Segunda ley de Newton aplicada al conjunto locomotora y vagones.....	77
Figura 35. Trayectoria de la partícula.....	84
Figura 36. Variación de la fuerza en la corredera.....	85
Figura 37. Principio de impulso y cantidad de movimiento a la corredera.....	85
Figura 38. Trayectoria de la corredera.....	89
Figura 39. Esquema general.....	91
Figura 40. Cantidad de movimiento de las esferas antes de la colisión.....	91
Figura 41. Cantidad de movimiento de las esferas después de la colisión..	92



# PRÓLOGO



Este texto está dirigido a los estudiantes de carreras técnicas y de ingeniería en asignaturas como física mecánica y dinámica, siendo desarrollado y organizado con fines didácticos para facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje de los estudiantes. Proporciona los fundamentos de la física y sus aplicaciones para buscar una mejor comprensión de la temática, pudiendo aplicarlo en asignaturas posteriores de otras áreas de formación e, incluso, en su vida profesional.

El texto presenta una serie de componentes y, en cada capítulo, se hace una descripción del fundamento teórico de los principios de la dinámica, presentando una serie de problemas resueltos prácticos de la ingeniería, en los que se hacen énfasis en la representación de los movimientos en texto o gráficas para desarrollar en el estudiante capacidades de abstracción, representación y comprensión de los principios físicos y matemáticos en vez de la memorización de fórmulas y la sustitución de datos.

En el desarrollo del trabajo se adoptan temas de asignaturas anteriores como cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y, en la solución de los problemas, se aplicarán métodos vectoriales, pero, cuando estos no ofrezcan ventajas, se utilizará un método escalar.

El texto trata los aspectos de la dinámica de la partícula antes de abordar el análisis de la dinámica del cuerpo rígido. Se ha hecho un esfuerzo para presentar el texto de

manera sencilla, permitiendo desarrollar en el estudiante la capacidad de analizar un problema de manera sencilla para que pueda comprender y aplicar los principios fundamentales de la dinámica que fomentan el desarrollo de su capacidad analítica.



# INTRODUCCIÓN

El tema del libro inicia con el estudio de la cinemática de la partícula, en el que se aborda el movimiento de una de estas bajo el efecto de la gravedad; luego se indican las relaciones entre la cinemática de la partícula y la fuerza que actúa sobre esta, en donde se usarán las leyes del movimiento de Newton, para finalizar con los principios de trabajo y energía; conservación de la energía; cantidad de movimiento y colisiones.

A continuación se presenta el contenido del libro:

En el capítulo 1 se estudia el movimiento curvilíneo de una partícula utilizando componentes rectangulares. Según la geometría de la trayectoria de la partícula, se utilizan las coordenadas rectangulares; el componente normal y tangencial; el movimiento relativo, y las aceleraciones implicadas en la solución de problemas de ingeniería.

El capítulo 2 estudia el principio de conservación de energía y el concepto de potencia.

En el capítulo 3 se dan a conocer el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal y el impacto entre partículas.



# LISTA DE SÍMBOLOS

- a** Aceleración.
- d** Distancia.
- $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t$**  Vectores unitarios a lo largo de la normal y la tangente.
- $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$**  Vectores unitarios en las direcciones radial y transversal.
- e** Coeficiente de restitución; base de los logaritmos naturales.
- E** Energía mecánica total.
- F** Fuerza.
- $F_f$**  Fuerza de fricción.
- g** Aceleración de la gravedad.
- G** Centro de gravedad.
- $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$**  Vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados.
- L** Cantidad de movimiento lineal.
- L** Longitud.
- m** Masa.

<b>M</b>	Par; momento.
<b>N</b>	Fuerza normal.
<b>O</b>	Origen de coordenadas.
<b>P</b>	Fuerza; vector.
<b>Q</b>	Fuerza; vector.
$\vec{r}$	Vector de posición.
<b>r</b>	Radio; distancia; coordenada polar.
<b>R</b>	Fuerza resultante; vector resultante.
<b>S</b>	Longitud de arco.
<b>t</b>	Tiempo; dirección tangencial.
<b>T</b>	Energía cinética.
<b>U</b>	Trabajo.
<b>v</b>	Velocidad.
<b>V</b>	Producto vectorial.
<b>V</b>	Energía potencial.
<b>W</b>	Peso.
<b>x, y, z</b>	Coordenadas rectangulares; distancias.
<b><math>\alpha</math></b>	Aceleración angular.
<b><math>\theta</math></b>	Coordenada angular; ángulo; coordenada polar.
<b><math>\mu</math></b>	Coeficiente de fricción.
<b><math>\rho</math></b>	Radio de curvatura.
<b><math>\omega</math></b>	Velocidad angular.

## CAPÍTULO 1

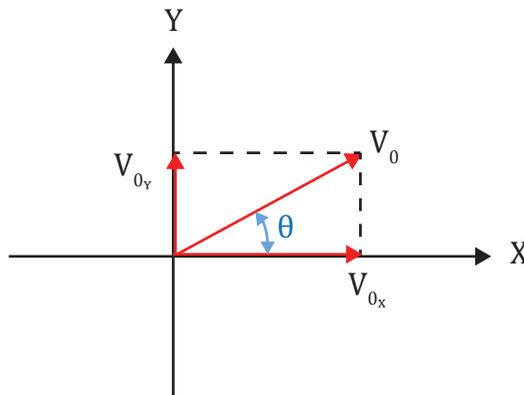
# CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA

### **1.1. Movimiento de una partícula: componentes rectangulares**

Una partícula se mueve en el campo gravitatorio de la tierra describiendo un movimiento parabólico y despreciando el efecto de la resistencia del aire sobre sí misma. La partícula posee un movimiento uniformemente acelerado y “puede sustituirse por dos movimientos rectilíneos independientes” (Beer, 2010, p. 646), un movimiento uniforme en la dirección horizontal y un movimiento uniformemente acelerado en la dirección vertical.

El movimiento de la partícula a lo largo del eje X es rectilíneo. En él, la componente de la velocidad, a lo largo del eje X, es constante.

La velocidad inicial de la partícula puede verse en la Figura 1.

**Figura 1. Componentes de la velocidad inicial de la partícula**

Fuente: elaboración propia.

La componente inicial de la velocidad de la partícula, a lo largo del eje X, es:

$$V_X = \text{Constante}$$

$$V_X = V_{0x}$$

$$V_{0x} = V_0 \cos \theta$$

La componente de velocidad de la partícula a lo largo del eje es la razón de cambio de la posición a lo largo del eje X respecto al tiempo.

$$V_X = \frac{dX}{dt}$$

Separando variables, se tiene:

$$dX = V_X dt$$

Integrando, se logra:

$$\int_{X_0}^X dX = \int_{t_0}^t V_X dt$$

$$X - X_0 = V_X t$$

$$X = X_0 + V_X t \quad \text{Ec. 1}$$

Despejando la variable tiempo de la Ecuación 1 de posición de la partícula a lo largo del eje X, se logra:

$$t = \frac{X - X_0}{V_{0x}}$$

Reemplazando la componente de velocidad de la partícula a lo largo del eje X, en la expresión del tiempo, se tiene:

$$t = \frac{X - X_0}{V_0 \cos \theta}$$

El movimiento de la partícula a lo largo del eje Y es uniformemente acelerado, “debido a que la única fuerza que actúa sobre el proyectil es su peso, lo que hace que la partícula tenga una aceleración constante hacia abajo de aproximadamente” (Hibberler, 2010, p. 39):

$$a_Y = -g$$

La componente de aceleración de la partícula a lo largo del eje Y es la razón de cambio de la componente de velocidad a lo largo del eje Y respecto al tiempo.

$$a_Y = \frac{dV_Y}{dt}$$

Separando variables para encontrar la expresión de la componente de la velocidad de la partícula a lo largo del eje Y, se tiene:

$$dV_Y = a_Y dt$$

Integrando, se encuentra:

$$\int_{V_{Y0}}^{V_Y} dV_Y = \int_{t_0}^t a_Y dt$$

$$\int_{V_{Y0}}^{V_Y} dV_Y = \int_{t_0}^t -g dt$$

$$V_Y - V_{Y0} = -g t$$

$$V_Y = V_{Y0} - g t \quad \text{Ec. 2}$$

La componente de la velocidad en el eje Y es la razón de cambio de la posición a lo largo del eje Y respecto al tiempo.

$$V_Y = \frac{dY}{dt}$$

Separando variables en cada miembro, se tiene:

$$dY = V_Y dt$$

Integrando y sustituyendo la componente de la velocidad de la partícula a lo largo del eje Y, se logra:

$$\int_{Y_0}^Y dY = \int_{t_0}^t V_Y dt$$

$$\int_{Y_0}^Y dY = \int_{t_0}^t (V_{Y0} - g t) dt$$

$$Y - Y_0 = V_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Y = Y_0 + V_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{Ec. 3}$$

Al sustituir las expresiones de la componente inicial de la velocidad de la partícula a lo largo del eje Y y el tiempo, en la posición final de la partícula a lo largo del eje Y se tiene:

$$V_{0Y} = V_0 \text{ Sen } \theta$$

$$t = \frac{X}{V_0 \text{ Cos } \theta}$$

$$Y = Y_0 + V_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Y = Y_0 + V_0 \text{ Sen } \theta \left( \frac{X}{V_0 \text{ Cos } \theta} \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{X}{V_0 \text{ Cos } \theta} \right)^2$$

$$Y = Y_0 + X \text{ Tan } \theta - \frac{g X^2}{2 V_0^2 \text{ Cos}^2 \theta}$$

$$Y = Y_0 + X \text{ Tan } \theta - \frac{g X^2}{2 V_0^2} \text{ Sec}^2 \theta$$

Ec. 4

Para encontrar la velocidad de la partícula, se requiere conocer la componente final de velocidad de la partícula a lo largo de los ejes X y Y.

La componente de la aceleración de la partícula a lo largo del eje Y está dada por la expresión:

$$a_Y = \frac{dV_Y}{dt}$$

Multiplicando y dividiendo entre el diferencial de posición a lo largo del eje Y, para encontrar la expresión de la velocidad en función de la posición a lo largo del eje Y se encuentra:

$$a_Y = \frac{dV_Y}{dt} \frac{dY}{dY}$$

Acomodando los diferenciales, se tiene:

$$a_Y = \frac{dY}{dt} \frac{dV_Y}{dY}$$

Pero la razón de cambio de la posición a lo largo del eje Y, respecto al tiempo, es la componente de la velocidad a lo largo del eje Y.

$$V_Y = \frac{dY}{dt}$$

Si se reemplaza la componente de la velocidad a lo largo del eje Y en la expresión de la aceleración, se logra:

$$a_Y = \frac{dY}{dt} \frac{dV_Y}{dY}$$

$$a_Y = V_Y \frac{dV_Y}{dY}$$

Al separar variables en cada miembro, se halla:

$$a_Y dY = V_Y dV_Y$$

Como el movimiento de la partícula a lo largo del eje es una caída libre, la componente de la aceleración a lo largo del eje Y es la aceleración de la gravedad.

$$a_Y = -g$$

Al suplir la componente de la aceleración a lo largo del eje Y e integrando, se tiene:

$$\int_{V_{0Y}}^{V_Y} V_Y dV_Y = \int_{Y_0}^Y -g dY$$

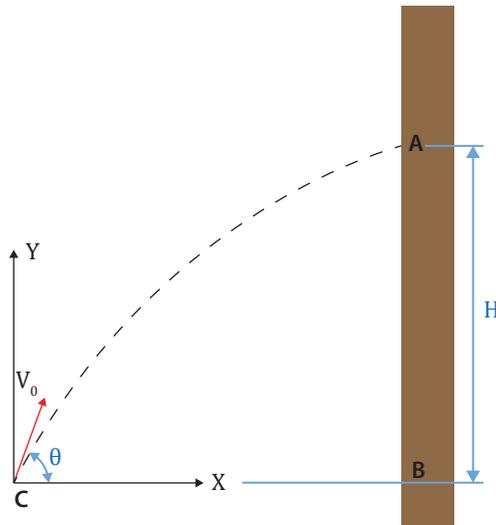
$$\frac{V_Y^2 - V_{0Y}^2}{2} = -g (Y - Y_0)$$

La expresión de la componente de la velocidad de la partícula a lo largo del eje Y es:

$$V_Y^2 = V_{0Y}^2 - 2g(Y - Y_0) \quad \text{Ec. 5}$$

### 1.1.1. Problema caso 1

Determinar el radio de curvatura de la trayectoria que describe la partícula cuando golpea en la pared, que haga que la partícula alcance la altura máxima (véase la Figura 2). La rapidez de la partícula con la que es lanzada es  $V_C = 20 \frac{m}{s}$  y el alcance que logra, a lo largo del eje X, es de 12 m.

**Figura 2. Trayectoria de la partícula**

Fuente: elaboración propia.

Para encontrar el radio de curvatura de la trayectoria de la partícula cuando golpea a la pared, es necesario determinar la velocidad y la aceleración de esta cuando golpea, mientras que para hallar la velocidad un instante antes de la colisión se requiere la velocidad con la que es lanzada.

La expresión para el radio de curvatura de la trayectoria descrita por la partícula es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{V^3} \quad \text{Ec. 6}$$

“Para trayectorias rectilíneas el radio de curvatura es infinito y para trayectorias circulares es constante” (Martín, 1997, p. 120).

Para encontrar la velocidad con la que es lanzada la partícula es necesario determinar su dirección, para lo que hay que maximizar la expresión de la trayectoria de la partícula Ecuación 4, la cual tiene un movimiento parabólico que es una superposición entre el movimiento rectilíneo a lo largo del eje X y el movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje Y.

Para analizar el movimiento de la partícula se ubican los ejes cartesianos en el punto donde sale disparada la partícula por lo que la componente inicial de posición de la partícula en cada eje coordenado es nula.

$$X_0 = 0$$

$$Y_0 = 0$$

Reemplazando la condición inicial de posición  $Y_0 = 0$ , a lo largo del eje Y en la posición final de la partícula a lo largo del eje Y, Ecuación 4, se tiene:

$$Y_0 = 0$$

$$Y = Y_0 + X \tan \theta - \frac{g X^2}{2 V_0^2} \sec^2 \theta$$

$$Y = X \tan \theta - \frac{g X^2}{2 V_c^2} \sec^2 \theta$$

La posición final de la partícula a lo largo del eje Y es:

$$Y = H$$

Al sustituir la posición final de la partícula a lo largo del eje Y, se halla:

$$H = X \tan \theta - \frac{g X^2}{2 V_c^2} \sec^2 \theta$$

Para encontrar la velocidad inicial con la que es lanzada la partícula, es necesario determinar su dirección, para lo que es necesario derivar la posición a lo largo del eje Y respecto de quien hace máximo la velocidad que, en este caso, es la dirección de la velocidad en el momento en el que es lanzada la partícula.

$$\frac{dH}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left( X \tan \theta - \frac{g X^2}{2 V_c^2} \sec^2 \theta \right)$$

$$\frac{dH}{d\theta} = X \sec^2 \theta - \frac{g X^2}{2 V_c^2} 2 \sec \theta * \sec \theta \tan \theta$$

Haciendo nula la variación de la posición respecto a la posición angular, la dirección de la velocidad en el momento con la que es lanzada la partícula es:

$$\frac{dH}{d\theta} = 0$$

$$X \sec^2 \theta - \frac{g X^2}{V_c^2} \sec^2 \theta \tan \theta = 0$$

Factorizando en la expresión, se tiene:

$$X \operatorname{Sec}^2 \theta \left( 1 - \frac{g X}{V_C^2} \operatorname{Tan} \theta \right) = 0$$

$$1 - \frac{g X}{V_C^2} \operatorname{Tan} \theta = 0$$

$$\operatorname{Tan} \theta = \frac{V_C^2}{g X}$$

Al reemplazar la velocidad con la que es lanzada la partícula y la posición final a lo largo del eje X, se encuentra:

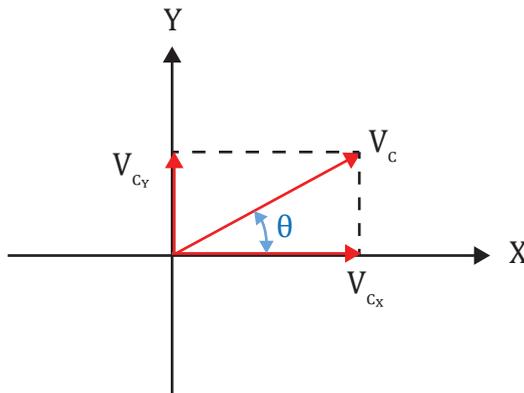
$$\operatorname{Tan} \theta = \frac{\left( 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 12 \text{ m}}$$

$$\operatorname{Tan} \theta = 3.40$$

$$\theta = 73.62^\circ$$

La velocidad inicial con la que sale la partícula a lo largo de los ejes coordenados puede verse en la Figura 3.

**Figura 3. Componentes de la velocidad inicial de la partícula**



Fuente: elaboración propia.

Al suplir la velocidad de la partícula con la que es lanzada y su dirección, la componente de la velocidad de la partícula a lo largo del eje X en cualquier instante, es:

$$V_{0x} = V_C \cos \theta$$

$$V_{0x} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} * \cos 73.62^\circ$$

$$V_{0x} = 5.64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_{Cx} = 5.64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_{Ax} = 5.64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La componente inicial de velocidad de la partícula a lo largo del eje Y es:

$$V_{0y} = V_C \sin \theta$$

$$V_{0y} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} * \sin 73.62^\circ$$

$$V_{0y} = 19.19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_{Cy} = 19.19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para encontrar la velocidad de la partícula un momento antes de la colisión con la pared en el punto, se requiere conocer la componente final de velocidad de la partícula a lo largo de los ejes X y Y, y, para encontrar esta última componente se utilizara la Ecuación 5.

$$V_Y^2 = V_{0y}^2 - 2g(Y - Y_0)$$

Para encontrar la componente de la velocidad de la partícula a lo largo del eje Y es necesario determinar la altura máxima lograda por la partícula desde el inicio del movimiento hasta el momento de la colisión con la pared en el punto, utilizando la Ecuación 5. y reemplazando la magnitud y dirección con la que es lanzada la partícula, por lo que la altura máxima encontrada es:

$$Y = X \tan \theta - \frac{g X^2}{2 V_C^2} \sec^2 \theta$$

$$Y = 12 \text{ m} * \tan 73.62^\circ - \frac{9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * (12 \text{ m})^2}{2 * \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \sec^2 73.62^\circ$$

$$Y = 40.83 \text{ m} - 22.18 \text{ m}$$

$$Y = 18.65 \text{ m}$$

Al sustituir la componente inicial de velocidad de la partícula a lo largo del eje Y, la posición inicial de la partícula a lo largo del eje Y y la altura máxima alcanzada por esta, en la Ecuación 5, componente final de la velocidad a lo largo del eje Y un instante antes de la colisión con la pared en el punto, se encuentra:

$$V_{CY} = 19.19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Y = 18.65 \text{ m}$$

$$Y_0 = 0$$

$$V_{AY}^2 = V_{CY}^2 - 2 g (Y - Y_0)$$

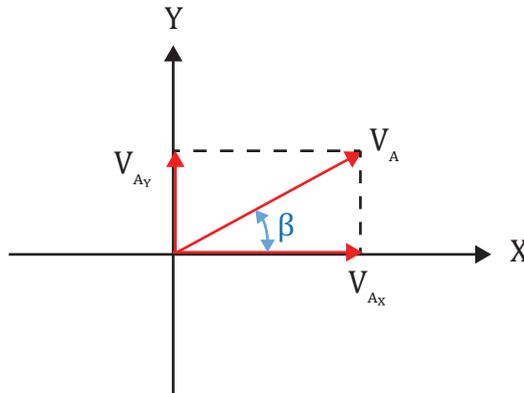
$$V_{AY}^2 = \left(19.19 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 2 * 9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * (18.65 \text{ m} - 0)$$

$$V_{AY}^2 = 2.72 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

La componente de la velocidad de la partícula a lo largo del eje Y un momento antes de la colisión, es:

$$V_{AY} = 1.65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Las componentes de la velocidad de la partícula un momento antes de la colisión pueden verse en la Figura 4.

**Figura 4. Componentes de la velocidad de la partícula un momento antes de la colisión**

Fuente: elaboración propia.

La velocidad de la partícula un instante antes de la colisión con la pared en el punto A es:

$$\bar{V}_A = 5.64 \hat{i} + 1.65 \hat{j} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

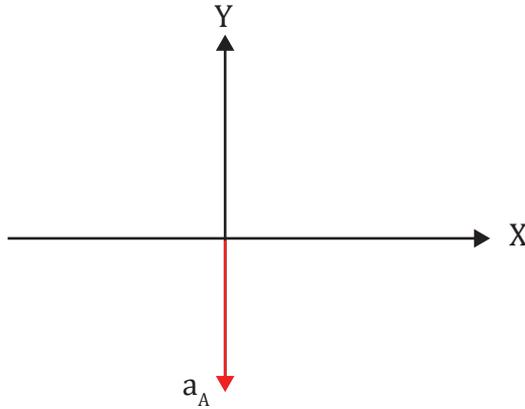
La rapidez de la partícula un instante antes de la colisión con la pared en el punto A es:

$$V_A = \sqrt{V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2}$$

$$V_A = \sqrt{\left( 5.64 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + \left( 1.65 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}$$

$$V_A = 5.88 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La aceleración de la partícula un instante antes de la colisión con la pared en el punto A, puede verse en la Figura 5.

**Figura 5. Componentes de la aceleración de la partícula un momento antes de la colisión**

Fuente: elaboración propia.

La aceleración de la partícula un instante antes de la colisión con la pared en el punto A, es:

$$\bar{a}_A = -9.80 \hat{j} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

Reemplazando la velocidad y aceleración de la partícula en el momento de la colisión en la Ecuación 6 para determinar el radio de curvatura de la trayectoria descrita por la partícula un instante antes de la colisión con la pared en el punto A, se tiene:

$$\frac{1}{\rho_A} = \frac{|\bar{V}_A \times \bar{a}_A|}{V_A^3}$$

$$\frac{1}{\rho_A} = \frac{|(5.64 \hat{i} + 1.65 \hat{j}) \times (-9.80 \hat{j})|}{5.88^3}$$

$$\frac{1}{\rho_A} = \frac{|55.27 \hat{k}|}{5.88^3}$$

$$\frac{1}{\rho_A} = \frac{55.27}{5.88^3}$$

$$\rho_A = 3.68 \text{ m}$$

Otra manera de determinar el radio de curvatura de la trayectoria descrita por la partícula es con la expresión:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2Y}{dX^2}\right|} \quad \text{Ec. 7}$$

Sustituyendo la magnitud y dirección de la velocidad de la partícula en el momento de la colisión en la Ecuación 4, se tiene:

$$Y = X \tan \theta - \frac{g X^2}{2 V_C^2} \sec^2 \theta$$

$$Y = X \tan 73.62^\circ - \frac{9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * X^2}{2 * \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \sec^2 73.62^\circ$$

$$Y = 3.40 X - 0.15 X^2$$

La expresión de la primera razón de la variable Y respecto a la variable X es:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{d}{dX} (3.40 X - 0.15 X^2)$$

$$\frac{dY}{dX} = 3.40 - 0.30 X$$

Al suplir la posición final a lo largo del eje X, se obtiene que el valor de la primera razón de la variable Y respecto a la variable X es:

$$\frac{dY}{dX} = 3.40 - 0.30 * 12$$

$$\frac{dY}{dX} = -0.20$$

La expresión de la segunda razón de la variable Y respecto a la variable X es:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{d}{dX} (3.40 - 0.30 X)$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -0.30$$

Sustituyendo la primera y segunda variación de la variable Y respecto a la variable X en la Ecuación 7 expresión del radio de curvatura, se encuentra:

$$\frac{dY}{dX} = -0.20$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -0.30$$

$$\rho = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dY}{dX} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{d^2Y}{dX^2} \right|}$$

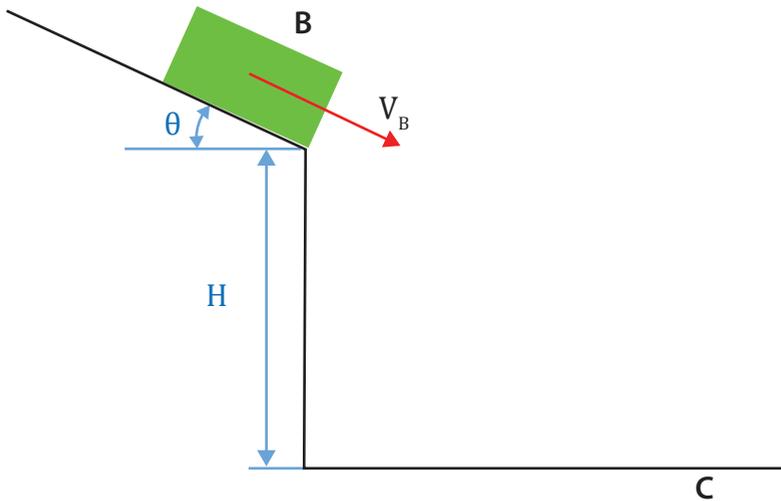
$$\rho_C = \frac{[1 + (-0.20)^2]^{\frac{3}{2}}}{|-0.30|}$$

$$\rho_C = 3.54 \text{ m}$$

### 1.1.2. Problema caso 2

Una partícula es lanzada por un plano inclinado con una rapidez  $V_B$  desde una altura y choca con la superficie horizontal en el punto C (véase Figura 6). Encuentre la expresión del alcance logrado por la partícula.

Figura 6. Esquema general



Fuente: elaboración propia.

Para determinar el punto donde la partícula hace contacto con el suelo, se analiza el movimiento parabólico entre los puntos B y C y se considera como una superposición entre un movimiento rectilíneo a lo largo del eje X, en el que la componente de la velocidad, a lo largo del eje X, es constante, y un movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje Y.

Para la posición de la partícula a lo largo del eje X se utiliza la Ecuación 1.

$$X = X_0 + V_X t$$

Los ejes cartesianos se ubican en el punto de donde sale disparada la partícula, por lo que la componente inicial de posición de la partícula en cada eje coordenado es nula.

$$X_0 = 0$$

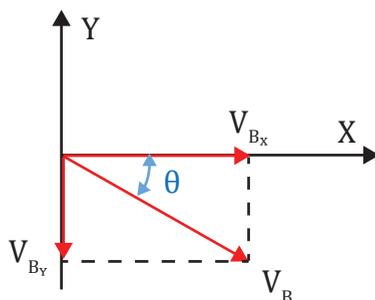
$$Y_0 = 0$$

La posición final de la partícula a lo largo del eje Y es:

$$Y = -H$$

Las componentes de la velocidad inicial de la partícula en el punto B pueden verse en la Figura 7.

**Figura 7. Componentes de la velocidad inicial de la partícula**



Fuente: elaboración propia.

La componente de la velocidad inicial de la partícula en la dirección X es:

$$V_{0x} = V_{B_x}$$

$$V_{0x} = V_x$$

$$V_{B_x} = V_B \cos 30^\circ$$

$$V_{B_x} = \frac{\sqrt{3}}{2} V_B$$

Reemplazando la componente de la velocidad inicial de la partícula en la dirección X, en la Ecuación 1 posición a lo largo del eje X, se tiene:

$$X = X_0 + V_x t$$

$$R = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} V_B t$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} V_B t$$

Para encontrar la posición a lo largo del eje X, donde colisiona la partícula es necesario determinar el tiempo que gasta desde que abandona el plano inclinado, hasta que choca contra la superficie horizontal, para ello se analiza el movimiento de la partícula a lo largo del eje Y y se utiliza la Ecuación 2 posición a lo largo del eje Y. Se tiene:

$$Y = Y_0 + V_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

La componente de la velocidad inicial de la partícula en la dirección Y es:

$$V_{0Y} = V_{BY}$$

$$V_{BY} = -V_B \text{ Sen } 30^\circ$$

$$V_{BY} = -\frac{1}{2} V_B$$

Al sustituir la componente inicial y final de posición de la partícula a lo largo del eje Y y la componente de la velocidad inicial de la partícula en la dirección Y, en la Ecuación 2 posición final a lo largo del eje Y, se tiene:

$$Y_0 = 0$$

$$Y = -H$$

$$V_{0Y} = -\frac{1}{2} V_B$$

$$Y = Y_0 + V_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$-H = 0 + \left(-\frac{1}{2} V_B\right) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Esta es una ecuación cuadrática. Reorganizando la expresión cuadrática, se tiene:

$$\frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} V_B t - H = 0$$

La ecuación cuadrática es de la forma:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

La solución de la ecuación cuadrática es:

$$t_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

Los valores de las constantes a, b y c son:

$$a = \frac{1}{2} g$$

$$b = \frac{1}{2} V_B$$

$$c = -H$$

Supliendo en la solución de la ecuación cuadrática, se halla:

$$t_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

$$t_{1-2} = \frac{-\left(\frac{1}{2} V_B\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} V_B\right)^2 - 4 * \frac{1}{2} g * (-H)}}{2 * \frac{1}{2} g}$$

$$t_{1-2} = \frac{-\frac{1}{2} V_B \pm \sqrt{\frac{1}{4} V_B^2 + 2 g H}}{g}$$

La primera raíz es:

$$t_1 = \frac{-\frac{1}{2} V_B + \sqrt{\frac{1}{4} V_B^2 + 2 g H}}{g}$$

La segunda raíz es:

$$t_2 = \frac{-\frac{1}{2} V_B - \sqrt{\frac{1}{4} V_B^2 + 2 g H}}{g}$$

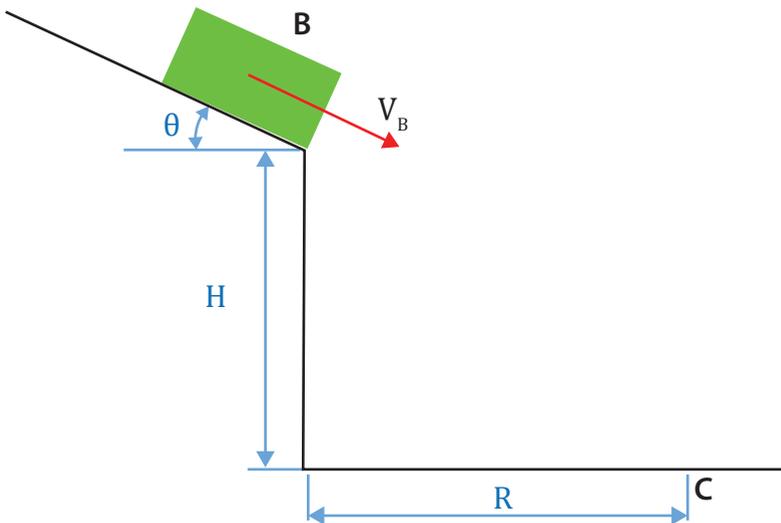
La segunda raíz para el tiempo obtenido es negativa, por lo cual esta raíz no cumple.

El tiempo que gasta la partícula desde que abandona el plano inclinado y choca contra la superficie horizontal es:

$$t = \frac{-\frac{1}{2} V_B + \sqrt{\frac{1}{4} V_B^2 + 2 g H}}{g}$$

El alcance logrado por la partícula puede verse en la Figura 8.

**Figura 8. Alcance logrado por la partícula**



Fuente: elaboración propia.

Al reemplazar el tiempo que gasta la partícula desde que abandona el plano inclinado y choca contra la superficie horizontal en la ecuación de la posición, a lo largo del eje X, el alcance alcanzado por la partícula es:

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} V_B t$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} V_B \left( \frac{-\frac{1}{2} V_B + \sqrt{\frac{1}{4} V_B^2 + 2 g H}}{g} \right)$$



## CAPÍTULO 2

# CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA FUERZA Y ACELERACIÓN

“La cinética es el estudio de las relaciones entre las fuerzas desequilibradas y los cambios resultantes en su movimiento” (Meriam, 1998, p. 119).

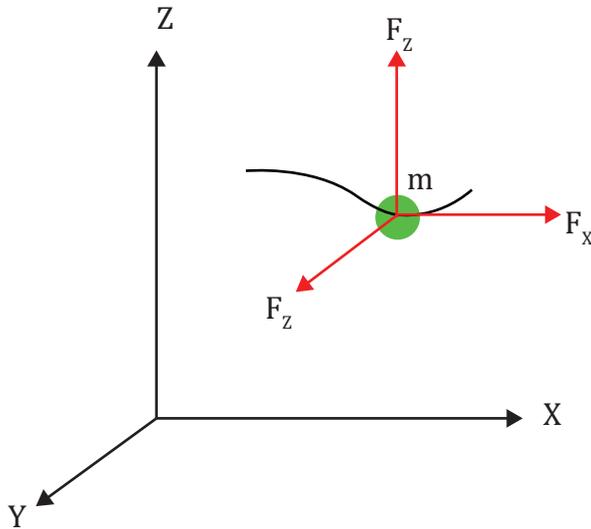
### 2.1. Ecuación del movimiento coordenadas rectangulares

Los movimientos de los cuerpos pueden ser tratados como puntos materiales o partículas, si se considera el movimiento de la línea descrita por el centro de masa del cuerpo y las fuerzas que actúan en él, pueden considerarse como si concurrieran en el centro de masa.

Cuando una partícula de masa  $m$  con movimiento rectilíneo, en relación con un marco de referencia  $X, Y, Z$ , es posible expresar las fuerzas que actúan sobre ella, así como su aceleración en términos de sus componentes  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  (véase la Figura 9). Al aplicar la ecuación de movimiento, se obtiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\Sigma (F_X \hat{i} + F_Y \hat{j} + F_Z \hat{k}) = m (a_X \hat{i} + a_Y \hat{j} + a_Z \hat{k}) \quad \text{Ec. 8}$$

**Figura 9. Segunda ley en coordenadas rectangulares**

Fuente: elaboración propia.

Para que esta ecuación se satisfaga, los componentes  $\hat{I}$ ,  $\hat{J}$ ,  $\hat{K}$ , del miembro izquierdo deben ser iguales a las equivalentes que le corresponden en el lado derecho.

La Ecuación 8 se expresa por las tres ecuaciones escalares:

$$\Sigma F_X = m a_X$$

$$\Sigma F_Y = m a_Y$$

$$\Sigma F_Z = m a_Z$$

Las componentes de la aceleración iguales a la segunda derivada de las coordenadas de la partícula.

$$\Sigma F_X = m \ddot{X}$$

$$\Sigma F_Y = m \ddot{Y}$$

$$\Sigma F_Z = m \ddot{Z}$$

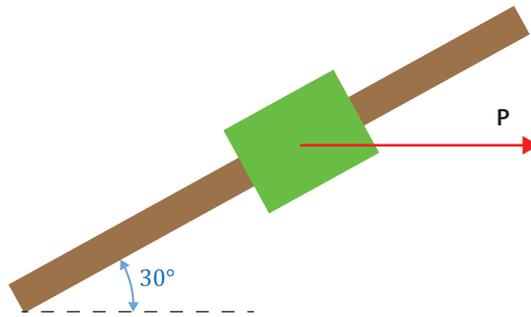
Si la partícula se mueve paralelamente al eje X, solo la ecuación  $\Sigma F_x = ma_x$  es requerida, o si se mueve en el plano XY, únicamente se emplean las dos primeras ecuaciones para especificar el movimiento.

Cuando un problema implica dos o más cuerpos, las ecuaciones de movimiento deben escribirse para cada uno de ellos. Las aceleraciones deben medirse con respecto a un sistema de referencia newtoniano.

### 2.1.1. Problema caso 3

Una corredera se desliza por una barra, partiendo desde el reposo, en el momento en el que se le aplica una fuerza horizontal P (véase la Figura 10). Obtener una expresión para la velocidad de la corredera cuando esta haya recorrido una distancia S, si el coeficiente de fricción cinético entre el material de la corredera y la barra es  $\mu$ .

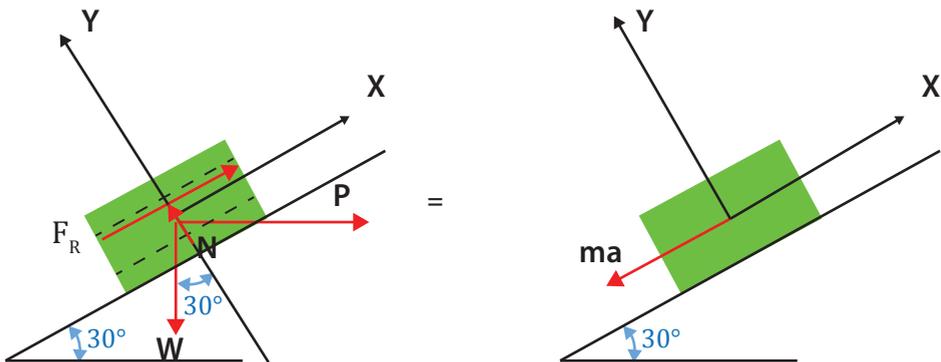
Figura 10. Trayectoria de la partícula



Fuente: elaboración propia.

Aplicando la segunda ley de Newton a la corredera (véase la Figura 11).

Figura 11. Segunda ley de Newton aplicada a la corredera



Fuente: elaboración propia.

Al considerar la segunda ley de Newton a la corredera, a lo largo del eje tangencial, se tiene:

$$+\nearrow (\Sigma F)_{\text{externas e internas}} = (\Sigma F)_{\text{inerciales}}$$

$$F_N + P \cos 30^\circ - W \sin 30^\circ = -m a$$

La fuerza normal que le ejerce la barra a la corredera es:

$$F_R = \mu N$$

Reemplazando la expresión de la fuerza normal que le ejerce la barra a la corredera en la expresión de la segunda ley de Newton aplicada a lo largo del eje tangencial, se logra:

$$F_R + P \cos 30^\circ - W \sin 30^\circ = -m a$$

$$\mu N + P \cos 30^\circ - W \sin 30^\circ = -m a$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la corredera a lo largo del eje normal, se tiene:

$$+\nwarrow (\Sigma F)_{\text{externas e internas}} = (\Sigma F)_{\text{inerciales}}$$

$$N - P \sin 30^\circ - W \cos 30^\circ = 0$$

La fuerza normal que le ejerce la barra a la corredera es:

$$N = P \sin 30^\circ + W \cos 30^\circ$$

Al suplir la fuerza normal que le ejerce la barra a la corredera en la expresión de la segunda ley de Newton aplicada a la corredera a lo largo del eje tangencial, se encuentra:

$$\mu N + P \cos 30^\circ - W \sin 30^\circ = -m a$$

$$\mu (P \sin 30^\circ + W \cos 30^\circ) + P \cos 30^\circ - W \sin 30^\circ = -m a$$

La aceleración es la razón de cambio de la velocidad en el tiempo.

$$A = \frac{dV}{dt}$$

Si se reemplaza la aceleración como la razón de cambio de la velocidad en el tiempo, en la expresión de la segunda ley de Newton aplicada a la corredera a lo largo del eje tangencial, se halla:

$$\mu ( P \text{ Sen } 30^\circ + W \text{ Cos } 30^\circ ) + P \text{ Cos } 30^\circ - W \text{ Sen } 30^\circ = - m a$$

$$\mu ( P \text{ Sen } 30^\circ + W \text{ Cos } 30^\circ ) + P \text{ Cos } 30^\circ - W \text{ Sen } 30^\circ = - m * \frac{dV}{dt}$$

Multiplicando y dividiendo la expresión de la segunda ley de Newton, aplicada a la corredera a lo largo del eje tangencial, por el diferencial  $dS$ , se tiene:

$$\mu ( P \text{ Sen } 30^\circ + W \text{ Cos } 30^\circ ) + P \text{ Cos } 30^\circ - W \text{ Sen } 30^\circ = - m * \frac{dV}{dt}$$

$$\mu ( P \text{ Sen } 30^\circ + W \text{ Cos } 30^\circ ) + P \text{ Cos } 30^\circ - W \text{ Sen } 30^\circ = - m * \frac{dV}{dt} * \frac{dS}{dS}$$

Acomodando los diferenciales, se tiene:

$$\mu ( P \text{ Sen } 30^\circ + W \text{ Cos } 30^\circ ) + P \text{ Cos } 30^\circ - W \text{ Sen } 30^\circ = - m * \frac{dV}{dS} * \frac{dS}{dt}$$

La velocidad es la variación de la posición respecto al tiempo:

$$V = \frac{dS}{dt}$$

Al sustituir la velocidad de la corredera en la expresión de la segunda ley de Newton, a lo largo del eje tangencial, se tiene:

$$\mu ( P \text{ Sen } 30^\circ + W \text{ Cos } 30^\circ ) + P \text{ Cos } 30^\circ - W \text{ Sen } 30^\circ = - m V * \frac{dV}{dS}$$

Separando variables en cada miembro en la expresión de la segunda ley de Newton, se encuentra:

$$\mu ( P \text{ Sen } 30^\circ + W \text{ Cos } 30^\circ ) + P \text{ Cos } 30^\circ - W \text{ Sen } 30^\circ = - m V * \frac{dV}{dS}$$

$$\frac{[\mu ( P \text{ Sen } 30^\circ + W \text{ Cos } 30^\circ ) + P \text{ Cos } 30^\circ - W \text{ Sen } 30^\circ]}{m} dS = - V dV$$

Al integrar, se logra:

$$\int_{s_0=0}^S \frac{[\mu (P \text{ Sen } 30^\circ + W \text{ Cos } 30^\circ) + P \text{ Cos } 30^\circ - W \text{ Sen } 30^\circ]}{m} dS = \int_{v_0=0}^v -V dV$$

$$- \frac{[\mu (P \text{ Sen } 30^\circ + W \text{ Cos } 30^\circ) + P \text{ Cos } 30^\circ - W \text{ Sen } 30^\circ]}{m} S = \frac{1}{2} V^2$$

$$V^2 = \frac{2 S [-\mu (P \text{ Sen } 30^\circ + W \text{ Cos } 30^\circ) - P \text{ Cos } 30^\circ + W \text{ Sen } 30^\circ]}{m}$$

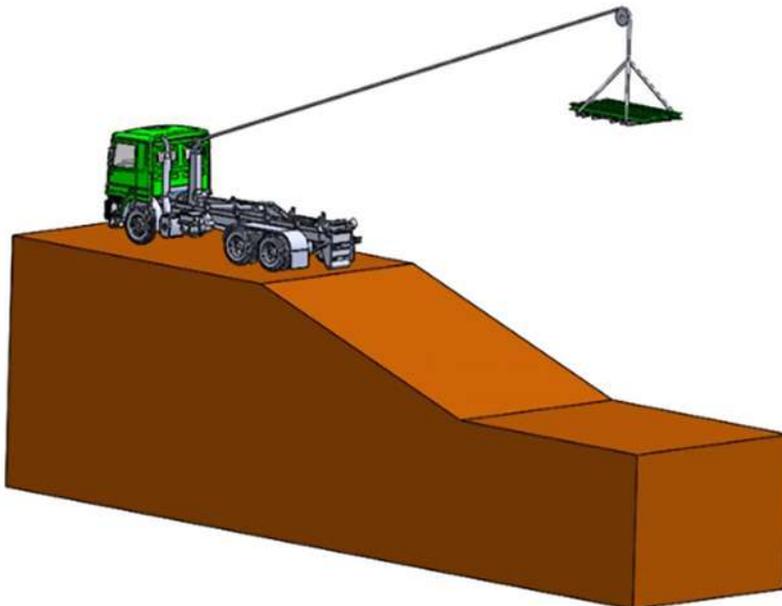
La expresión de la velocidad de la corredera es:

$$V = \sqrt{\frac{2 S [-\mu (P \text{ Sen } 30^\circ + W \text{ Cos } 30^\circ) - P \text{ Cos } 30^\circ + W \text{ Sen } 30^\circ]}{m}}$$

### 2.1.2. Problema caso 4

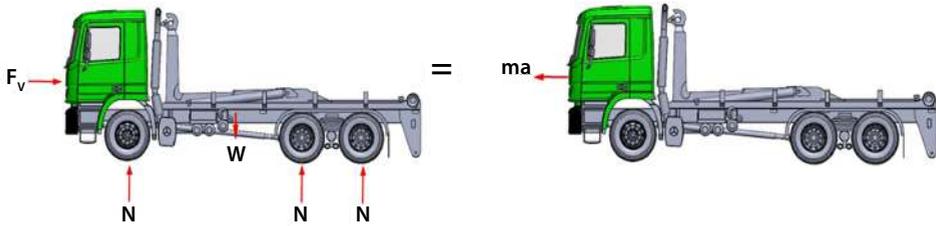
El tráiler se utiliza para elevar la masa suspendida (véase la Figura 12). Si el aire ejerce resistencia a su movimiento, dada por la expresión  $F_v = C V$ , determine el tiempo requerido para que el tráiler se detenga, si la velocidad inicial del tráiler es  $V_0$ .

Figura 12. Esquema general



Aplicando la segunda ley de Newton al tráiler, véase la Figura 13.

**Figura 13. Segunda ley de Newton aplicada al tráiler**



Fuente: elaboración propia.

Al utilizar la segunda ley de Newton en el tráiler, a lo largo del eje tangencial, se tiene:

$$+ \rightarrow (\Sigma F)_{\text{externas e internas}} = (\Sigma F)_{\text{inerciales}}$$

$$F_v = - m a$$

$$C V = - m a$$

La expresión de la aceleración del tráiler es:

$$a = - \frac{C V}{m}$$

La aceleración es la variación de la velocidad respecto al tiempo:

$$a = \frac{dV}{dt}$$

Separando variables, se tiene:

$$dt = \frac{dV}{a}$$

Al sustituir la expresión de la aceleración obtenida de aplicar la segunda ley de Newton e integrando, teniendo en cuenta las condiciones cinemáticas del tráiler, se encuentra:

$$\int dt = \int \frac{dV}{a}$$

$$\int_0^t dt = \int_{V_0}^{V=0} \frac{dV}{-\frac{C V}{m}}$$

$$t - 0 = -\frac{m}{C} (0 - \text{Ln } V_0)$$

$$t = \frac{m}{C} \text{Ln } V_0$$

## 2.2. Ecuación del movimiento coordenadas tangenciales y normales

Cuando una partícula describe una trayectoria curvilínea, la velocidad y aceleración se pueden expresar en las direcciones tangencial y normal.

“La velocidad de la partícula tiene la dirección y sentido del vector unitario  $e_T$ ” (Riley, 1994, p. 38), y está dada por la expresión:

$$\vec{V} = V e_T \quad \text{Ec. 9}$$

La aceleración de la partícula se obtiene diferenciando la Ecuación 9.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{\rho} e_N + \dot{V} e_T \quad \text{Ec. 10}$$

El sentido de la aceleración normal de la aceleración, está dirigido hacia el centro de curvatura.

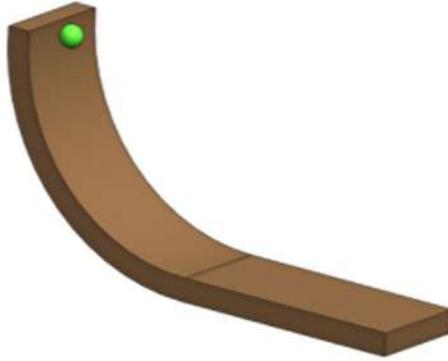
La magnitud de la aceleración está dada por:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

### 2.2.1. Problema caso 5

Una partícula pasa por la posición A con una velocidad de  $5 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$  dirigida hacia abajo y se desliza por la trayectoria circular (véase la Figura 14).

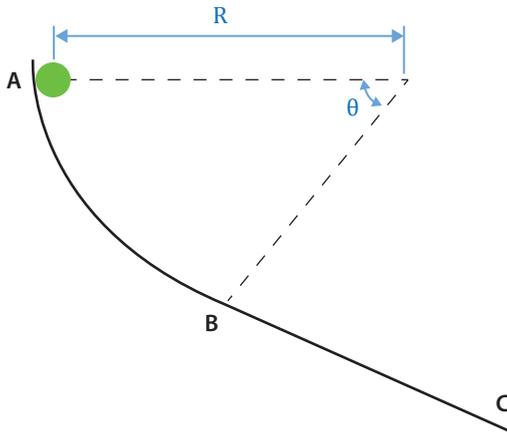
Figura 14. Esquema general



Fuente: elaboración propia.

La partícula abandona la trayectoria circular en el punto B y recorre 20 ft a lo largo de la trayectoria rectilínea (véase la Figura 15). El coeficiente de fricción entre la partícula y las superficies es 0.2. Hallar la velocidad de la partícula cuando esta pasa por el punto C.

Figura 15. Trayectoria de la partícula

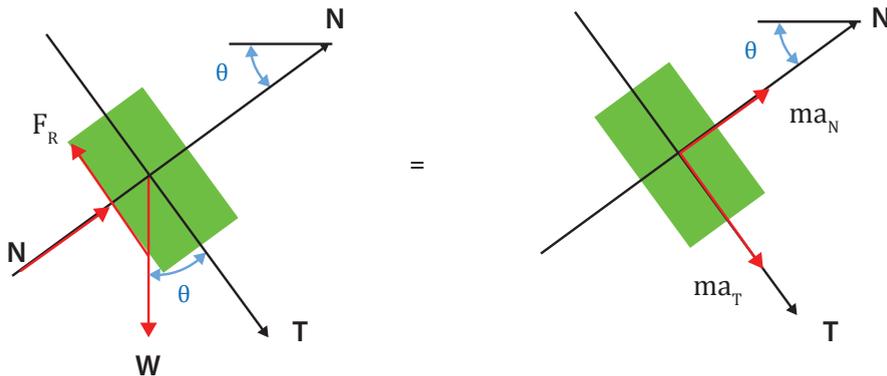


Fuente: elaboración propia.

Para determinar la velocidad de la partícula en el punto C de la trayectoria rectilínea es necesario determinar la velocidad de la partícula cuando abandona la trayectoria circular y después aplicar cinemática y cinética al tramo recto.

Aplicando la segunda ley de Newton a la Newton aplicada a la partícula, en una posición cualquiera, en la trayectoria a describir (véase la Figura 16).

**Figura 16. Segunda ley de Newton aplicada a la partícula**



Fuente: elaboración propia.

Al utilizar la segunda ley de Newton, a la partícula a lo largo del eje normal, se tiene:

$$+\curvearrowleft(\Sigma F) \text{ externas e internas} = (\Sigma F) \text{ inerciales}$$

$$N - W \text{ Sen } \theta = m a_N$$

Usando la segunda ley de Newton en la partícula, a lo largo del eje tangencial, se logra:

$$+\curvearrowright(\Sigma F) \text{ externas e internas} = (\Sigma F) \text{ inerciales}$$

$$- F_R + W \text{ Cos } \theta = m a_T$$

La fuerza de rozamiento entre la partícula y la superficie es:

$$F_R = \mu N$$

$$F_R = 0.20 \text{ N}$$

Al suplir la fuerza de rozamiento entre la partícula y la superficie en la expresión de la segunda ley de Newton a la corredera a lo largo del eje tangencial, se encuentra:

$$- F_R + W \cos \theta = m a_T$$

$$- \mu N + W \cos \theta = m a_T$$

$$- 0.20 N + W \cos \theta = m a_T$$

En las ecuaciones de la segunda ley de Newton aplicada a la partícula a lo largo del eje tangencial y normal existen cuatro incógnitas: la fuerza normal, la dirección y las aceleraciones normal y tangencial. En esas dos ecuaciones, para eliminar la fuerza normal de la ecuación de la segunda ley de Newton a la partícula, a lo largo del eje tangencial, se multiplica por 5 y se suma con la ecuación de la segunda ley de Newton a la partícula a lo largo del eje normal, encontrando:

$$- 0.20 N + W \cos \theta = m a_T$$

$$N - W \sin \theta = m a_N$$

$$- N + 5 W \cos \theta = 5 m a_T$$

$$N - W \sin \theta = m a_N$$

La ecuación encontrada es:

$$5 W \cos \theta - W \sin \theta = 5 m a_T + m a_N$$

$$5 m g \cos \theta - m g \sin \theta = 5 m a_T + m a_N$$

Dividiendo la expresión entre la masa de la partícula, se tiene:

$$\frac{5 m g \cos \theta - m g \sin \theta}{m} = \frac{5 m a_T + m a_N}{m}$$

$$5 g \cos \theta - g \sin \theta = 5 a_T + a_N$$

$$g (5 \cos \theta - \sin \theta) = 5 a_T + a_N$$

El arco para un segmento circular es:

$$dS = R d\theta$$

Al despejar de la expresión del arco para un segmento circular la variación de la posición angular respecto a la variación lineal, se halla:

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{R}$$

La aceleración tangencial es la razón de cambio de la rapidez respecto al tiempo.

$$a_T = \frac{dV}{dt}$$

La magnitud de la aceleración normal es:

$$a_N = \frac{V^2}{R}$$

Si se sustituye la aceleración tangencial y normal en la ecuación resultante, se logra:

$$g (5 \cos \theta - \sin \theta) = 5 a_T + a_N$$

$$g (5 \cos \theta - \sin \theta) = 5 * \frac{dV}{dt} + \frac{V^2}{R}$$

Multiplicando y dividiendo el primer término del miembro derecho de la expresión por la variación de la posición angular y lineal, se tiene:

$$g (5 \cos \theta - \sin \theta) = 5 * \frac{dV}{dt} * \frac{d\theta}{d\theta} * \frac{dS}{dS} + \frac{V^2}{R}$$

Acomodando el primer término del miembro derecho para encontrar la velocidad y la variación de la posición angular respecto a la variación lineal, se halla:

$$g (5 \cos \theta - \sin \theta) = 5 * \frac{dS}{dt} * \frac{d\theta}{dS} * \frac{dV}{d\theta} + \frac{V^2}{R}$$

La variación de la posición respecto al tiempo es la rapidez.

$$V = \frac{dS}{dt}$$

La variación de la posición angular respecto a la variación lineal en la trayectoria circular, es:

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{R}$$

Al reemplazar en la expresión cinemática, se encuentra:

$$g ( 5 \text{ Cos } \theta - \text{ Sen } \theta ) = 5 * \frac{dS}{dt} * \frac{d\theta}{dS} * \frac{dV}{d\theta} + \frac{V^2}{R}$$

$$g ( 5 \text{ Cos } \theta - \text{ Sen } \theta ) = 5 V * \frac{1}{R} * \frac{dV}{d\theta} + \frac{V^2}{R}$$

$$g ( 5 \text{ Cos } \theta - \text{ Sen } \theta ) = 5 * \frac{V}{R} * \frac{dV}{d\theta} + \frac{V^2}{R}$$

Se realiza un cambio de variable para expresar la ecuación diferencial en una ecuación diferencial no homogénea:

$$U = V^2$$

$$dU = 2 V dV$$

$$dV = \frac{dU}{2 V}$$

$$V = \sqrt{U}$$

Al suplir el cambio de variable en la ecuación diferencial encontrada, se halla:

$$g (5 \cos \theta - \operatorname{Sen} \theta) = 5 * \frac{V}{R} * \frac{dV}{d\theta} + \frac{V^2}{R}$$

$$g (5 \cos \theta - \operatorname{Sen} \theta) = 5 * \frac{\sqrt{U}}{R} * \frac{dU}{2V} * \frac{1}{d\theta} + \frac{U}{R}$$

$$g (5 \cos \theta - \operatorname{Sen} \theta) = 5 * \frac{\sqrt{U}}{R} * \frac{dU}{2\sqrt{U}} * \frac{1}{d\theta} + \frac{U}{R}$$

$$g (5 \cos \theta - \operatorname{Sen} \theta) = \frac{5}{2} * \frac{\sqrt{U}}{R \sqrt{U}} * \frac{dU}{d\theta} + \frac{U}{R}$$

$$g (5 \cos \theta - \operatorname{Sen} \theta) = \frac{5}{2} * \frac{1}{R} * \frac{dU}{d\theta} + \frac{U}{R}$$

La ecuación diferencial encontrada es diferencial no homogénea de la forma

$\frac{dY}{dX} + P(X)Y = Q(X)$ . Acomodándola, se encuentra:

$$g (5 \cos \theta - \operatorname{Sen} \theta) - \frac{U}{R} = \frac{5}{2} * \frac{1}{R} * \frac{dU}{d\theta}$$

Al multiplicar la ecuación diferencial por  $\frac{2}{5} R$ , se logra:

$$\frac{2}{5} R \left[ g (5 \cos \theta - \operatorname{Sen} \theta) - \frac{U}{R} \right] = \frac{2}{5} R \left( \frac{5}{2} * \frac{1}{R} * \frac{dU}{d\theta} \right)$$

$$\frac{2}{5} R * g (5 \cos \theta - \operatorname{Sen} \theta) - \frac{2}{5} R * \frac{U}{R} = \frac{dU}{d\theta}$$

Ordenando la ecuación diferencial, se halla:

$$\frac{dU}{d\theta} + \frac{2}{5} R * \frac{U}{R} = \frac{2}{5} g R (5 \cos \theta - \operatorname{Sen} \theta)$$

$$\frac{dU}{d\theta} + \frac{2}{5} U = \frac{2 g R}{5} (5 \cos \theta - \operatorname{Sen} \theta)$$

Si se compara la ecuación diferencial encontrada con la ecuación diferencial no homogénea  $\frac{dY}{dX} + P(X)Y = Q(X)$ , se logra:

$$P(X) = \frac{2}{5}$$

$$Q(X) = \frac{2gR}{5} (5 \cos \theta - \text{Sen } \theta)$$

La solución de la ecuación diferencial no homogénea es:

$$Y = e^{-\int P(X) dX} \left[ \int e^{P(X) dX} * Q(X) dX + C \right]$$

Al sustituir  $P(X)$  y  $Q(X)$  en la solución de la ecuación diferencial, se logra:

$$U = e^{-\int \frac{2}{5} d\theta} \left[ \int e^{\int \frac{2}{5} d\theta} * \frac{2gR}{5} (5 \cos \theta - \text{Sen } \theta) d\theta + C \right]$$

Si se resuelven las integrales de los exponentes, se encuentra:

$$U = e^{-\frac{2}{5}\theta} \left[ \int e^{\frac{2}{5}\theta} * \frac{2gR}{5} (5 \cos \theta - \text{Sen } \theta) d\theta + C \right]$$

Haciendo la multiplicación interna, se halla:

$$U = e^{-\frac{2}{5}\theta} \left[ 2gR \int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta - \frac{2gR}{5} \int e^{\frac{2}{5}\theta} \text{Sen } \theta + C \right]$$

La integral  $\int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta d\theta$  se resuelve por partes, donde:

$$U = \cos \theta$$

$$dU = -\text{Sen } \theta d\theta$$

$$dV = e^{\frac{2}{5}\theta} d\theta$$

$$\int dV = \int e^{\frac{2}{5}\theta} d\theta$$

$$V = \frac{5}{2} * e^{\frac{2}{5}\theta}$$

Al sustituir las variables U, V y dU en la solución de la integral por partes, se tiene:

$$\int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \, d\theta = \frac{5}{2} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta + \int \frac{5}{2} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta$$

Donde:

$$U = \sin \theta$$

$$dU = \cos \theta \, d\theta$$

$$dV = e^{\frac{2}{5}\theta} \, d\theta$$

$$\int dV = \int e^{\frac{2}{5}\theta} \, d\theta$$

$$V = \frac{5}{2} * e^{\frac{2}{5}\theta}$$

La integral es de solución cíclica.

$$\int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \, d\theta = \frac{5}{2} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta + \frac{5}{2} \left[ \frac{5}{2} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta - \int \frac{5}{2} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \, d\theta \right]$$

$$\int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \, d\theta = \frac{5}{2} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta + \frac{25}{4} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta - \frac{25}{4} \int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \, d\theta$$

$$\int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \, d\theta + \frac{25}{4} \int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \, d\theta = \frac{5}{2} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta + \frac{25}{4} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta$$

$$\frac{29}{4} \int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \, d\theta = \frac{5}{2} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta + \frac{25}{4} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta$$

$$\int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \, d\theta = \frac{10}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta + \frac{25}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta$$

De igual manera, la integral  $\int e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta \, d\theta$  se resuelve por partes y su solución es:

$$\int e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta \, d\theta = \frac{10}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta - \frac{25}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta$$

Al reemplazar la solución de las integrales  $\int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \, d\theta$  y  $\int e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta \, d\theta$ , en la solución de la ecuación diferencial, se logra:

$$\int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \, d\theta = \frac{10}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta + \frac{25}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta$$

$$\int e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta \, d\theta = \frac{10}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta - \frac{25}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta$$

$$U = e^{-\frac{2}{5}\theta} \left[ 2 g R \int e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta - \frac{2 g R}{5} \int e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta + C \right]$$

$$U = e^{-\frac{2}{5}\theta} \left[ 2 g R \left\{ \frac{10}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta + \frac{25}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta \right\} - \frac{2 g R}{5} \left\{ \frac{10}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta - \frac{25}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \right\} + C \right]$$

Volviendo a la variable original, se tiene:

$$U = V^2$$

$$V^2 = e^{-\frac{2}{5}\theta} \left[ 2 g R \left\{ \frac{10}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta + \frac{25}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta \right\} - \frac{2 g R}{5} \left\{ \frac{10}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \sin \theta - \frac{25}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \cos \theta \right\} + C \right]$$

Para encontrar la constante de integración, se requiere una condición inicial y en este caso es donde empieza el movimiento de la partícula donde  $\theta=0$  y la partícula

pasa por la posición con una rapidez de  $V_A = 5 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ .

Al suplir la condición inicial en la solución de la ecuación diferencial, se encuentra:

$$\begin{aligned}
 v^2 &= e^{-\frac{2}{5}\theta} \left[ 2 g R \left\{ \frac{10}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \text{Cos } \theta + \frac{25}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \text{Sen } \theta \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2 g R}{5} \left\{ \frac{10}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \text{Sen } \theta - \frac{25}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \text{Cos } \theta \right\} + C \right] \\
 \left( 5 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \right)^2 &= e^{-\frac{2}{5} * 0} \left[ 2 g R \left\{ \frac{10}{29} e^{\frac{2}{5} * 0} \text{Cos } 0 + \frac{25}{29} e^{\frac{2}{5} * 0} \text{Sen } 0 \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2 g R}{5} \left\{ \frac{10}{29} e^{\frac{2}{5} * 0} \text{Sen } 0 - \frac{25}{29} e^{\frac{2}{5} * 0} \text{Cos } 0 \right\} + C \right] \\
 25 &= \left[ 2 g R \left\{ \frac{10}{29} \right\} - \frac{2 g R}{5} \left\{ - \frac{25}{29} \right\} + C \right] \\
 \frac{20}{29} g R + \frac{10}{29} g R + C &= 25
 \end{aligned}$$

$$C = 25 - \frac{30}{29} g R$$

Si se sustituye la constante de integración en la solución de la ecuación diferencial, la expresión de la velocidad de la partícula, se tiene:

$$\begin{aligned}
 v^2 &= e^{-\frac{2}{5}\theta} \left[ 2 g R \left\{ \frac{10}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \text{Cos } \theta + \frac{25}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \text{Sen } \theta \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2 g R}{5} \left\{ \frac{10}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \text{Sen } \theta - \frac{25}{29} * e^{\frac{2}{5}\theta} \text{Cos } \theta \right\} + 25 - \frac{30}{29} g R \right]
 \end{aligned}$$

Se suple, en la expresión de la velocidad de la partícula, la posición angular para

el punto B donde  $\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$  y el radio de la trayectoria circular  $R = 2$  ft, para encontrar la rapidez de la partícula en el momento que abandona la trayectoria circular.

$$V_B^2 = e^{-\frac{2}{5} * \frac{\pi}{3}} \left[ 2 * 32.20 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} * 2 \text{ ft} \left\{ \frac{10}{29} e^{\frac{2}{5} * \frac{\pi}{3}} \text{Cos } 60^\circ + \frac{25}{29} e^{\frac{2}{5} * \frac{\pi}{3}} \text{Sen } 60^\circ \right\} \right. \\ \left. - \frac{2 * 32.20 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} * 2 \text{ ft}}{5} \left\{ \frac{10}{29} e^{\frac{2}{5} * \frac{\pi}{3}} \text{Sen } 60^\circ - \frac{25}{29} e^{\frac{2}{5} * \frac{\pi}{3}} \text{Cos } 60^\circ \right\} + 25 \right. \\ \left. - \frac{30}{29} * 32.20 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} * 2 \text{ ft} \right]$$

$$V_B^2 = e^{-\frac{2\pi}{15}} \left[ 128.80 \left\{ \frac{10}{29} e^{\frac{2\pi}{15}} * \frac{1}{2} + \frac{25}{29} e^{\frac{2\pi}{15}} * 0.86 \right\} \right. \\ \left. - 25.76 \left\{ \frac{10}{29} e^{\frac{2\pi}{15}} * \frac{1}{2} - \frac{25}{29} e^{\frac{2\pi}{15}} * 0.86 \right\} + 25 - 66.62 \right]$$

$$V_B^2 = 0.89 \left[ 128.80 \left\{ \frac{10}{29} * 1.14 * \frac{1}{2} + \frac{25}{29} * 1.14 * 0.86 \right\} \right. \\ \left. - 25.76 \left\{ \frac{10}{29} * 1.14 * \frac{1}{2} - \frac{25}{29} * 1.14 * 0.86 \right\} - 41.62 \right]$$

$$V_B^2 = 0.89 [ 128.80 \{ 0.20 + 0.85 \} - 25.76 \{ 0.20 - 0.85 \} - 41.62 ]$$

$$V_B^2 = 0.89 [ 135.24 - 16.74 - 41.62 ]$$

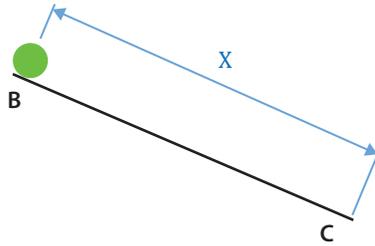
$$V_B^2 = 68.42 \frac{\text{ft}^2}{\text{s}^2}$$

$$V_B = 8.27 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

La velocidad de la esfera al abandonar la trayectoria circular es de 8.27 m/s.

Para determinar la velocidad de la partícula en la trayectoria rectilínea desde B hasta C, cuando recorre 20 ft (véase la Figura 17) es necesario aplicar cinemática y cinética.

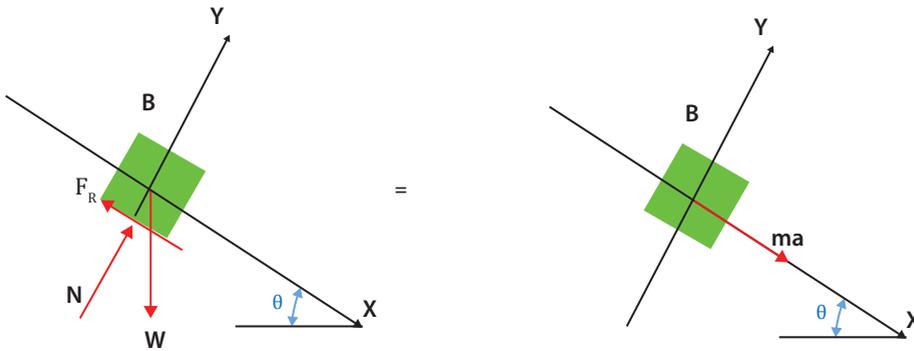
**Figura 17. Distancia recorrida por la partícula**



Fuente: elaboración propia.

Al usar la segunda ley de Newton a la Newton aplicada en la partícula, en una posición cualquiera en la trayectoria a describir (véase la Figura 18), se tiene:

**Figura 18. Segunda ley de Newton aplicada a la partícula**



Fuente: elaboración propia.

Si se utiliza la segunda ley de Newton a la partícula, a lo largo del eje tangencial, se tiene:

$$-\curvearrowright (\Sigma F) \text{ externas e internas} = (\Sigma F) \text{ inerciales}$$

$$- F_R + W \text{ Sen } \theta = m a$$

Al aplicar la segunda ley de Newton a la partícula, a lo largo del eje normal, se encuentra:

$$+\curvearrowleft (\Sigma F) \text{ externas e internas} = (\Sigma F) \text{ inerciales}$$

$$N - W \text{ Cos } \theta = 0$$

$$N = W \text{ Cos } \theta$$

La fuerza de fricción entre la partícula y la superficie es:

$$F_R = \mu N$$

Al sustituir la fuerza normal en la expresión de la fuerza de fricción, se tiene:

$$F_R = \mu W \cos \theta$$

Al reemplazar la fuerza de fricción en la expresión de la segunda ley de Newton a la partícula, a lo largo del eje tangencial, se halla:

$$-F_R + W \sin \theta = m a$$

$$-\mu W \cos \theta + W \sin \theta = m a$$

$$W (-\mu \cos 30^\circ + \sin 30^\circ) = \frac{W}{g} a$$

La aceleración de la partícula en el tramo AB es:

$$a = g (-\mu \cos 30^\circ + \sin 30^\circ)$$

$$a = 32.20 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} * \left( -0.20 * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$a = 10.52 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$$

La velocidad de la partícula en el punto C, es:

$$V_C^2 = V_B^2 + 2 a X$$

$$V_B^2 = \left( 8.27 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \right)^2 + 2 * 10.52 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} * 20 \text{ ft}$$

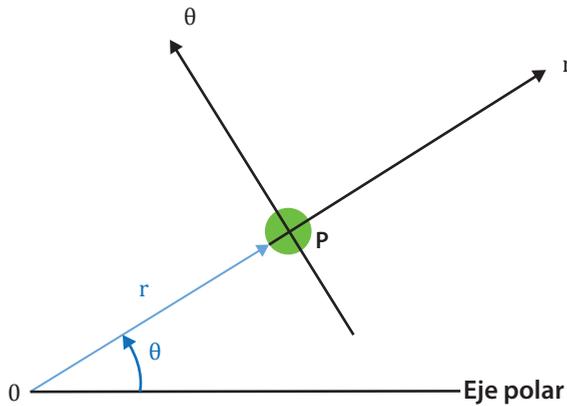
$$V_B = 22.12 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

## 2.3. Ecuación del movimiento coordenadas esféricas

Cuando una partícula se mueve sobre una trayectoria curvilínea conocida, es posible conocer la posición de una partícula P mediante coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ , que son conocidas como las componentes radial y transversal de la partícula.

Siendo P la partícula, el vector posición está dirigido a lo largo de la línea OP en la dirección al eje radial  $\vec{r}$  y la dirección angular  $\theta$  es medida en sentido contrario a las manecillas del reloj (véase la Figura 19).

**Figura 19. Ubicación partícula en coordenadas radial transversal**



Fuente: elaboración propia.

Considérese una partícula P, con coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ , que se mueve en un plano bajo la acción de varias fuerzas, al descomponer las fuerzas y la aceleración de la partícula en las componentes radial y transversal, se tiene:

$$\Sigma F_r = m a_r$$

$$\Sigma F_\theta = m a_\theta \quad \text{Ec. 11}$$

Al sustituir la componente radial  $a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$  y transversal  $a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}$  de la aceleración en la Ecuación 11, se tiene.

$$\Sigma F_r = m ( \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 )$$

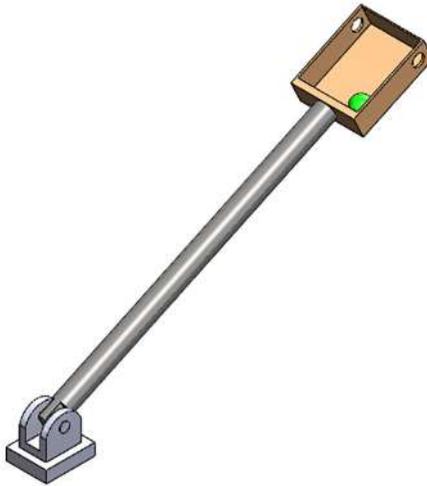
$$\Sigma F_\theta = m ( r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} ) \quad \text{Ec. 12}$$

La Ecuación 12 “es una ecuación diferencial no lineal para todas las funciones de fuerza, si las variables dependientes y sus derivadas están elevadas a potencias mayores que la unidad” (Shames, 2010, p. 536).

### 2.3.1. Problema caso 6

La caja se desliza por una barra que gira a una velocidad angular constante  $\dot{\theta}$ . Si la trayectoria de la caja está definida por  $r = 3 \text{ Sen}\theta + 5$  y  $Z = 3 \text{ cos}\theta$ , donde  $r$  y  $Z$  están en m (véase la Figura 20). Determine las componentes  $r$ ,  $\theta$  y  $Z$  de la fuerza ejercida por la caja a la esfera de 2 kg cuando la barra halla girado  $\theta=120^\circ$  con una velocidad angular de  $\dot{\theta}= 0.80 \text{ rad/s}$ .

Figura 20. Esquema general



Fuente: elaboración propia.

La posición de la partícula cuando  $\theta=120^\circ$ , es:

$$r = 3 \text{ Sen } 120^\circ + 5$$

$$r = 7.60 \text{ m}$$

Para encontrar la expresión de la componente radial de la velocidad de la partícula, es necesario obtener la razón de cambio de la posición angular respecto al tiempo.

$$r = 3 \text{ Sen } \theta + 5$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} (3 \text{ Sen } \theta + 5)$$

$$\frac{dr}{dt} = 3 \text{ Cos } \theta * \frac{d\theta}{dt}$$

Pero la variación de la posición angular respecto al tiempo es la velocidad angular de la barra.

$$\dot{r} = 3 \dot{\theta} \cos \theta$$

La componente radial de la velocidad de la partícula es:

$$\dot{r} = 3 * 0.80 \frac{\text{rad}}{\text{s}} * \cos 120^\circ$$

$$\dot{r} = - 1.20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La variación de la componente radial de la velocidad de la partícula respecto al tiempo es:

$$\dot{r} = 3 \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (3 \dot{\theta} \cos \theta)$$

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = 3 \left( \frac{d\dot{\theta}}{dt} * \cos \theta - \dot{\theta} * \text{Sen } \theta * \frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = 3 \left( \ddot{\theta} * \cos \theta - \dot{\theta} * \text{Sen } \theta * \dot{\theta} \right)$$

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = 3 \left( \ddot{\theta} * \cos \theta - \dot{\theta}^2 * \text{Sen } \theta \right)$$

$$\ddot{r} = 3 \left( \ddot{\theta} * \cos \theta - \dot{\theta}^2 * \text{Sen } \theta \right)$$

Como la velocidad angular de la barra es constante, su aceleración angular es nula.

$$\ddot{r} = 3 \left[ 0 * \cos 120^\circ - \left( 0.80 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 * \text{Sen } 120^\circ \right]$$

$$\ddot{r} = - 1.60 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La componente radial de la aceleración de la partícula es:

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$$

$$a_r = -1.60 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 7.60 \text{ m} * \left( 0.80 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2$$

$$a_r = -6.53 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La componente transversal de la aceleración de la partícula es:

$$a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}$$

$$a_\theta = 7.60 \text{ m} * 0 + 2 * \left( -1.20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \left( 0.80 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

$$a_\theta = -1.92 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Para encontrar la expresión de la componente de la velocidad de la partícula en la dirección Z, es necesario obtener la razón de cambio de la posición a lo largo del eje Z respecto al tiempo.

$$Z = 3 \cos \theta$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{d}{dt} (3 \cos \theta)$$

$$\frac{dZ}{dt} = 3 * \left( -\text{Sen } \theta * \frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$\frac{dZ}{dt} = 3 * \left( -\text{Sen } \theta * \dot{\theta} \right)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -3 \dot{\theta} \text{ Sen } \theta$$

$$\dot{Z} = -3 \dot{\theta} \text{ Sen } \theta$$

Para encontrar la expresión de la aceleración de la partícula en la dirección Z, es necesario obtener la razón de cambio de la velocidad a lo largo del eje Z respecto al tiempo.

$$\frac{d\dot{Z}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -3 \dot{\theta} \text{ Sen } \theta \right)$$

$$\frac{d\dot{Z}}{dt} = -3 \left( \frac{d\dot{\theta}}{dt} * \text{Sen } \theta + \dot{\theta} * \text{Cos } \theta * \frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$\frac{d\dot{Z}}{dt} = -3 \left( \ddot{\theta} * \text{Sen } \theta + \dot{\theta} * \text{Cos } \theta * \dot{\theta} \right)$$

$$\frac{d\dot{Z}}{dt} = -3 \left( \ddot{\theta} * \text{Sen } \theta + \dot{\theta}^2 * \text{Cos } \theta \right)$$

$$\ddot{Z} = -3 \left( \ddot{\theta} * \text{Sen } \theta + \dot{\theta}^2 * \text{Cos } \theta \right)$$

La componente de la aceleración de la partícula en la dirección Z, es:

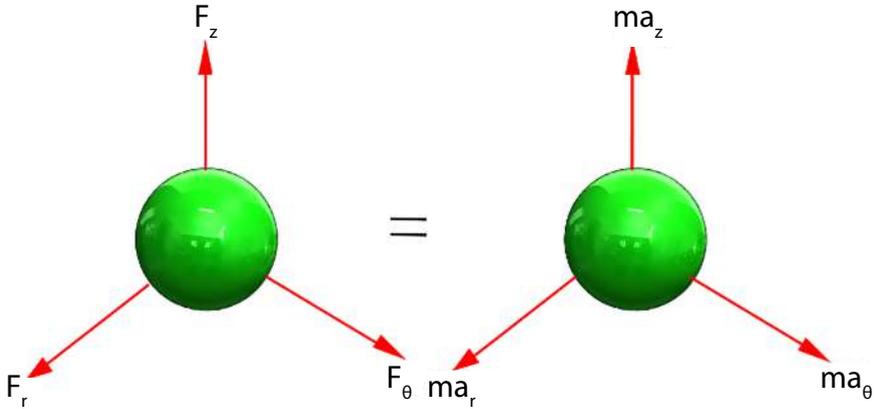
$$a_z = \ddot{Z}$$

$$a_z = -3 \left( \ddot{\theta} * \text{Sen } \theta + \dot{\theta}^2 * \text{Cos } \theta \right)$$

$$a_z = -3 \left[ 0 * \text{Sen } 120^\circ + \left( 0.80 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 * \text{Cos } 120^\circ \right]$$

$$a_z = 0.96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Se aplica la segunda ley de Newton a la esfera (véase la Figura 21).

**Figura 21. Segunda ley de Newton aplicada a la esfera**

Fuente: elaboración propia.

La fuerza radial ejercida por la caja a la esfera es:

$$F_r = m a_r$$

$$F_r = 2 \text{ kg} * \left( - 6.53 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$F_r = - 13.10 \text{ N}$$

La fuerza transversal ejercida por la caja en la esfera es:

$$F_\theta = m a_\theta$$

$$F_\theta = 2 \text{ kg} * \left( - 1.92 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$F_\theta = - 3.84 \text{ N}$$

La fuerza en el eje Z ejercida por la caja en la esfera es:

$$F_z - W = m a_z$$

$$F_z = 2 \text{ kg} * \left( - 1.92 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 2 \text{ kg} * \left( 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$F_z = 21.50 \text{ N}$$

## 2.4. Movimiento relativo de partículas por medio de ejes de traslación

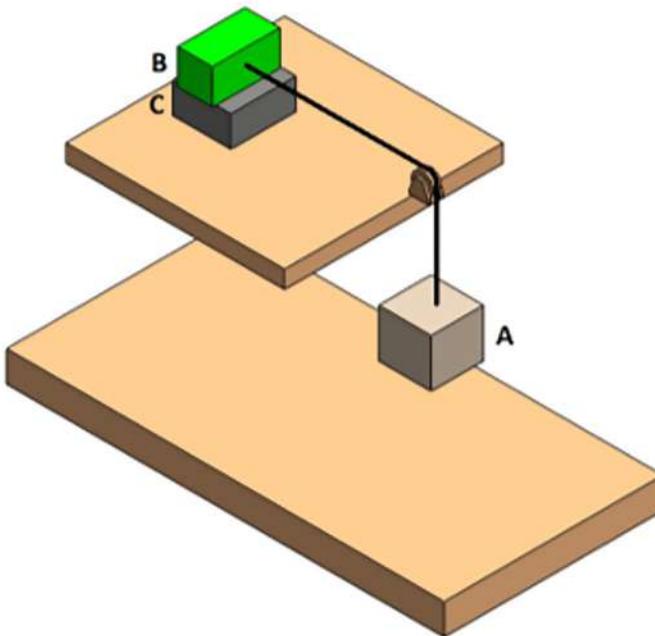
Existen situaciones en las que es conveniente utilizar, de manera simultánea, varios sistemas de referencia “si uno de ellos está unido a la tierra, se denominará sistema de referencia fijo, y los otros sistemas de referencia en movimiento” (Beer, 2010, p. 647).

### 2.4.1. Problema caso 7

Un bloque B descansa sobre el bloque C. El bloque B está unido por una cuerda que pasa por una polea de masa despreciable y sin fricción y une al bloque A (véase la Figura 22). Las partículas parten del reposo y tienen masa  $m$ . El coeficiente de rozamiento entre el bloque B y C es  $\mu_1$  y entre el plano horizontal y el bloque C es  $\mu_2$ .

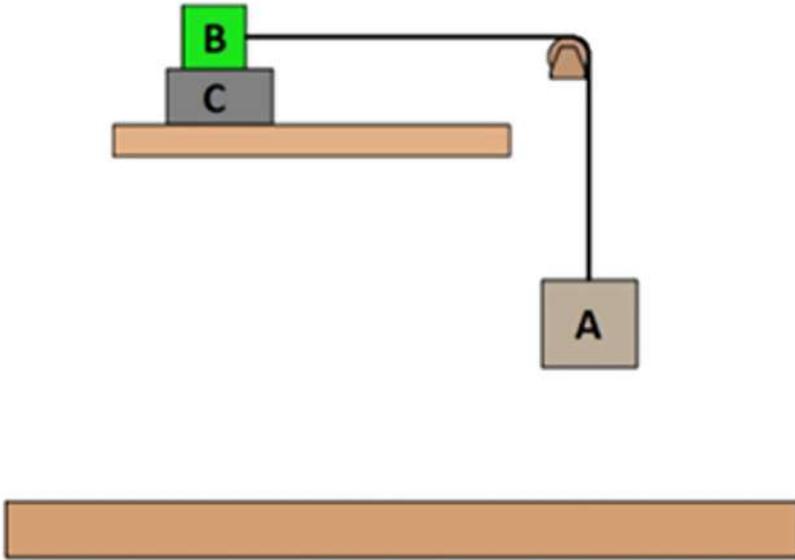
Hallar la expresión para el desplazamiento del bloque C cuando el desplazamiento relativo entre el bloque B y C es de  $S_{B/C}$

Figura 22. Perspectiva del sistema



Fuente: elaboración propia.

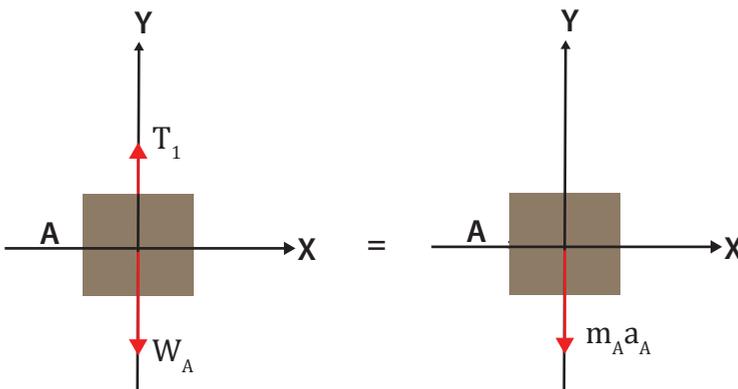
La trayectoria del movimiento de los bloques puede verse en la Figura 23.

**Figura 23. Trayectoria de los bloques**

Fuente: elaboración propia.

Para obtener la distancia recorrida por el bloque C, es necesario determinar las aceleración de los bloques y el tiempo gastado.

Aplicando la segunda ley de Newton al bloque A (véase la Figura 24).

**Figura 24. Segunda ley de Newton aplicada al bloque A**

Fuente: elaboración propia.

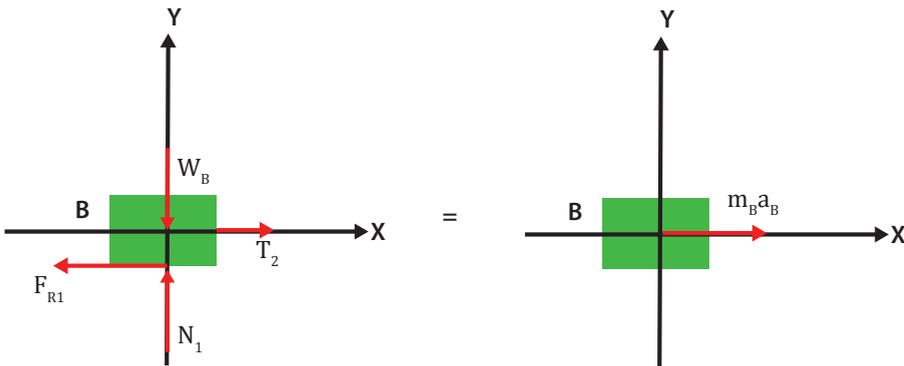
Al utilizar la segunda ley de Newton al bloque A a lo largo del eje tangencial, se tiene:

$$+\uparrow(\Sigma F) \text{ externas e internas} = (\Sigma F) \text{ inerciales}$$

$$T_1 - W_A = - m_A a_A$$

Si se usa la segunda ley de Newton al bloque B (véase la Figura 25), se tiene:

**Figura 25. Segunda ley de Newton aplicada al bloque B**



Fuente: elaboración propia.

Utilizando la segunda ley de Newton al bloque B a lo largo del eje normal, se encuentra:

$$+\uparrow(\Sigma F) \text{ externas e internas} = (\Sigma F) \text{ inerciales}$$

$$N_1 - W_B = 0$$

$$N_1 = W_B$$

Aplicando la segunda ley de Newton al bloque B a lo largo del eje tangencial, se logra:

$$+\rightarrow(\Sigma F) \text{ externas e internas} = (\Sigma F) \text{ inerciales}$$

$$T_2 - F_{R1} = m_B a_B$$

Como no hay fricción entre la cuerda y la polea, la tensión en los bloques A y B es la misma, por lo que  $T_1 = T_2 = T$ . Además, como el cable es inextensible y las partículas A y B están unidas por el mismo cable, las aceleraciones de las partículas y son las mismas, por lo que  $a_A = a_B = a$ .

Se supe en la expresión obtenida al aplicar la segunda ley de Newton al bloque A a lo largo del eje tangencial, encontrando:

$$T_1 = T_2 = T$$

$$a_A = a_B = a$$

$$T_1 - W_A = -m_A a_A$$

$$T - W_A = -m_A a$$

Al sustituir en la expresión obtenida al aplicar la segunda ley de Newton al bloque B, a lo largo del eje tangencial, se halla:

$$T_2 - F_{R_1} = m_B a_B$$

$$T - F_{R_1} = m_B a$$

Para eliminar la tensión en el cable a la expresión obtenida al aplicar la segunda ley de Newton al bloque B, a lo largo del eje tangencial, se le resta la expresión obtenida al aplicar la segunda ley de Newton al bloque A a lo largo del eje tangencial, encontrando:

$$W_A - F_{R_1} = m_B a + m_A a$$

La fuerza de fricción entre los bloques B y C es:

$$F_{R_1} = \mu_1 N_1$$

Al suplir la expresión obtenida al aplicar la segunda ley de Newton al bloque B, a lo largo del eje normal, en la fuerza de fricción, se tiene:

$$N_1 = W_B$$

$$F_{R_1} = \mu_1 W_B$$

$$F_{R_1} = \mu_1 m_B g$$

$$F_{R_1} = \mu_1 m g$$

Sustituyendo la fuerza de fricción en la expresión obtenida de aplicar la segunda ley de Newton, se logra:

$$W_A - F_{R1} = m_B a + m_A a$$

$$m g - \mu_1 m g = m a + m a$$

$$m g - \mu_1 m g = 2 m a$$

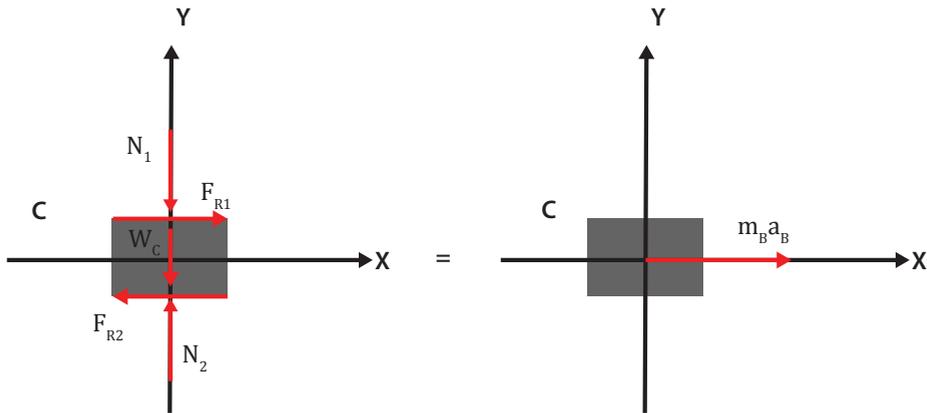
La aceleración de las partículas A y B es:

$$a = \frac{m g (1 - \mu_1)}{2 m}$$

$$a = \frac{g (1 - \mu_1)}{2}$$

Al aplicar la segunda ley de Newton al bloque C (véase la Figura 26).

**Figura 26. Segunda ley de Newton aplicada al bloque C**



Fuente: elaboración propia.

Al usar la segunda ley de Newton en el bloque C, a lo largo del eje tangencial, se encuentra:

$$+ \rightarrow (\Sigma F)_{\text{externas e internas}} = (\Sigma F)_{\text{inerciales}}$$

$$F_{R1} - F_{R2} = m_C a_C$$

Si se aplica la segunda ley de Newton al bloque C, a lo largo del eje normal, se halla:

$$+\uparrow(\Sigma F)_{\text{externas e internas}} = (\Sigma F)_{\text{inerciales}}$$

$$-N_1 + N_2 - W_C = 0$$

La fuerza normal que le ejerce la superficie al bloque C es:

$$N_2 = N_1 + W_C$$

Reemplazando la expresión obtenida al aplicar la segunda ley de Newton al bloque B, a lo largo del eje normal, en la expresión obtenida al aplicar la segunda ley de Newton al bloque C a lo largo del eje normal, se tiene:

$$N_1 = W_B$$

$$N_2 = N_1 + W_C$$

$$N_2 = W_B + W_C$$

$$N_2 = m_B g + m_C g$$

$$N_2 = m g + m g$$

$$N_2 = 2 m g$$

Al sustituir la fuerza normal que le ejerce la superficie al bloque C, en la expresión encontrada al aplicar la segunda ley de Newton al bloque C a lo largo del eje tangencial, se logra:

$$F_{R1} - F_{R2} = m_C a_C$$

$$\mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = m_C a_C$$

$$\mu_1 m g - \mu_2 * 2 m g = m a_C$$

$$\mu_1 m g - 2 \mu_2 m g = m a_C$$

$$m g (\mu_1 - 2 \mu_2) = m a_C$$

La aceleración del bloque C es:

$$a_C = \frac{m g (\mu_1 - 2 \mu_2)}{m}$$

$$a_C = g (\mu_1 - 2 \mu_2)$$

Al usar cinemática al bloque C, la distancia recorrida por el bloque C es:

$$S_C = S_{0C} + V_{0C} t + \frac{1}{2} a_C t^2$$

Como las partículas parten del reposo  $V_{0C} = 0$  y, ubicando los ejes de referencia en el inicio del movimiento para el bloque, la distancia inicial recorrida por esta es nula  $S_{0C} = 0$ .

$$S_C = 0 + 0 * t + \frac{1}{2} a_C t^2$$

$$S_C = \frac{1}{2} a_C t^2$$

Para obtener la distancia recorrida por el bloque C es necesario determinar el tiempo, para lo que se utiliza la distancia relativa entre la partícula B y C es  $S_{B/C}$ .

La distancia relativa entre la partícula B y C es:

$$S_{B/C} = (S_0)_{B/C} + (V_0)_{B/C} t + \frac{1}{2} a_{B/C} t^2$$

Al ubicar los ejes de referencia en el inicio del movimiento para los bloques, la distancia inicial recorrida por el bloque B respecto al bloque C, es:

$$(S_0)_{B/C} = S_{0B} - S_{0C}$$

$$(S_0)_{B/C} = 0$$

Como los bloques parten del reposo, la velocidad inicial del bloque B respecto al bloque C, es:

$$(V_0)_{B/C} = V_{0B} - V_{0C}$$

$$(V_0)_{B/C} = 0$$

La aceleración relativa del bloque B respecto al bloque C, es:

$$a_{B/C} = a_B - a_C$$

Si se reemplaza la aceleración de los bloques B y C se encuentra:

$$a_B = \frac{g(1 - \mu_1)}{2}$$

$$a_C = g(\mu_1 - 2\mu_2)$$

$$a_{B/C} = a_B - a_C$$

$$a_{B/C} = \frac{g(1 - \mu_1)}{2} - g(\mu_1 - 2\mu_2)$$

Si se suple la distancia inicial recorrida por el bloque B respecto al bloque C, la velocidad inicial del bloque B respecto al bloque C, la aceleración relativa del bloque B respecto al bloque C y la distancia relativa entre la partícula B y C, se encuentra el tiempo gastado.

$$(S_0)_{B/C} = 0$$

$$(V_0)_{B/C} = 0$$

$$a_{B/C} = \frac{g(1 - \mu_1)}{2} - g(\mu_1 - 2\mu_2)$$

$$S_{B/C} = (S_0)_{B/C} + (V_0)_{B/C} t + \frac{1}{2} a_{B/C} t^2$$

$$S_{B/C} = 0 + 0 * t + \frac{1}{2} \left[ \frac{g(1 - \mu_1)}{2} - g(\mu_1 - 2\mu_2) \right] t^2$$

$$S_{B/C} = \frac{1}{2} \left[ \frac{g(1 - \mu_1)}{2} - g(\mu_1 - 2\mu_2) \right] t^2$$

$$t^2 = \frac{S_{B/C}}{\frac{1}{2} \left[ \frac{g(1 - \mu_1)}{2} - g(\mu_1 - 2\mu_2) \right]}$$

$$t^2 = \frac{S_{B/C}}{\frac{g(1 - \mu_1)}{4} - \frac{g(\mu_1 - 2\mu_2)}{2}}$$

$$t^2 = \frac{S_{B/C}}{\frac{g(1 - \mu_1) - 2g(\mu_1 - 2\mu_2)}{4}}$$

$$t^2 = \frac{4 S_{B/C}}{g(1 - \mu_1) - 2g(\mu_1 - 2\mu_2)}$$

$$t = \sqrt{\frac{4 S_{B/C}}{g(1 - \mu_1) - 2g(\mu_1 - 2\mu_2)}}$$

Al cambiar la aceleración del bloque C y el tiempo gastado, la distancia recorrida por el bloque C es:

$$a_C = g (\mu_1 - 2 \mu_2)$$

$$t = \sqrt{\frac{4 S_{B/C}}{g (1 - \mu_1) - 2 g (\mu_1 - 2 \mu_2)}}$$

$$S_C = \frac{1}{2} a_C t^2$$

$$S_C = \frac{1}{2} * [g (\mu_1 - 2 \mu_2)] * \sqrt{\frac{4 S_{B/C}}{g (1 - \mu_1) - 2 g (\mu_1 - 2 \mu_2)}}$$



## CAPÍTULO 3

# CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA: TRABAJO Y ENERGÍA

“El principio de trabajo y energía es el cambio de la energía cinética de la partícula y es igual al trabajo realizado por la partícula” (Gray y Costanzo, 2010, p. 262).

### 3.1. Fuerzas conservativas

Para el principio de trabajo y energía se tiene la ecuación:

$$U_{1-2} = T_2 - T_1 \quad \text{Ec. 13}$$

$U_{1-2}$  es el trabajo de una fuerza cualquiera.

“El principio de trabajo y energía permite determinar el cambio en la magnitud de la velocidad de un objeto a medida que se mueve de una posición a otra” (Bedford, 1996, p. 141).

El trabajo efectuado por las fuerzas en un sistema conservativo es:

$$U_{1-2} = -\Delta V = -(V_2 - V_1)$$

$$U_{1-2} = \Delta T = (T_2 - T_1)$$

Al igualar estas dos ecuaciones, se encuentra la expresión de conservación de la energía.

$$-(V_2 - V_1) = (T_2 - T_1)$$

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

La expresión es válida solo para fuerzas conservativas. Ordenando los términos de la ecuación, se logra:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \text{Ec. 14}$$

La energía potencial se puede presentar de dos clases: las gravitacionales y las elásticas. La expresión para la energía potencial gravitacional es:

$$V_g = m g h \quad \text{Ec. 15}$$

Donde es la masa,  $g$  es la gravedad y  $h$  es la diferencia de altura.

La expresión para la energía potencial elástica es:

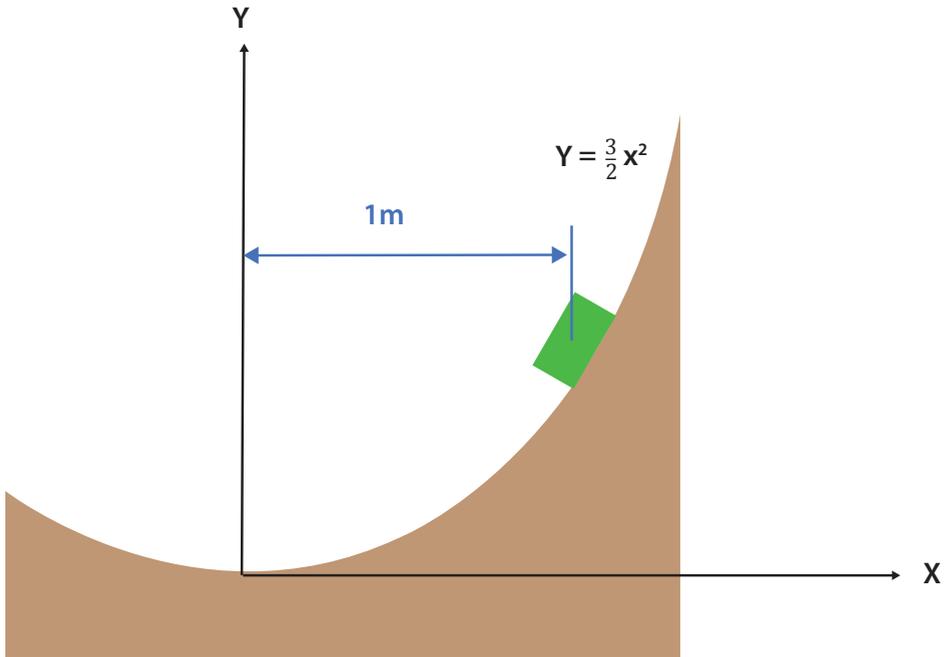
$$V_e = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{Ec. 16}$$

Donde es la constante del resorte y  $X$  es la deformación del mismo.

### **3.1.1. Problema caso 8**

Una partícula de masa  $m$  se desliza por la trayectoria curvilínea y parte del reposo en la posición mostrada (véase la Figura 27). Determinar la fuerza normal que le ejerce la superficie lisa a la partícula en la posición más baja de la trayectoria y la altura  $H$  a la que llegará la partícula en la superficie curvilínea en el momento de detenerse.

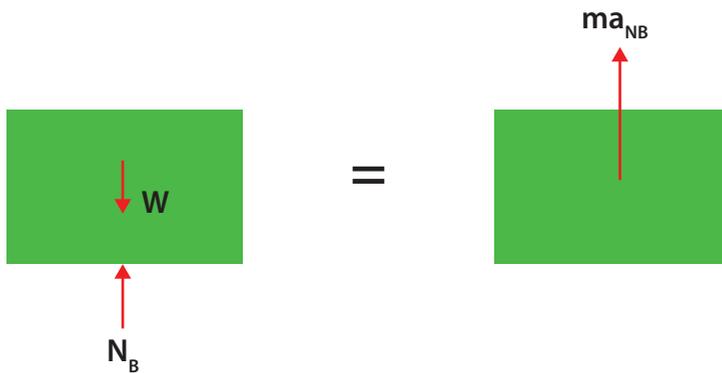
Figura 27. Trayectoria de la partícula



Fuente: elaboración propia.

Para determinar la fuerza que le ejerce la superficie a la partícula en el punto más bajo de la trayectoria circular, se requiere aplicar la segunda ley de Newton a la partícula (véase Figura 28).

Figura 28. Segunda ley de Newton aplicada a la partícula



Fuente: elaboración propia.

Al aplicar la segunda ley de Newton a la partícula en el punto más bajo de la trayectoria, se tiene:

$$+\uparrow(\Sigma F)_{\text{externas e internas}} = (\Sigma F)_{\text{inerciales}}$$

$$N_B - W = m a_{N_B}$$

La expresión de la fuerza normal que le ejerce la superficie a la partícula en el punto más bajo de la trayectoria es:

$$N_B = m a_{N_B} + W$$

$$N_B = m a_{N_B} + m g$$

$$N_B = m (a_{N_B} + g)$$

La expresión de la aceleración normal de la partícula en el punto B es:

$$a_{N_B} = \frac{V_B^2}{\rho_B}$$

Para encontrar la rapidez de la partícula en el punto más bajo de la trayectoria, se utiliza el principio de conservación de energía y para el radio de curvatura de la trayectoria de la partícula en el punto más bajo de la trayectoria, se utiliza la expresión:

$$\rho_B = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dY}{dX} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{d^2Y}{dX^2} \right|}$$

La ecuación de la trayectoria de la partícula es:

$$Y = \frac{3}{2} X^2$$

La expresión primera variación de la variable Y respecto a la variable X es:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{d}{dX} \left( \frac{3}{2} X^2 \right)$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3}{2} * 2 X$$

$$\frac{dY}{dX} = 3 X$$

En el punto B, en la trayectoria que describe la partícula, las coordenadas cartesianas son (0,0), por lo que la primera variación de la variable Y respecto a la variable X es:

$$\frac{dY}{dX} = 3 * 0$$

$$\frac{dY}{dX} = 0$$

La expresión de la segunda variación de la variable Y respecto a la variable X es:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{d}{dX} (3 X)$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 3$$

La segunda variación de la variable Y respecto a la variable X es:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 3$$

Al sustituir la primera y segunda variación de la variable Y, respecto a la variable X en la expresión del radio de curvatura, se logra:

$$\frac{dY}{dX} = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 3$$

$$\rho_B = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dY}{dX} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{d^2Y}{dX^2} \right|}$$

$$\rho_B = \frac{[ 1 + (0)^2 ]^{\frac{3}{2}}}{| 3 |}$$

$$\rho_B = \frac{1}{3} \text{ m}$$

Para encontrar la rapidez de la partícula en el punto más bajo de la trayectoria se utiliza el principio de conservación de energía, ya que no existe fricción entre la partícula y la superficie.

Al usar el principio de conservación de energía en la partícula a la posición A, en el instante en que la partícula parte del reposo y a la posición cuando pasa por el punto más bajo de la trayectoria, se encuentra:

$$E_A = E_B$$

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$

La energía cinética de la partícula en la posición A es nula, ya que en esta posición la partícula parte desde el reposo.

$$T_A = \frac{1}{2} m V_A^2$$

$$T_A = 0$$

La energía cinética de la partícula en la posición B, cuando la partícula pasa por el punto más bajo de la trayectoria es:

$$T_B = \frac{1}{2} m V_B^2$$

Para obtener la energía potencial gravitacional de la partícula A en el punto se requiere obtener la ordenada del punto A, para lo que se reemplaza la abscisa del punto A en la ecuación de la trayectoria de la partícula.

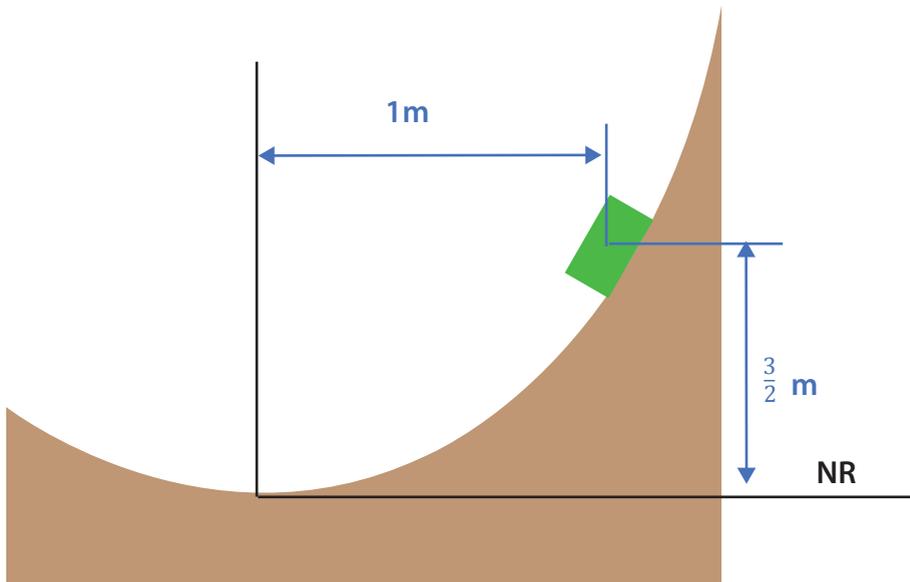
$$Y = \frac{3}{2} X^2$$

$$Y = \frac{3}{2} * 1^2$$

$$Y = \frac{3}{2} \text{ m}$$

Para determinar la energía potencial de la partícula en las posiciones y es necesario ubicar el nivel de referencia. En este caso se ubica en el punto más bajo de la trayectoria (véase la Figura 29).

**Figura 29. Ubicación nivel de referencia**



Fuente: elaboración propia.

La expresión de la energía potencial gravitacional de la partícula en la posición A es:

$$V_A = m g h_A$$

La expresión de la energía potencial gravitacional de la partícula en la posición B es:

$$V_B = m g h_B$$

Teniendo en cuenta que el nivel de referencia se ubicó en la parte más baja de la trayectoria, la distancia vertical desde el nivel de referencia a la posición A y B son respectivamente:

$$h_A = \frac{3}{2} m$$

$$h_B = 0$$

La energía potencial gravitacional de la partícula en la posición A es:

$$V_A = m g h_A$$

$$V_A = m g * \frac{3}{2}$$

$$V_A = \frac{3}{2} m g$$

La energía potencial gravitacional de la partícula en la posición B es:

$$V_B = m g h_B$$

$$V_B = m g * 0$$

$$V_B = 0$$

Al suplir en la ecuación de conservación de energía la energía cinética y potencial gravitacional de la partícula en las posiciones, se halla:

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$

$$0 + \frac{3}{2} m g = \frac{1}{2} m V_B^2 + 0$$

Por lo que la velocidad de la partícula en el punto más bajo de la trayectoria es:

$$V_B^2 = \frac{3}{2} m g * \frac{2}{m}$$

$$V_B = \sqrt{3 g}$$

Si se sustituye la rapidez de la partícula y el radio de curvatura de la trayectoria de la partícula en el punto más bajo de la trayectoria en la expresión de la aceleración normal de la partícula en el punto B es:

$$a_{N_B} = \frac{V_B^2}{\rho_B}$$

$$a_{N_B} = \frac{(\sqrt{3 g})^2}{\frac{1}{3}}$$

$$a_{N_B} = 3 * 3 g$$

$$a_{N_B} = 9 g$$

Se sustituye la aceleración normal de la partícula en el punto B, en la expresión de la fuerza normal que le ejerce la superficie a la partícula en el punto más bajo de la trayectoria, se obtiene:

$$N_B = m (a_{N_B} + g)$$

$$N_B = m (9 g + g)$$

$$N_B = 10 m g$$

$$N_B = 10 W$$

Para encontrar la altura a la que llegará la partícula en la superficie curvilínea en el momento de detenerse, se utiliza el principio de conservación de energía, ya que no existe fricción entre la partícula y la superficie.

Al aplicar el principio de conservación de energía a la partícula en la posición B, cuando la partícula pasa por el punto más bajo de la trayectoria y a la posición C, cuando la partícula llega al reposo, se logra:

$$E_B = E_C$$

$$T_B + V_B = T_C + V_C$$

Si se sustituye la velocidad de la partícula en el punto más bajo de la trayectoria, en la expresión de la energía cinética de la partícula en la posición B, se tiene:

$$T_B = \frac{1}{2} m V_B^2$$

$$V_B = \sqrt{3g}$$

$$T_B = \frac{1}{2} m (\sqrt{3g})^2$$

La energía cinética de la partícula en la posición B, cuando la partícula pasa por el punto más bajo de la trayectoria es:

$$T_B = \frac{3}{2} m g$$

La energía cinética de la partícula en la posición C es nula ya que, en esta posición, la partícula llega al reposo.

$$T_C = \frac{1}{2} m V_C^2$$

$$T_C = 0$$

Para determinar la energía potencial de la partícula en las posiciones B y C es necesario ubicar el nivel de referencia. En este caso se ubica en el punto más bajo de la trayectoria, por lo que la distancia vertical desde el nivel de referencia a la posición B y C son respectivamente:

$$H_A = 0$$

$$h_B = H$$

La expresión de la energía potencial gravitacional de la partícula en la posición B es:

$$V_B = m g h_B$$

$$V_B = m g * 0$$

$$V_B = 0$$

La expresión de la energía potencial gravitacional de la partícula en la posición C es:

$$V_C = m g h_C$$

$$V_C = m g H$$

Al suplir en la ecuación de conservación de energía, la energía cinética y potencial gravitacional de la partícula en las posiciones, se encuentra:

$$T_B + V_B = T_C + V_C$$

$$\frac{3}{2} m g + 0 = 0 + m g H$$

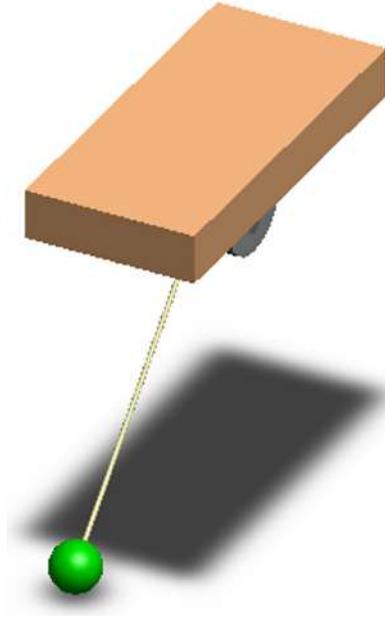
$$H = \frac{3}{2} m g * \frac{1}{m g}$$

Por lo que la altura a la que llegara la partícula en la superficie curvilínea cuando llega al reposo es:

$$H = \frac{3}{2} m$$

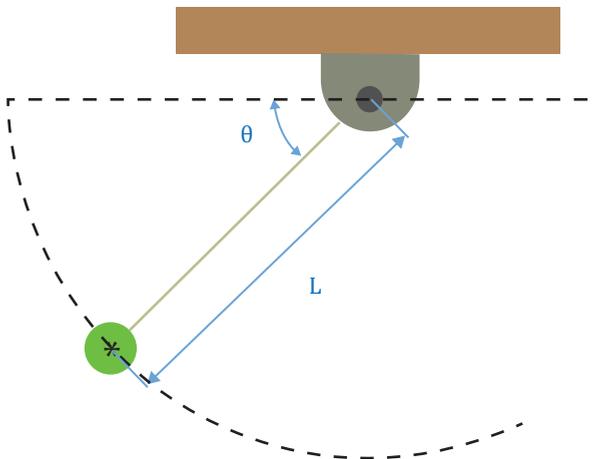
### 3.1.2. Problema caso 9

Una partícula de masa está atada a una cuerda de longitud  $L$  (vease la Figura 30). Si la partícula parte del reposo en  $\theta=0^\circ$ , Hallar el valor del ángulo  $\theta$  para que la cuerda se romperá, si la tensión máxima no debe ser mayor de  $3/2$  del peso de la partícula.

**Figura 30. Esquema general**

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 31 se observa la trayectoria de la partícula.

**Figura 31. Trayectoria de la partícula**

Fuente: elaboración propia.

Como no se considerará el efecto de la fricción del aire en contacto con la partícula, sobre la esta solo existen fuerzas conservativas. Aplicando el principio

de conservación de energía entre el inicio del movimiento de la partícula, el punto 0 y un momento antes de que el cable se rompa, el punto 1.

$$E_0 = E_1$$

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

La energía cinética de la partícula en la posición 0 es nula, ya que parte del reposo.

$$T_0 = \frac{1}{2} m V_1^2$$

$$T_0 = \frac{1}{2} m * 0^2$$

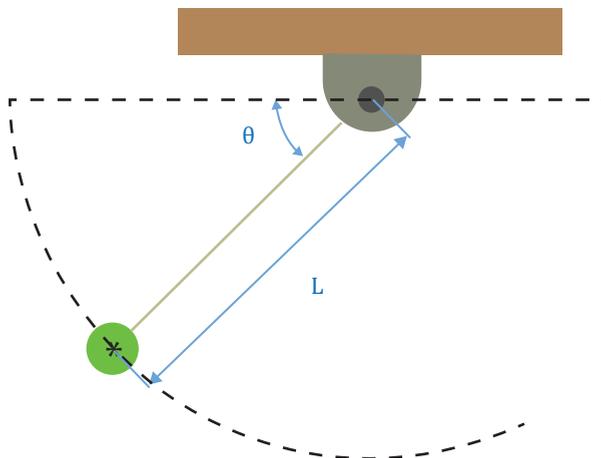
$$T_0 = 0$$

La energía potencial gravitacional de la partícula en la posición 0 se determina ubicando el nivel de referencia, el cual se hace pasar por este punto (véase Figura 32), por lo que:

$$h_0 = 0$$

$$h_1 = -L \text{ Sen } \theta$$

**Figura 32. Ubicación nivel de referencia**



Fuente: elaboración propia.

La energía potencial gravitacional de la partícula en la posición 0 es

$$V_0 = m g h_0$$

$$V_0 = m g * 0$$

$$V_0 = 0$$

La energía cinética de la partícula en la posición 1, un momento antes de que se rompa el cable es:

$$T_1 = \frac{1}{2} m V_1^2$$

La energía potencial gravitacional de la partícula en la posición 1, un momento antes de que se rompa el cable, es:

$$V_1 = m g h_1$$

$$V_1 = -m g L \text{Sen } \theta$$

Sustituyendo en la ecuación de la conservación de la energía, se tiene:

$$0 + 0 = \frac{1}{2} m V_1^2 - m g L \text{Sen } \theta$$

La velocidad de la partícula en el punto 1, un momento antes de que se rompa el cable, es:

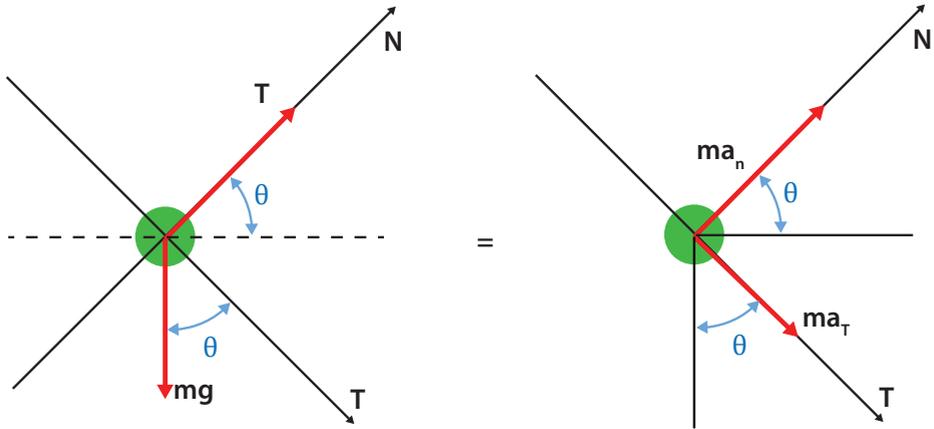
$$\frac{1}{2} m V_1^2 = m g L \text{Sen } \theta$$

$$V_1^2 = \frac{2 m g L \text{Sen } \theta}{m}$$

$$V_1^2 = 2 g L \text{Sen } \theta$$

Al usar la segunda ley de Newton en la partícula, en una posición cualquiera antes de que se rompa la cuerda (véase la Figura 33).

Figura 33. Segunda ley de Newton aplicada a la partícula



Fuente: elaboración propia.

Al aplicar la segunda ley de Newton a la partícula a lo largo del eje normal, se obtiene:

$$+\nearrow (\Sigma F) \text{ externas e internas} = (\Sigma F) \text{ inerciales}$$

$$T - W \text{ Sen } \theta = m a_N$$

$$T - m g \text{ Sen } \theta = m a_N$$

La aceleración normal de la partícula en el punto 1, un momento antes de que se rompa el cable, es:

$$a_{N_1} = \frac{V_1^2}{L}$$

Sustituyendo en la expresión de la aceleración normal, pero para el punto 1 un momento antes de que se rompa el cable es, se halla:

$$T - m g \text{ Sen } \theta = m a_{N_1}$$

$$T - m g \text{ Sen } \theta = m \frac{V_1^2}{L}$$

Al cambiar la velocidad de la partícula en el punto 1, se encuentra:

$$T - W \text{ Sen } \theta = m * \frac{2 g L \text{ Sen } \theta}{L}$$

Al reemplazar la tension maxima de  $3/2$  del peso de la partícula, en la posición en la que la cuerda se romperá, la posicion angular para dicha posicion es:

$$T = \frac{3}{2} W$$

$$T = \frac{3}{2} m g$$

$$\frac{3}{2} m g - m g \text{ Sen } \theta = m * \frac{2 g L \text{ Sen } \theta}{L}$$

Dividiendo la expresión en el peso de la partícula, se encuentra:

$$\frac{3}{2} - \text{Sen } \theta = 2 \text{ Sen } \theta$$

$$3 \text{ Sen } \theta = \frac{3}{2}$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{3}{2 * 3}$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 30^0$$

### 3.2. Potencia y eficiencia

“Si se realiza un trabajo  $\Delta W$  en un intervalo  $\Delta t$ , el trabajo medio efectuado por unidad de tiempo o potencia media” (Zemansky, 2010, p. 199), se define como:

$$P = \frac{dU}{dt}$$

$$P = F V \quad \text{Ec. 17}$$

Donde  $V$  es la velocidad del punto de aplicación de la fuerza  $F$ .

### 3.2.1. Problema caso 10

El conjunto locomotora y vagones pesa 6.000 ton. La locomotora parte desde el reposo y desarrolla una potencia de 8.000 hp y una resistencia a la rodadura de 20 % del peso del conjunto. Hallar la velocidad máxima desarrollada y la expresión del tiempo para que la locomotora adquiera una velocidad  $V$ .

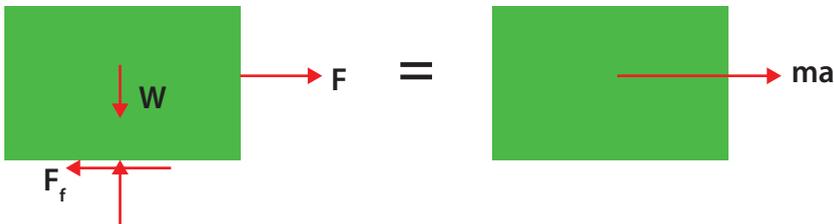
La fuerza de rozamiento entre el conjunto locomotora y vagones y el riel es:

$$F_f = \frac{20}{100} * 6\,000 \text{ ton}$$

$$F_f = 1\,200 \text{ ton}$$

Si se utiliza la segunda ley de Newton al conjunto locomotora y vagones, en una posición cualquiera (véase la Figura 34).

**Figura 34. Segunda ley de Newton aplicada al conjunto locomotora y vagones**



Fuente: elaboración propia.

Al aplicar la segunda ley de Newton al conjunto locomotora vagones a lo largo del eje tangencial, se tiene:

$$+ \rightarrow (\Sigma F)_{\text{externas e internas}} = (\Sigma F)_{\text{inerciales}}$$

$$F - F_f = m a$$

Al sustituir la fuerza de rozamiento entre el conjunto locomotora y vagones y el riel, se encuentra:

$$F - 1\,200 \text{ ton} = \frac{6\,000 \text{ ton}}{g} * \frac{2\,000 \text{ lb}}{1 \text{ ton}} * a$$

Si se expresa la aceleración del conjunto locomotora y vagones como la variación de la rapidez respecto al tiempo:

$$a = \frac{dV}{dt}$$

$$F - 1\,200 \text{ ton} = \frac{6\,000 \text{ ton}}{g} * \frac{2\,000 \text{ lb}}{1 \text{ ton}} * \frac{dV}{dt}$$

La potencia de la locomotora y vagones es:

$$P = F V$$

Se despeja la fuerza de la locomotora y vagones, reemplazando la potencia que desarrolla el sistema, se obtiene:

$$F = \frac{P}{V}$$

$$F = 8\,000 \text{ hp} * \frac{550 \frac{\text{Lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}}}{1 \text{ hp}} * \frac{1}{V}$$

$$F = \frac{4\,400.000}{V} \text{ Lb}$$

Al cambiar la fuerza de la locomotora y vagones en la ecuación de la segunda ley de Newton, se halla:

$$F - 1\,200 \text{ ton} = \frac{6\,000 \text{ ton}}{g} * \frac{2\,000 \text{ lb}}{1 \text{ ton}} * \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{4\,400.000}{V} - 1\,200 = \frac{1.20 \times 10^7}{g} * \frac{dV}{dt}$$

Para encontrar la velocidad máxima se obtiene la variación de la rapidez respecto al tiempo y se iguala a cero  $\frac{dV}{dt} = 0$  para encontrar los puntos críticos.

$$\frac{4\,400.000}{V_{\max}} - 1\,200 = \frac{1.20 \times 10^7}{g} * 0$$

$$\frac{4\,400.000}{V_{\max}} - 1\,200 = 0$$

$$V_{\max} = \frac{4\,400.000}{1\,200}$$

$$V_{\max} = 3\,666.67 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

Para determinar la expresión del tiempo transcurrido en adquirir el conjunto la velocidad  $V$  es necesario que de la ecuación de la segunda ley de Newton se despeje la variable tiempo, encontrando:

$$\frac{4\,400.000}{V} - 1\,200 = \frac{1.20 \times 10^7}{g} * \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{4\,400.000 - 1\,200 V}{V} = \frac{1.20 \times 10^7}{g} * \frac{dV}{dt}$$

$$dt = \frac{1.20 \times 10^7}{g (4\,400.000 - 1\,200 V)} * V dV$$

Al integrar, se tiene:

$$\int_{t_0}^t dt = \int_{V_0}^V \frac{1.20 \times 10^7}{g (4\,400.000 - 1\,200 V)} * V dV$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y finales del conjunto en las integrales, se logra:

$$\int_0^t dt = \int_0^V \frac{1.20 \times 10^7}{g(4\,400.000 - 1\,200 V)} * V dV$$

$$\int_0^t dt = \int_0^V \frac{1.20 \times 10^7}{32.20 \frac{ft}{s^2} * (4\,400.000 - 1\,200 V)} * V dV$$

$$\int_0^t dt = \int_0^V \frac{1.20 \times 10^7}{(141\,680.000 - 38\,640 V)} * V dV$$

$$\int_0^t dt = \int_0^V \frac{V dV}{(0.085 - 310.56 V)}$$

Para resolver la integral se hace el siguiente cambio de variable:

$$U = 0.085 - 310.56 V$$

$$dU = -310.56 dV$$

$$dV = -\frac{dU}{310.56}$$

$$dZ = V dV$$

$$\int dZ = \int V dV$$

$$Z = \frac{V^2}{2}$$

La solución de la integral es:

$$t = (0.085 - 310.56 V) * \frac{V^2}{2} - \int \frac{V^2}{2} * (-310.56 dV)$$

$$t = (0.085 - 310.56 V) * \frac{V^2}{2} - \frac{-310.56}{2} \int V^2 dV$$

$$t = (0.085 - 310.56 V) * \frac{V^2}{2} - \frac{-310.56}{2} * \frac{V^3}{3}$$

$$t = 0.043 V^2 - 155.28 V^3 - 51.76 V^3$$

$$t = 0.043 V^2 - 207.04 V^3$$



## CAPÍTULO 4

# CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA: IMPULSO Y MOMENTO

Es un método básico único para la solución de problemas que involucra el movimiento de partículas usado para resolver problemas que implican fuerza, masa, velocidad y tiempo.

La segunda ley de Newton puede expresar una partícula con masa  $m$  sobre la que actúa una fuerza  $F$  de la siguiente manera:

$$\bar{F} dt = d(m \bar{V}) \quad \text{Ec. 18}$$

Donde  $m\bar{V}$  es la cantidad de movimiento lineal, al multiplicar ambos miembros de la ecuación por  $dt$ , se logra:

$$\bar{F} = \frac{d}{dt} (m \bar{V})$$

$$\bar{F} dt = d(m \bar{V})$$

Si se integra desde un tiempo inicial  $t_1$  y un tiempo final  $t_2$ , se encuentra:

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = m \bar{V}_2 - m \bar{V}_1$$
$$m \bar{V}_1 + \int_{t_1}^{t_2} F dt = \bar{m} V_2 \quad \text{Ec. 19}$$

Al integrar en la ecuación anterior tenemos un vector conocido como impulso lineal que “indica la acción impartida al cuerpo por las fuerzas externas” (Gill, 1989, p. 107). Al descomponer  $F$  en componentes rectangulares se escribe:

$$\text{Imp}_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt$$

$$\text{Imp}_{1-2} = i \int_{t_1}^{t_2} F_X dt + j \int_{t_1}^{t_2} F_Y dt + k \int_{t_1}^{t_2} F_Z dt \quad \text{Ec. 20}$$

La cantidad de movimiento y el impulso son cantidades vectoriales. Cuando varias fuerzas actúan sobre una partícula, debe considerarse el impulso de cada una de las fuerzas.

## 4.1. Conservación del momento lineal de un sistema de partículas

Puesto que las partículas entre sí forman fuerzas de acción, las reacciones iguales y opuestas del intervalo de  $y$  son comunes para todas. Los impulsos de las fuerzas de acción y reacción se cancelan y solo se tienen en cuenta los impulsos de las fuerzas externas si su suma es cero, el segundo término de la ecuación 19 se anula quedando así:

$$\Sigma m \bar{V}_1 = \Sigma m \bar{V}_2 \quad \text{Ec. 21}$$

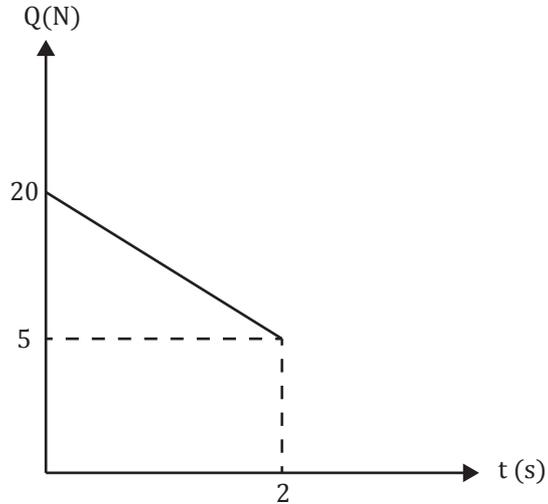
### 4.1.1. Problema caso 11

Una corredera de  $m$  se desliza por una barra con un coeficiente de fricción de  $\mu$ , partiendo del reposo antes de aplicarle una fuerza  $Q$  (véase la Figura 35, que varía como se indica en la Figura 36). Determinar la distancia recorrida por la corredera para cuando hayan transcurrido  $t$  segundos y la velocidad máxima.

Figura 35. Trayectoria de la partícula



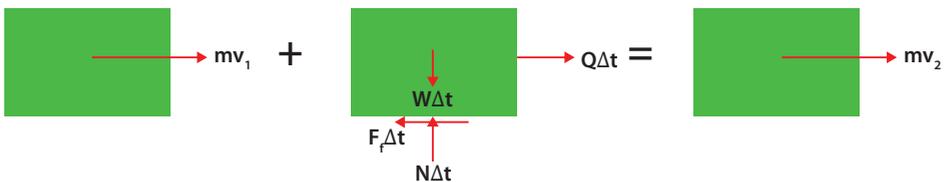
Fuente: elaboración propia.

**Figura 36. Variación de la fuerza en la corredera**

Fuente: elaboración propia.

Para encontrar la distancia recorrida por la corredera al transcurrir 2 segundos de haber iniciado el movimiento, es necesario encontrar la velocidad en ese instante y la aceleración.

La velocidad de la corredera para ese instante se logra analizando el principio de impulso y cantidad de movimiento lineal a la corredera (véase la Figura 37).

**Figura 37. Principio de impulso y cantidad de movimiento a la corredera**

Fuente: elaboración propia.

Aplicando el principio impulso y cantidad de movimiento a la corredera, a lo largo del eje Y, se tiene:

$$m \bar{V}_1 + \Sigma \bar{F} \Delta t = m \bar{V}_2$$

$$+ \uparrow N \Delta t - m g \Delta t = 0$$

$$N \Delta t = m g \Delta t$$

$$N = m g$$

$$N = 3 \text{ kg} * 9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$N = 29.40 \text{ kg} * \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$N = 29.40 \text{ Newton}$$

La fuerza de fricción entre la corredera y la barra por donde desliza la corredera es:

$$F_f = \mu N$$

$$F_f = 0.25 * 29.40 \text{ Newton}$$

$$F_f = 7.35 \text{ Newton}$$

Si se establece positivo hacia la derecha para realizar la sumatoria al principio del impulso y cantidad de movimiento a la corredera a lo largo del eje X, se encuentra:

$$+ \rightarrow m \bar{V}_1 + \Sigma \bar{F} \Delta t = m \bar{V}_2$$

$$m V_1 + \int Q dt - \int F_f dt = m V_2$$

Como la corredera parte del reposo, se tiene:

$$V_1 = 0$$

La variación de la fuerza  $Q$  que actúa sobre la corredera tiene forma lineal dada por la expresión:

$$Q = m t + b$$

Donde  $m$  es la pendiente de la fuerza  $Q$  y  $b$  es el punto de intersección con el eje  $Y$ . Para encontrar la pendiente de la línea recta es necesario tener dos pares ordenados, que en este caso son los puntos de coordenadas  $P_1 ( 2,5 )$  y  $P_2 ( 0,20 )$

La expresión de la pendiente de la línea recta está dada por la expresión:

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

La variación de la fuerza  $Q$  es:

$$Q = m t + b$$

$$Q = \left( \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right) t + b$$

$$Q = \left( \frac{20 - 5}{0 - 2} \right) t + 20$$

$$Q = 20 - \frac{15}{2} t \quad (\text{N})$$

Al cambiar en la expresión del principio de impulso y cantidad de movimiento, se halla:

$$m V_1 + \int Q dt - \int F_f dt = m V_2$$

$$m * 0 + \int_0^t \left( 20 - \frac{15}{2} t \right) dt - \int_0^t \mu N dt = m V_2$$

$$0 + \int_0^t \left( 20 - \frac{15}{2} t \right) dt - \int_0^t \mu m g dt = m V_2$$

Si se integra, se encuentra:

$$20 t - \frac{15}{4} t^2 - \mu m g t = m V_2$$

$$20 t - \frac{15}{4} t^2 - 0.25 * 29.40 \text{ Newton} * 9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * t = m V_2$$

$$20 t - \frac{15}{4} t^2 - 7.35 t = m V_2$$

$$12.65 t - \frac{15}{4} t^2 = m V_2$$

La expresión de la velocidad de la corredera para un instante cualquiera es:

$$V = \frac{12.65 t - \frac{15}{4} t^2}{m}$$

Al sustituir el instante dado en segundos y la masa en kilogramos para encontrar las unidades de la velocidad de la corredera en m/s se logra:

$$V_2 = \frac{12.65 * 2 \text{ s} - \frac{15}{4} (2 \text{ s})^2}{3 \text{ kg}}$$

$$V_2 = 3.43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La aceleración de la corredera es:

$$V_2 = V_1 + a t$$

$$a = \frac{V_2 - V_1}{t}$$

$$a = \frac{3.43 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ s}}$$

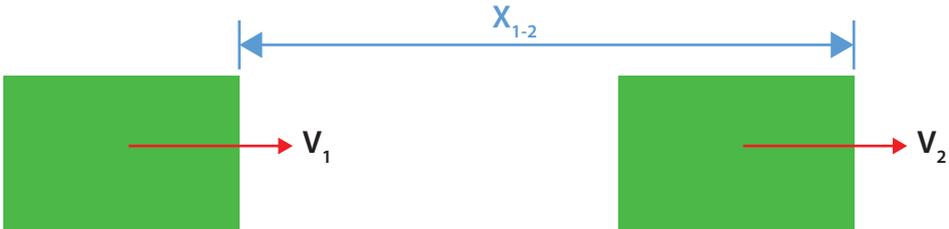
$$a = 1.72 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Al usar cinemática para encontrar la distancia recorrida por la corredora, se obtiene:

$$X_{1-2} = X_0 + V_1 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Si se ubican los ejes coordenados en el inicio de movimiento de la corredora (véase la Figura 38), se logra:

**Figura 38. Trayectoria de la corredora**



Fuente: elaboración propia.

$$X_0 = 0$$

$$X_{1-2} = 0 + 0 * 2 \text{ s} + \frac{1}{2} * 1.72 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * (2 \text{ s})^2$$

$$X_{1-2} = 6.88 \text{ m}$$

Para encontrar la velocidad máxima se requiere encontrar la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo y encontrar los puntos críticos.

La expresión de la velocidad de la corredora es:

$$V = \frac{12.65 t - \frac{15}{4} t^2}{\text{m}}$$

$$V = \frac{12.65 t - \frac{15}{4} t^2}{3 \text{ kg}}$$

$$V = 4.22 t - 1.25 t^2$$

Al derivar la expresión, se encuentra:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} (4.22 t - 1.25 t^2)$$

$$\frac{dV}{dt} = 4.22 - 2 * 1.25 t$$

Haciendo la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo nula, se tiene el tiempo en el que la velocidad de la corredera es máxima.

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

$$0 = 4.22 - 2 * 1.25 t$$

$$t = \frac{4.22}{2 * 1.25}$$

$$t = 1.69 \text{ s}$$

Si se sustituye el tiempo encontrado, la velocidad máxima que alcanza la corredera es:

$$V_{\max} = 4.22 t - 1.25 t^2$$

$$V_{\max} = 4.22 * 1.69 \text{ s} - 1.25 * (1.69 \text{ s})^2$$

$$V_{\max} = 3.55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## 4.2. Impacto

Una colisión o impacto entre dos cuerpos se define como una interacción fuerte entre dos cuerpos, ya sea por contacto directo o por la naturaleza de su proximidad que dura un tiempo relativamente corto, las colisiones o impactos entre partículas conducen a una pérdida de energía cinética.

En una colisión inelástica los cuerpos pueden rebotar después del impacto y separarse o permanecer unidos. Si permanecen unidos y se mueven como un solo cuerpo, la colisión se llama completamente inelástica o completamente plástica.

El principio de cantidad de movimiento lineal a dos partículas que colisionan entre sí, está dado por la expresión:

$$\bar{L}_1 = \bar{L}_2$$

$$m_A \bar{V}_A + m_B \bar{V}_B = m_A \bar{V}'_A + m_B \bar{V}'_B \quad \text{Ec. 22}$$

“Las fuerzas internas que existen en la colisión entre las partículas debidas a las interacciones entre sus partículas no producen ningún cambio en la cantidad de movimiento total” (Alonso y Finn, 1970, p. 243).

#### 4.2.1. Problema caso 12

La esfera A de masa  $m_A$  y rapidez  $V_0$  colisiona con la esfera B de masa  $m_B$  que se encuentra en reposo (véase la Figura 39). Determinar el porcentaje de energía cinética de la colisión si el coeficiente de restitución es  $e$ . No hay fricción entre las esferas y la superficie.

Figura 39. Esquema general



Fuente: elaboración propia.

Aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento a las esferas un momento antes y después de la colisión (véase las figuras 40 y 41).

Si se asume que el eje positivo para el sentido de las velocidades de las esferas es hacia la derecha, las velocidades de las esferas A y B antes de la colisión son:

$$\bar{V}_A = V_0 \hat{i}$$

$$\bar{V}_B = 0$$

Figura 40. Cantidad de movimiento de las esferas antes de la colisión



Fuente: elaboración propia.

Se asume un sentido para las velocidades de las esferas después de la colisión hacia la derecha, por lo que las velocidades de las esferas A y B después de la colisión son:

$$\bar{V}'_A = V'_A \hat{i}$$

$$\bar{V}'_B = V'_B \hat{i}$$

**Figura 41. Cantidad de movimiento de las esferas después de la colisión**



Fuente: elaboración propia.

Aplicando el principio de cantidad de movimiento lineal a las esferas, se tiene:

$$\bar{L}_1 = \bar{L}_2$$

$$m_A \bar{V}_A + m_B \bar{V}_B = m_A \bar{V}'_A + m_B \bar{V}'_B$$

Al establecer positivo hacia la derecha para realizar la sumatoria de cantidades de movimiento lineal a las esferas, se tiene:

$$+ \rightarrow m_A V_0 + 0 = m_A V'_A + m_B V'_B$$

$$m_A V_0 = m_A V'_A + m_B V'_B$$

La expresión para el coeficiente de restitución es:

$$e = - \frac{[\bar{V}'_{A/B}]}{[\bar{V}_{A/B}]}$$

$$e = - \frac{[\bar{V}'_A - \bar{V}'_B]}{[\bar{V}_A - \bar{V}_B]}$$

Las velocidades de las esferas A y B antes de la colisión son:

$$\bar{V}_A = V_0 \hat{i}$$

$$\bar{V}_B = 0$$

Al sustituir las velocidades de las esferas antes de la colisión, en la expresión del coeficiente de restitución, se encuentra:

$$e = - \frac{[V'_A - V'_B]}{V_0}$$

$$[V'_A - V'_B] = - e * V_0$$

$$V'_A = V'_B - e * V_0$$

Al suplir la velocidad de la esfera A después de la colisión en función de la velocidad de la esfera B después de la colisión, en la ecuación del principio de cantidad de movimiento lineal a las esferas, para determinar la velocidad de la partícula B después de la colisión.

$$V'_A = V'_B - e * V_0$$

$$m_A V_0 = m_A V'_A + m_B V'_B$$

$$m_A V_0 = m_A (V'_B - e * V_0) + m_B V'_B$$

$$m_A V'_B + m_B V'_B = m_A V_0 + e * m_A V_0$$

$$V'_B (m_A + m_B) = m_A V_0 + e * m_A V_0$$

$$V'_B = \frac{m_A V_0 (1 + e)}{m_A + m_B}$$

La velocidad de la partícula A después de la colisión es:

$$V'_A = V'_B - e * V_0$$

$$V'_A = \frac{m_A V_0 (1 + e)}{m_A + m_B} - e * V_0$$

$$V'_A = \frac{m_A V_0 (1 + e) - e * V_0 * (m_A + m_B)}{m_A + m_B}$$

$$V'_A = \frac{m_A V_0 + e * m_A V_0 - e * m_A V_0 - e * m_B V_0}{m_A + m_B}$$

$$V'_A = \frac{m_A V_0 - e * m_B V_0}{m_A + m_B}$$

$$V'_A = \frac{V_0 (m_A - e * m_B)}{m_A + m_B}$$

El porcentaje de energía cinética de la colisión es:

$$\Delta T = \left( \frac{T_2 - T_1}{T_1} \right) * 100$$

La energía cinética de las esferas antes de la colisión es:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_A V_0^2$$

La energía cinética de las esferas después de la colisión es:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_A (V'_A)^2 + \frac{1}{2} m_B (V'_B)^2$$

Al reemplazar las velocidades de las esferas después de la colisión, se logra:

$$V'_A = \frac{m_A V_0 - e * m_B V_0}{m_A + m_B}$$

$$V'_B = \frac{m_A V_0 + e * m_A V_0}{m_A + m_B}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_A * \left( \frac{m_A V_0 - e * m_B V_0}{m_A + m_B} \right)^2 + \frac{1}{2} m_B * \left( \frac{m_A V_0 + e * m_A V_0}{m_A + m_B} \right)^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_A * \left[ \frac{m_A^2 V_0^2 - 2 e * m_A m_B V_0^2 + e^2 * m_B^2 V_0^2}{(m_A + m_B)^2} \right] + \frac{1}{2} m_B * \left[ \frac{m_A^2 V_0^2 + 2 e * m_A^2 V_0^2 + e^2 * m_A^2 V_0^2}{(m_A + m_B)^2} \right]$$

$$T_2 = \frac{m_A^3 V_0^2}{2 (m_A + m_B)^2} - \frac{e * m_A^2 m_B V_0^2}{(m_A + m_B)^2} + \frac{e^2 * m_A m_B^2 V_0^2}{2 (m_A + m_B)^2} + \frac{m_A^2 m_B V_0^2}{2 (m_A + m_B)^2} + \frac{e * m_A^2 m_B V_0^2}{(m_A + m_B)^2} + \frac{e^2 * m_A^2 m_B V_0^2}{2 (m_A + m_B)^2}$$

$$T_2 = \frac{m_A^3 V_0^2}{2 (m_A + m_B)^2} + \frac{e^2 * m_A m_B^2 V_0^2}{2 (m_A + m_B)^2} + \frac{m_A^2 m_B V_0^2}{2 (m_A + m_B)^2} + \frac{e^2 * m_A^2 m_B V_0^2}{2 (m_A + m_B)^2}$$

$$T_2 = \frac{m_A V_0^2}{2 (m_A + m_B)^2} * [ m_A (m_A + m_B) + e^2 * m_B (m_A + m_B) ]$$

$$T_2 = \frac{m_A V_0^2 * (m_A + m_B)}{2 (m_A + m_B)^2} * [ m_A + e^2 * m_B ]$$

$$T_2 = \frac{m_A V_0^2}{2 (m_A + m_B)} * (m_A + e^2 * m_B)$$

Al cambiar la energía cinética de las esferas antes y después de la colisión, para determinar el porcentaje de pérdida de energía cinética en la colisión es:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_A V_0^2$$

$$T_2 = \frac{m_A V_0^2}{2 (m_A + m_B)} * (m_A + e^2 * m_B)$$

$$\Delta T = \left( \frac{T_2 - T_1}{T_1} \right) * 100$$

$$\Delta T = \left[ \frac{\frac{m_A V_0^2}{2 (m_A + m_B)} * (m_A + e^2 * m_B) - \frac{m_A V_0^2}{2}}{\frac{m_A V_0^2}{2}} \right] * 100$$

$$\Delta T = \left[ \frac{\frac{m_A^2 V_0^2}{2 (m_A + m_B)} + \frac{e^2 * m_B m_A V_0^2}{2 (m_A + m_B)} - \frac{m_A V_0^2}{2}}{\frac{m_A V_0^2}{2}} \right] * 100$$

$$\Delta T = \left[ \frac{2 m_A^2 V_0^2}{2 m_A V_0^2 (m_A + m_B)} + \frac{2 e^2 * m_B m_A V_0^2}{2 m_A V_0^2 (m_A + m_B)} - \frac{2 m_A V_0^2}{2 m_A V_0^2} \right] * 100$$

$$\Delta T = \left[ \frac{m_A}{(m_A + m_B)} + \frac{e^2 * m_B}{(m_A + m_B)} - 1 \right] * 100$$

$$\Delta T = \left( \frac{m_A + e^2 * m_B}{m_A + m_B} - 1 \right) * 100$$



## EPÍLOGO



En el texto se utilizaron los conceptos vinculados a la cinemática traslacional de los cuerpos. Se estudió la descripción de los movimientos de traslación de cuerpos, identificando el objeto de estudio de acuerdo al problema a estudiar; se seleccionó un marco de referencia, es decir la ubicación desde dónde se va a referir el movimiento, y a este se le asoció con un sistema de coordenadas para poder medir la posición modelizados como partículas. Luego se realizó la modelización como partícula en el que se refirió la posición del cuerpo.

Además, se analizaron las causas de los movimientos o qué es necesario para producir los cambios en los movimientos y cómo están vinculadas a como se relaciona el cuerpo de estudio con los elementos del entorno.

La Dinámica de la partícula es una parte de la mecánica Newtoniana y el uso de la física implicó una forma científica, guiada por la lógica, la razón y la contrastación con el mundo de comprender el comportamiento de fenómenos de la naturaleza en las que se utilizaron herramientas matemáticas relacionadas con el cálculo infinitesimal y el álgebra de vectores.



# GLOSARIO

**Aceleración:** variación del vector velocidad por unidad de tiempo.

**Cantidad de movimiento:** producto de la masa de la partícula y su velocidad en un instante dado.

**Cinemática:** rama de la física que se encarga de estudiar la forma del movimiento de los cuerpos.

**Cinética:** rama de la física que se encarga de analizar la causa y efecto de los movimientos de los cuerpos.

**Colisión:** encuentro violento entre cuerpos durante el cual los cuerpos ejercen, entre sí, fuerzas relativamente grandes.

**Desplazamiento:** vector que une el punto de inicio del movimiento con el de llegada del cuerpo.

**Energía:** capacidad que poseen los cuerpos para realizar trabajo.

**Energía potencial gravitacional:** energía que poseen los cuerpos debido a la posición que ocupan en el espacio.

**Energía cinética:** energía que poseen las partículas en virtud de su movimiento.

**Fricción:** resistencia al desplazamiento de un cuerpo que se halla en contacto con otro.

**Fuerza:** causa capaz de modificar el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo o de deformarlo.

**Fuerzas internas:** son fuerzas aplicadas, debidas a las interacciones con otras partículas del mismo sistema.

**Fuerzas externas:** son fuerzas aplicadas, debidas a partículas o agentes que no pertenecen al cuerpo.

**Impulso:** cantidad vectorial que mide el efecto de una fuerza durante el tiempo que ésta actúa.

**Masa:** cantidad de materia contenida en un cuerpo.

**Peso:** fuerza con que la tierra atrae a un cuerpo.

**Radio de curvatura:** distancia que va desde su centro a cualquier punto de dicha trayectoria.

**Reacción:** acción que se opone a otra, obrando en sentido contrario a ella.

**Reposo:** inmovilidad de un cuerpo respecto de un sistema de referencia.

**Rozamiento:** resistencia de un cuerpo a rodar o deslizarse sobre otro.

**Tiempo:** magnitud física con la que se mide la duración de acontecimientos sujetos a cambio, de los sistemas sujetos a observación.

**Trayectoria:** lugar geométrico de las sucesivas posiciones que un cuerpo va ocupando en el espacio.

# BIBLIOGRAFÍA

Beer, J. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros Dinámica*. Mc Graw Hill.

Hibberler, R. C. (2010). *Engineering mechanics Dynamics*. Pearson education.

Martín, J. (1998). *Cinemática y estática*. Edicions de la universitat Politècnica de Catalunya.

Meriam, J. y Kraige, L. (1998). *Engineering mechanics Dynamics*. Reverté.

Riley, W. F. y Sturges, L. D. (1994). *Ingeniería Mecánica Dinámica*. Reverté.

Shames, I. (2010). *Mecánica para ingenieros Dinámica*. Prentice Hall.

Gray, G. y Costanzo, F. (2010). *Engineering mechanics Dynamics*. Mc Graw Hill.

Bedford, F. (1996). *Engineering mechanics Dynamics*. Addison Wesley.

Zemansky, S. (2009). *Física universitaria*. Pearson education.

Gill, M. (1997). *Mecánica para ingeniería y sus aplicaciones Dinámica*. Grupo editorial iberoamérica.

Alonso, M. y Finn, E. (1970). *Física*. Fondo educativo interamericano.

# MECÁNICA

## PROBLEMAS RESUELTOS

El texto facilita el proceso enseñanza y aprendizaje en los estudiantes, proporcionando los fundamentos de la física y sus aplicaciones, permitiendo una mejor comprensión en los temas y aumentando la capacidad de análisis e interpretación de problemas en forma lógica.

El libro inicia con el estudio de la cinemática considerando el movimiento de una partícula bajo el efecto de la gravedad; luego, se indican las relaciones entre la cinemática y la fuerza que actúa sobre la partícula usando leyes de Newton, los principios de trabajo y energía, conservación de energía, cantidad de movimiento y colisiones.

Dirigido a los estudiantes de los programas de tecnología e ingeniería que requieran en su formación el uso los principios fundamentales de la física, además sirve de material para la preparación de clases a los docentes universitarios.

## Incluye

- ▶ Descripción del fundamento teórico de los principios de la física por capítulo.
- ▶ Problemas resueltos con énfasis en la representación de los movimientos en texto o gráficas que facilitan el desarrollo de capacidades de abstracción, habilidades de representación y comprensión de los principios físicos y matemáticos.
- ▶ Lenguaje claro y sencillo que facilita la comprensión, aplicación y análisis.

### Gustavo Guerrero Gómez

Magíster en Sistemas Energéticos Avanzados de la UDES, especialista en Práctica Docente Universitaria de la UFPSO e Ingeniero mecánico de la UFPS. Profesor Asociado de la UFPSO. Es autor de varios artículos, ponente en eventos nacionales e internacionales y miembro del Grupo de Investigación en Tecnología y Desarrollo en Ingeniería (GITYD) de la UFPSO, categoría A según Minciencias.

### Nelson Afanador García

Doctor en Estructuras de la Universidad de Brasilia (Brasil), magíster en Ingeniería Civil con énfasis en Estructuras de la Uniandes e Ingeniero Civil de la Universidad de La Salle. Profesor Asociado de la UFPSO. Autor de varios artículos y libros, ponente en congresos nacionales e internacionales y miembro del Grupo de Investigación en Tecnología y Desarrollo en Ingeniería (GITYD) de la UFPSO, categoría A según Minciencias.

### Faustino Moreno Gamboa

Doctor en Ingeniería de la UPB, magíster en Ingeniería Mecánica de la Uniandes, máster en Sistemas de Energía Solar FV de la UNIA (España) e Ingeniero Mecánico de la UFPS. Profesor asociado de la UFPS, con experiencia en sectores como el automotriz, de combustibles líquidos y aplicaciones de gas natural. Autor de artículos y ponente en congresos nacionales e internacionales.



Universidad Francisco  
de Paula Santander

Vigilada Mineducación



e-ISBN 978-958-503-339-9