ISBN: 978-1- 957395-08-1

ANÁLISIS ESPECTRAL DE LA TRIGONOMETRÍA PLANA

DESDE LA FUNCIÓN Y LA COFUNCIÓN

Nelson Afanador García
Cristian Nolasco Serna
Gustavo Guerrero Gómez

INVESTIGACIÓN EDUCATIVA & PEDAGÓGICA IBEROAMERICANA
editorial redipe
Universidad Francisco de Paula Santander
Ocaña - Colombia
Vigilada Mineducación

editorial redipe © 2022

Título original

ANÁLISIS ESPECTRAL DE LA TRIGONOMETRÍA PLANA DESDE LA FUNCIÓN Y LA COFUNCIÓN

Universidad Francisco de Paula Santander seccional Ocaña

Autores:

Nelson Afanador García
Cristian Nolasco Serna
Gustavo Guerrero Gómez

Editorial REDIPE

Red Iberoamericana de Pedagogía
Capítulo Estados Unidos

Bowker Books in Print

Editor

Julio César Arboleda Aparicio

Diagramación

Oliver García Ramos

ISBN: 978-1- 957395-08-1

Primera edición: Mayo 2022

Red Iberoamericana de Pedaogía
editorial@redipe.org
www.redipe.org

Impreso en Cali, Colombia
Printed in Cali, Colombia

Dedicatoria

Este trabajo es dedicado a mis hijas, hijo y a mi esposa,
quien son el motor de mi vida.
Nelson Afanador García

Este trabajo es dedicado a mi hija, hijo y a mi esposa.
Cristian Nolasco Serna

Dedico este texto a mi mamá, mi papá y mis hermanos,
quienes me han brindado todo su apoyo y respaldo.
Gustavo Guerrero Gómez

Agradecimientos

A Dios
A la Universidad Francisco de Paula Santander seccional Ocaña
Nelson Afanador García

A la Universidad Francisco de Paula Santander seccional Ocaña
Cristian Nolasco Serna

A mi madre, María Elena Gómez de Guerrero. Y a mi padre, Gustavo Guerrero Farelo.
A mis hermanos, Iván Guerrero Gómez y Mario Guerrero Gómez.
A la Universidad Francisco de Paula Santander seccional Ocaña.
A Dios.
Gustavo Guerrero Gómez

Contenido

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Introducción

Este trabajo es el producto de un estudio concienzudo, largo y en el cual no se han ahorrado esfuerzos para presentar una trigonometría, qué para el autor es mucho más fácil, menos larga y tediosa.

El capítulo I trata temas que parecen interesantes desde el punto de vista histórico, y que desafortunadamente no pude extenderme en ellas ya que no es el tema de este trabajo.

Los capítulos II y III, son capítulos básicos y fundamentales en el desarrollo del trabajo, pues tratan temas como el de las funciones y cofunciones y algunas deducciones hechas a raíz de esta definición. Por último, el capítulo IV es la culminación al desarrollo de la trigonometría con base en el concepto de función y cofunción a través de un teorema que mereció estudio y cuidadoso análisis.

Me resta agregar que cualquier comentario que le merezca este, su libro de consulta, será el mejor premio al trabajo realizado.

— I —

Evolución de la Geometría y de la Trigonometría

1. Introducción a la geometría y a la trigonometría.

1.1. Breve historia de la geometría.

La palabra geometría derivados palabras griegas, "goe" qué significa "tierra" y "metria" qué significa "medir" mostrando que originalmente se había pensado en ella como de "una medida de la tierra".

Las afirmaciones que se hagan acerca del origen de la matemática, Ya sea aritmética geométrica, será necesariamente arriesgada. Herodoto y Aristóteles no querían arriesgarse a situar los orígenes de la geometría en una época anterior a la civilización egipcia. Herodoto sostenía que la geometría se había originado en Egipto; porque allí a partir de la necesidad práctica de volver a trazar los límites de la tierra después de la inundación del valle del río Nilo, Jack en el reino el faraón distribuye la tierra entre sus súbditos en lotes cuadrados, iguales para cada uno de ellos. Aristóteles sostenía que el cultivo y la geometría se habían impulsado en Egipto, por la existencia allí de una amplia clase sacerdotal ociosa. El hecho de que a los geómetras egipcios se le llama a veces "los tensadores de la cuerda" (agrimensores) se puede utilizar para apoyar cualquier teoría, porque las cuerdas se utilizaron tanto para bosquejar los planos de los templos, Como para construir las fronteras borradas entre los terrenos, pero lo que sí está bien claro es que los dos subestimaron la edad de la geometría. Lo mejor, pues, es dejar en suspenso la decisión sobre este tema y avanzar hacia un terreno más seguro de la historia de la geometría, tal como sea allá en los únicos documentos escritos que han llegado hasta nuestras manos, de los primeros geómetras.

Algunos de estos primeros geometras merecen una mención especial ya sea por ser una eminencia en matemática o por su influencia sobre filósofos o científicos. Uno de estos precursores fue Tales de Mileto (siglo VI a. de C.) Considerado uno de los siete sabios de la época. El fue el primer matemático, además de conocer algunos hechos geométricos, conocía las demostraciones de estos hechos. El segundo en importancia fue Pitágoras (finales del siglo VI a.c.), quién estableció una escuela en Crotón, Sicilia. Es a veces difícil distinguir si un descubrimiento se originó con Pitágoras o algunos de sus discípulos. Otro geómetra griego que merece ser mencionado aunque su fama es insignificante en comparación a la que merece, es Eudoxus de Cnido (IV siglo a.c.), una de las principales matemáticos de todos los tiempos. Su fama se debe a su teoría general de la proporción, y algunas contrucciones geométricas.

Los griegos se organizaron y extendieron la geometría por su propio gusto. La geometría deductiva (es decir con demostraciones hechas a partir de la posición simple), es un invento de griegos.

El más conocido de los geómetras de la Grecia antigua es Euclides, que escribió los elementos (cerca de 300 años a.c.). Este trabajo es el más famoso que jamás existido y fue utilizado en el mundo entero hasta nuestros días. Se compone de trece libros; los seis primeros se refieren a la geometría plana como los otros a la métrica y la geometría sólida.

Poco se sabe de la vida de Euclides, excepto que probablemente estudios sus matemáticas con discípulos de Platón y que posteriormente fundó su propia escuela en Alejandría. Sin duda el liso pleno uso de los escritos anteriores, pero la organización de los elementos es propia de el, asimismo sus propias avances de geometría.

Muchos grandes matemáticos griegos siguieron a Euclides, entre ellos se encuentra Apolonio (III siglos a.c.) y Arquímedes (III siglos a.c.). Arquímedes hizo interesante trabajo en matemáticas, física e ingeniería.

Con el ascenso del Imperio romano, Grecia declinaba como potencia coma pero guardaba su prestigio como gran centro de aprendizaje y cultura, hasta bien entrada la era cristiana. Cuándo Roma sucumbió ante los bárbaros que venían del Norte; en el siglo V d.c. empezó el oscurantismo. Durante este tiempo las investigaciones de matemáticas estuvieran en manos de los árabes.

Al principio del siglo XIV, además de la geometría clásica, se emprendió una gran actividad matemática, con la invención del cálculo por Newton y Leibniz en el siglo XVIII.

Fue durante el siglo XIX cuando los matemáticos cayeron en cuenta que habían algunas hipótesis hechas por Euclides qué no fueron enunciadas. Por consiguiente como la geometría euclidiana fue revisada, completada y ajustado a las normas modernas. Primer tratado completo de la geometría euclidiana fue publicada por el matemático alemán David Hilbert en 1899.

1.2 Breve historia de la trigonometría.

La etimología de la palabra trigonometría, de “gonos” (ángulo), “trigono” (triángulo), “Metron” (medida), mostrando que inicialmente se ha pensado en ella coma cómo la “medida de los triángulos”.

La trigonometría, al igual que la geometría, no fue resultado un solo hombre ni de una sola nación. Ya los egipcios y babilonios conocían y utilizaban “teoremas” relativos a las razones entre los lados de triángulos semejantes, obviamente sin formularlos de una manera explícita.

Con los griegos nos encontramos por primera vez con un estudio sistemático de las relaciones entre los ángulos centrales en un círculo y en las longitudes de las cuerdas que los subtienden. Los astrónomos de la época de Alejandría por su parte, especialmente de Eratóstenes de Cirene (276-194 a.c) y Aristarco de Samos (310 - 230 a.c.) se veían manejando problemas qué apuntaban de manera cada vez más urgente a la necesidad de establecer sistemáticamente las relaciones entre los ángulos y las cuerdas. Todas estas observaciones se hicieron palpables en las mediciones que hizo Eratóstenes sobre el tamaño de la tierra, mientras que Aristarco palpo su experiencia en su libro “sobre los tamaños y la distancia del sol y la luna”.

Probablemente durante la segunda mitad del siglo II a.c., todo parece indicar que fue compuesta la primera tabla trigonométrica por obra del astrónomo Hiparco de Nicea (180-125 a.c.), qué se ganó así, hacer llamado “el padre de la trigonometría”. La Figura de Hiparco es una Figura de transición entre la astronomía babilónica y la obra de Ptolomeo. Ptolomeo en el siglo II a.c. resumió en su “Almagesto”, las características principales de la geometría esférica, e indicó un método para el cálculo aproximado de lo que viene a ser una incipiente tabla de senos, “Semicuerdas” de este modo, la trigonometría plana fue nada más que un suplemento de cálculo para la trigonometría esférica, y en consecuencia los elementos de trigonometría más importantes, se dieron con una lentitud innecesarias quizás en el fondo, la razón de que los hindúes y los árabes perfeccionaron la trigonometría no fueran sus aplicaciones al levantamiento de planos, sino la necesidad astronómica de una interpolación más precisa. Una obra hindú que avanzó considerablemente más allá de la trigonometría y griega, en cuanto a método como a precisión, dando una tabla de senos, calculada para cada 3,75 grados.

La regla para calcular la tabla es errónea coma, pero posiblemente dio resultados suficientes precisos para las inexactas observaciones de aquella época.

Los árabes adoptaron y desarrollar una trigonometría hindú con el primer proceso nontable se debió al astrónomo Al- batani (muerto en el año 929). Sí bien en realidad no fue el primero que aplico el álgebra en lugar de lazo la geometría a la trigonometría. Este astrónomo matemático fue el primero que dio un gran paso en esa dirección, uso además del seno inducom a la tangente y la cotangente. En el siglo V se calcularon tablas de estas dos últimas y también hicieron su aparición al secante y cosecante como razones trigonométricas.

Anula - Wefa a últimos del siglo V empezó a sistematizar toda la trigonometría que se conocía en la época y las redujo a un sistema deductivo muy poco sólido. Una contribución decisiva la trigonometría la dio el persa Nasir Ed Din. Este consideró tanto de la trigonometría esférica y la trigonometría plana, cómo independiente de la astronomía y la medida del tiempo vía reloj solar.

Entre los siglos V y XIV se empezaron a dar pequeñas aportaciones, tales como mejoras en la notación algebraica, tablas abreviadas de coeficiente binomicos y muchos más.

Se presenta una época de transición de lo particular a lo general y se reconoce por primera vez inequívocamente en la obra de Vuelta (Francisco Viera, francés 1540 - 1603), que, al igual que Fibonacci, no tenía formación matemática, ni lo era de profesión, pero la calidad de su obra en trigonometría le indica una ecuación algebraica de grado de 45 que Vieta abordo en respuesta a un desafío.

El principal progreso de Vieta en trigonometría fue su aplicación sistemática del álgebra. Tanto en trigonometría plana como en la esférica, manejo libremente las 6 funciones habituales, y en aquellas obtuvo muchas de las identidades fundamentales, algebraicamente.

Con Vieta quedó prácticamente terminada la trigonometría elemental (no analítica), excepto en el aspecto de cálculo, en el cálculo prelogaritmico Vieta amplio en 1579 las tablas de Rhactivus (Alemán 1514 - 1576), dando los valores con 7 decimales, de las 6 funciones para cada segundo de arco en vez de cada 10 segundos, como había hecho Rhacticus.

1.3 Importancia del estudio de la geometría y la trigonometría.

Existen varias razones por las cuales la geometría y la trigonometría es estudiada por tantos estudiantes en el mundo. Una de estas razones es que la geometría y la trigonometría son grandes realizaciones de la mente humana y durante 2000 años el hombre ha considerado su estudio como necesario, para educar realmente a una persona. La gente sintió también que por el hecho de que el razonamiento en geometría debía ser cuidadoso y exacto. Su estudio ayudaría a que uno sea también cuidadoso y exacto en otras actividades.

Una segunda razón para estudiar esta materia es su importancia práctica. Todas las personas en cualquier tipo de ocupación tienen en alguna ocasión la necesidad de recurrir a la geometría o ala trigonometría y en algunos campos de estudio en el aprendizaje profesional.

Gracias a la geometría, se puede fomentar está comprensión más profunda del mundo y de este modo su estudio se vuelve importante para todas las personas que sean científicas o no científicas.

Vivimos en un mundo en que a menudo llamamos la era científica y aún si usted no piensa estudiar una carrera científica es necesario que tenga algún conocimiento o preocupación de cómo piensa un científico. Y el estudio de la geometría y de la trigonometría es un gran pasó hacia el logro de tal comprensión.

Al ofrecer este estudio a la geometría se parte que la tarea esencial de la enseñanza de la geometría consiste en enseñar al alumno a razonar lógicamente, argumentar sus afirmaciones y demostrarlas. Aunque habrá quiénes no utilizan la geometría y la trigonometría en su actividad; sin embargo, difícilmente se hallará uno solo que no debe razonar, analizar o demostrar.

II

El Ángulo

2.1 Sistema cartesiano

El método que se empleara, es el conocido como el “sistema cartesiano de coordenadas rectangulares”, qué nos permite la localización de un punto. Sean dos rectas, $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$ perpendiculares entre sí, el punto de intersección de dichas rectas recibe el nombre de origen. En la Figura 2.1, trazamos perpendiculares a las rectas $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$ desde el punto P1, a cada una de las perpendiculares del punto P1 se le llaman coordenadas del punto P1. La perpendicular a $\overline{OX}$ se llama abscisa y la perpendicular a la recta $\overline{OX}$ se llama ordenada; las rectas $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$ reciben el nombre de “ejes de coordenadas”.

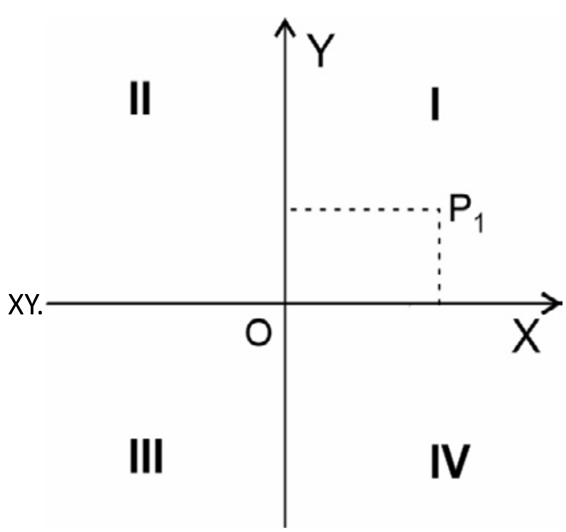


Figura 2.1

Representación de un punto en el plano cartesiano

Cuando el lado inicial coincide con el eje X y el vértice con el origen del plano cartesiano se dice que el ángulo se encuentra en posición canónica, normal o común. El ángulo se genera por la rotación del rayo terminal alrededor de un punto fijo perteneciente a un rayo estacionario, lo podemos designar como una letra minúscula del alfabeto griego, o por medio de tres letras latinas, o por una letra mayúscula del alfabeto A, B, C, etc.

En la Figura 2.2 el lado $\overline{OX}$ es el lado inicial del ángulo A ó <XOP, el lado OP es el lado terminal y el punto 0 es el vértice, Como la dirección de rotación es contraria a las manecillas del reloj, el ángulo A ó <XOP se considera positivo.

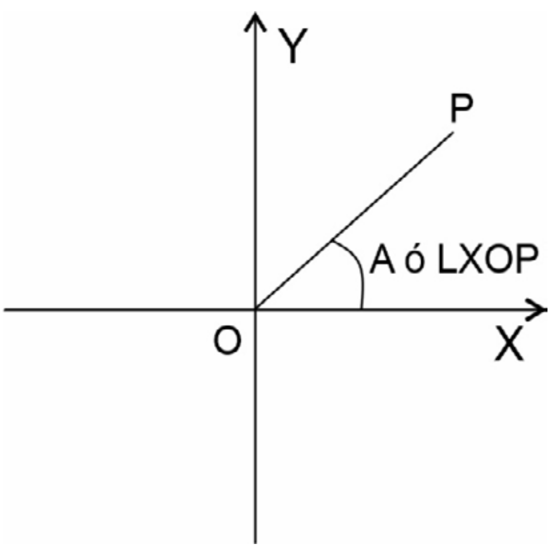


Figura 2.2

Representación del angulo A ó LXOP.

La abscisa es positiva o negativa según el punto que esté situado a la derecha o a la izquierda del eje Y respectivamente. La ordenada es positiva o negativa según el punto está situado arriba o abajo del eje X respectivamente. En la Figura 2.1, el punto P1 se representa por la abscisa X y la ordenada por Y, que reciben el nombre de coordenadas del punto P1 que comúnmente se escriben como una pareja ordenada de números, es decir (X, Y).

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro partes, cada una llamada cuadrante. Por lo general los cuadrantes se enumeran del I al IV en sentido contrario al de las manecillas del reloj, empezando en la parte superior derecha, y se representa por las letras Q1, Q2, Q3 y Q4 respectivamente.

2.2. Ángulo

En trigonometría se considera que el ángulo se genera por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo perteneciente un rayo estacionario. El rayo estacionario se denomina lado inicial del ángulo, el rayo que se desplaza se denomina lado terminal y el punto fijo vértice. Si la dirección de rotación es opuesta al movimiento de las manecillas del reloj cómo se dice que el ángulo es positivo, y si la dirección de rotación es igual al movimiento de las manecillas del reloj, se dice que el ángulo es negativo.

2.3 Medida de ángulos y arcos

Entre los varios sistemas de medidas de ángulos y arcos, usaremos únicamente dos sistemas, los cuales son: el sistema sexagesimal y el sistema circular o radial.

2.3.1 Sistema sexagesimal

En este sistema se considera la circunferencia dividida en 360 partes iguales, cada parte llamada "grado", el grado se divide en 60 partes iguales llamados "minutos"; y el minuto se divide en 60 partes iguales llamados "segundos". El sistema sexagesimal es el más utilizado en la ingeniería y en otras aplicaciones prácticas.

2.3.2 Sistema circular

Es también llamado sistema radial y toma como unidad de medida, el arco de circunferencia que subtiende una distancia igual al radio de circunferencia. Al arco unidad se le da el nombre de radián, sabemos que el perímetro de la circunferencia es $2\pi r$; si dividimos por r, obtenemos 2π qué será el valor de la circunferencia en radianes.

2.4 Relación entre el sistema sexagesimal y el circular

Utilizaremos la notación que usa la mayoría de los libros, para, grado sexagesimal, $N°$; y para radianes N^r. Si llamamos C a la circunferencia: $C=360N°=2\pi N^r$. Luego la relación entre el sistema sexagesimal y el circular es: $N° / N^r = 360° / 2\pi$, entonces

$$N^o = \frac{180^o}{\pi} N^r \tag{1}$$

Reordenando, es posible establecer una relación entre el sistema radial y un sistema angular.

$$N^r = \frac{\pi}{180^o} N^o \tag{2}$$

Ejemplo: En el Sistema radial, cuanto equivale 45°40’30” ?

Como $N^r = \frac{\pi}{180^o} N^o = \frac{\pi}{180^o}[45° + (40/60)° + ((30/60)60)°],\ N^r = 0{,}7972\, rad.$

Entonces, *45°40’30” = 0,7972* rad.

Nota. Observece que los minutos y los segundos son llevados a su equivalencia en grados.

Ejemplo: Cuantos grados sexagecimales equivalen un radian?

Como $N^o = \frac{180^o}{\pi} N^r = \frac{180^o}{\pi} 1 = 57{,}296°$

Entonces, *1 rad* (radian) = *57,296°* (grados)

2.5 Relación entre Radio, Angulo y Arco

Si dividimos el perimetro C de la circunferencia por el radio, obtenemos: *C/R = 2π* ó *C/R =360°.*

Si en lugar de la circunferencia tomamos un arco cualquiera, entonces: Angulo = Arco/Radio, si estas magnitudes, las designamos con las letras A, S y R para ángulo, arco y radio respectivamente, tenemos que:

$$A=S/R. \qquad S=A*R \tag{3}$$

Para A en radianes.

Ejemplo: Cuál es el radio de la curva de una vía, si un automovil que va en la dirección norte queda en dirección noroeste después de recorrer 20 m?

La dirección noreste nos indica un cambio de 45° a partir del norte hacia el este, entonces:

$$A = 45° \text{ y } N^r = \frac{\pi}{180^o} N^o = \frac{\pi}{180^o} 45° = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Siendo S = 20 m, se tiene que:

$$R = \frac{S}{A} = 20 \frac{4}{\pi} = 25{,}46$$

Entonces, el radio de la curva de via es de 25,46 m, ver Figura 2.3.

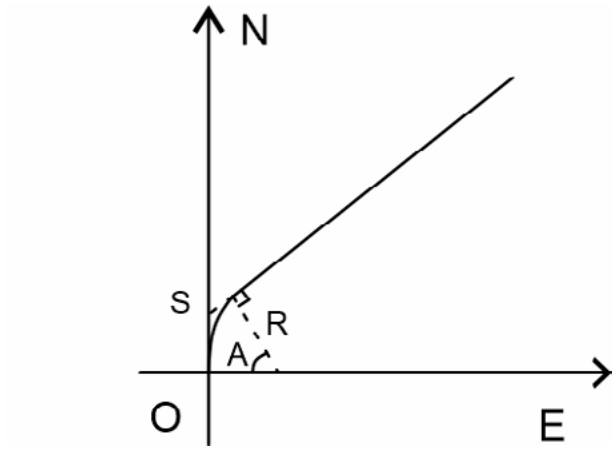


Figura 2.3

Representación del radio de curvatura de una via.

2.6 Sector Circular

Llamese sector circular al segmento de circulo comprendido ente dos radios y el arco subtendido entre ellos. En la Figura 2.4. temenos por tanto dos sectores circulares, uno limitado por el arco AMB y otro limitado por el arco ANB. Por geometría sabemos que el área de sector circular es igual al semiproducto del área por el radio. Es decir: *B=1/2 S(R)* y *S=A(R)* y por lo tanto.

$$B = \frac{1}{2}A(R^2) \tag{4}$$

Donde A está dada en radianes.

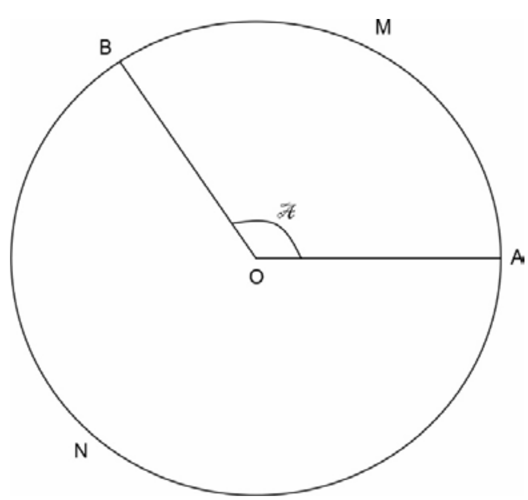


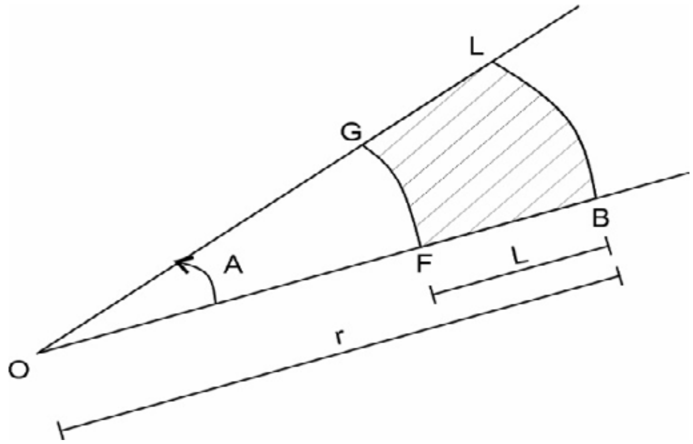
Figura 2.4

Sector circular.

Ejemplo: Hallar el área GLBF, de la Figura 2.5

Figura 2.5

Área de segmento circular.



El área GLEF = área OLB – área OG

$$B = \frac{1}{2}A(r^2) - \frac{1}{2}A(r-L)^2 = \frac{1}{2}Ar^2 - \frac{1}{2}Ar^2 + \frac{1}{2}A2rL - \frac{1}{2}AL^2$$
$$= \frac{1}{2}A2rL - \frac{1}{2}AL^2$$

Luego, el área del sector circular GLBF es:

$$\frac{1}{2}AL(2r - L)$$

donde A es un ángulo.

III

Funciones Circulares

3.1 Función.

El concepto fundamental en matemáticas es el de función. Aparecen con frecuencia en el calculo, variables relacionadas; por ejemplo: el volumen de tierra removida en una vía (curva) con el ancho de calzada, berma, etc., esta relacionada con el T.P.D. transito promedio diario (variable dada anteriormente por M.O.P. Ministerio de Obras Públicas ahora por el INVIAS). Hay un tipo especialmente importante de relación entre variables dependientes con una o varias variables independientes. Veamos a continuación un ejemplo que me permite observar la relación que existe entre variables.

Ejemplo: Se tiene una viga de sección prismatica que soporta una carga W ver Figura 3.1, se desea hallar la variación del cortante en función de la distancia de los apoyos (para determinar la máxima distancia entre los apoyos, y realizar el cálculo de los estribos).

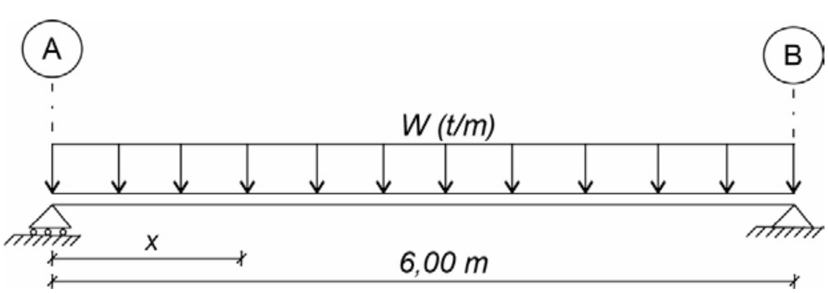


Figura 3.1
Viga de sección prismatica con carga W.

Para hallar la variación del cortante, se hace necesario determinar la magnitud de las reacciones R_A, R_B.

Tomando momentos en A, tenemos que: $\sum M_A=0$ condición de apoyo (a fin de obtener las reacciones)

$$WL\frac{L}{2} - R_B L = 0;\;\; R_B = \frac{WL}{2} = 3W$$

Veamos el cortante a una distancia x del apoyo A; si se realiza la sumatoria de fuerzas en la dirección vertical (Y) igual a cero, tendríamos:

$$\sum F_Y = 0\;\; R_A - Wx - V(x);\; V(x) = 3W - Wx = W(3 - x)\text{ t.}$$

Entonces la variación del cortante para una carga uniformemente repartida (W) tendrá un comportamiento lineal. Veamos que significa lo anterior, ver Figura 3.2. Si damos valores a x entre 0 y 6,00 podemos observar la variación del cortante a medida que se aleja de los apoyos.

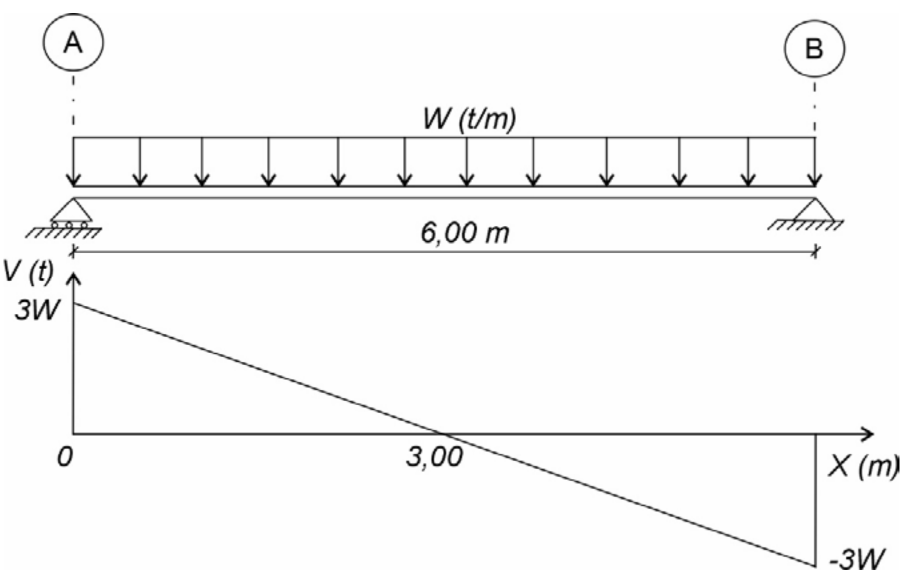


Figura 3.2
Diagrama de fuerza cortante (V) en viga con carga uniformemente repartida W.

Es decir que, el cortante es cero a $x=3$ m del apoyo A o del apoyo B, luego los estribos van hasta una distancia menor a 3,00 m en teoria, dado que el concreto puede soportar un pequeño. Está es una de las muchas aplicaciones que tiene el concepto de función en la ingenieria civil.

3.2 Relaciones circulares

Consideramos un ángulo A en posición normal respecto del sistema de coordenadas rectangulares y tracemos, con centro en el origen, una circunferencia de radio $r > 0$, que corta al lado terminar del ángulo en un punto B(x,y), como muestra la Figura 3.3.

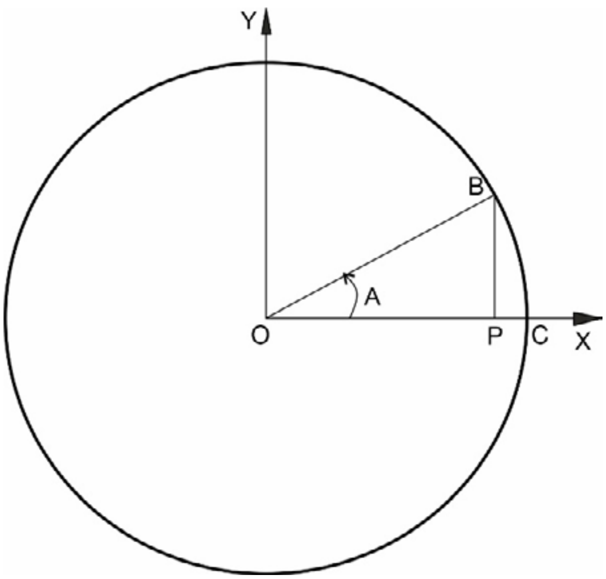


Figura 3.3
Relación circular del seno del ángulo A.

Desde B tracemos $\overline{BP}$ perpendicular $\overline{OC}$ en el punto P, llamese seno del arco BC o del ángulo A, a la relación $\overline{BP} / \overline{OP}$, es decir: $seno\ A = \overline{BP}/\overline{OP}$.

Sea el ángulo A de la Figura 3.4, dado por el arco BC con un con un radio cualquiera $r > 0$, el desde C levantamos $\overline{CT}$ perpendiculares a $\overline{OC}$ que interseca a $\overline{OB}$ en T.

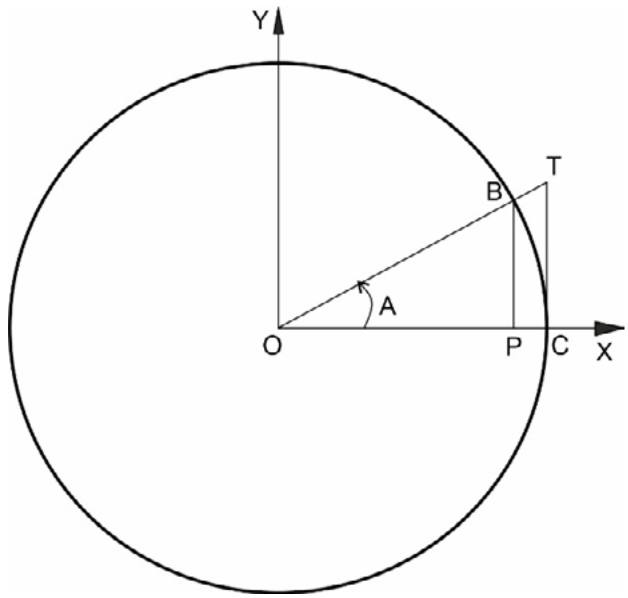


Figura 3.4
Relación circular de la tangente del ángulo A.

Llamese tangente del arco BC o del ángulo A, la relación $\overline{CT}\,/\,\overline{OC}$, es decir:

$$tangente\ A = \overline{CT}\,/\,\overline{OC},$$

Sea el arco CB, para un radio cualquiera $r > 0$, ver Figura 3.5, si desde C levantamos $\overline{CT}$ perpendicular a $\overline{OC}$ que intersecta a $\overline{OB}$ en T.

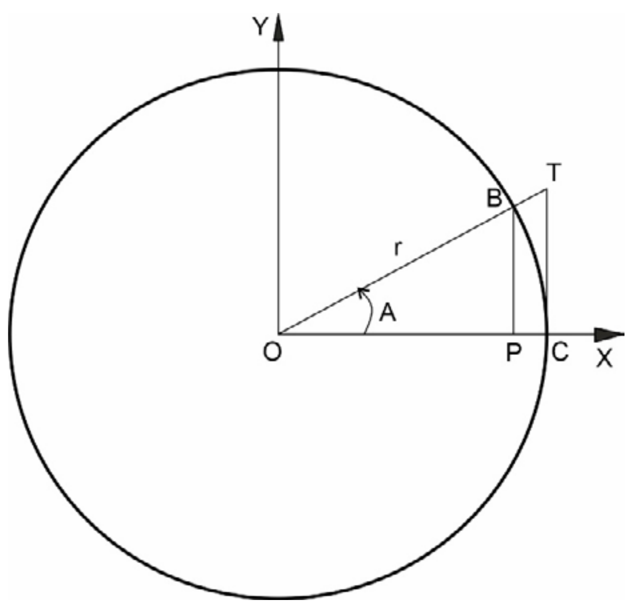


Figura 3.5
Relación circular de la secante del ángulo A.

Llamese secante del arco CB o del ángulo A, como la relación $\overline{OT}/\overline{OC}$, es decir que: $tangente\ A = \ \overline{OT}/\overline{OC}$,

Las relaciones seno, tangente y secante de un ángulo A se puede abreviar de la siguiente forma: seno A con *sen A*. tangente A como *tan A* y secante A como *sec A*. Mediante triangulos se puede demostrar que las relaciones dadas, son independientes del punto B de coordenadas (x, y) que se escoge en el lado terminal de A. Por conveniencia tomaremos el radio de la circunferencia igual a uno (1), ver Figura 3.6.

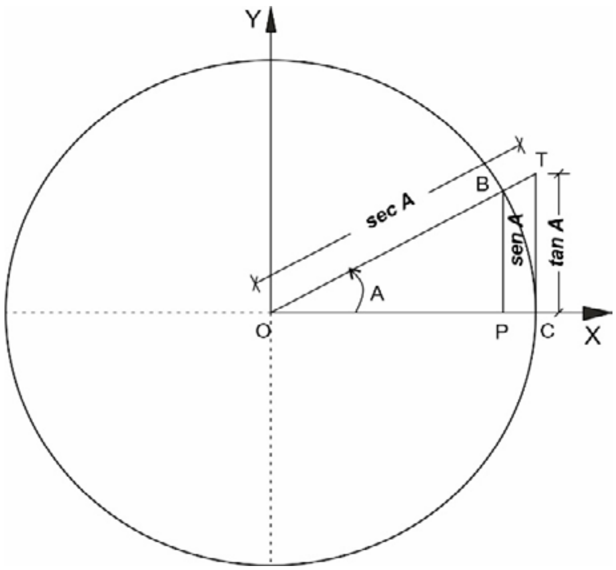


Figura 3.6
Relación circular del seno, tangente y secante del ángulo A.

Es decir que las relaciones indicadas graficamente se vuelven: *sen A*= $\overline{BP}$, *tan A*= $\overline{CT}$ y *sec A* = $\overline{OT}$. Veamos que la relación *sen A*, *tan A* y *sec A* son funciones circulares.

3.3 Funciones Circulares

3.3.1 Variaciones de la función Seno

Sea un circulo con centro en el origen de coordenadas ver Figura 3.7, cuyo radio $\overline{OA}$ = 1. Tracemos dos diametros perpendiculares AA' y BB' que dividen al circulo en cuatro sectores iguales llamados cuadrantes. Supongamos que el radio $\overline{OA}$ gira alrededor del punto O, en la dirección AB; cuando $\overline{OA}$ llegue a la posicion OM, habrá engendrado el ángulo AOM, la posición $\overline{OA}$ es el lado inicial donde empieza a medirse el arco AOM, hasta el lado terminal, o sea OM.

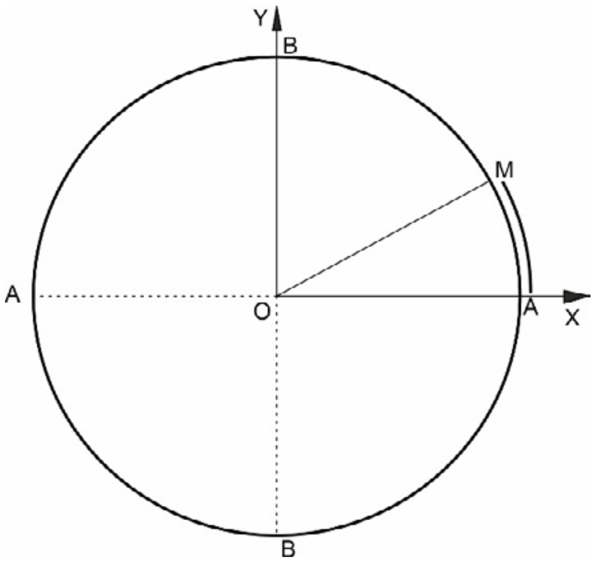


Figura 3.7
Circulo definido en un sistemas de coordenas con centro en el origen de coordenadas.

El radio $\overline{OA}$ en su movimiento de rotación habrá engendrado un ángulo de 90° cuando coincide con $\overline{OB}$; de 180° cuando coincida con $\overline{OA'}$; de 270° con $\overline{OB'}$; y de 360° cuando vuelva a su posición inicial. Observece que cuando el radio $\overline{OA}$ vu$\overline{OA}$a a coincidir con $\overline{OB}$ habrá engendrando un ángulo de 450°, y asi sucesivamente podremos continuar. Si el radio $\overline{OA}$ gira en sentido opuesto, los ángulos recorridos se consideran como negativos.

En la Figura 3.8 es representado el seno de un arco AM o del ángulo AOM. Se considera el seno como positivo cuando se encuentra encima del diametro $\overline{AA'}$, y negative cuando está debajo.

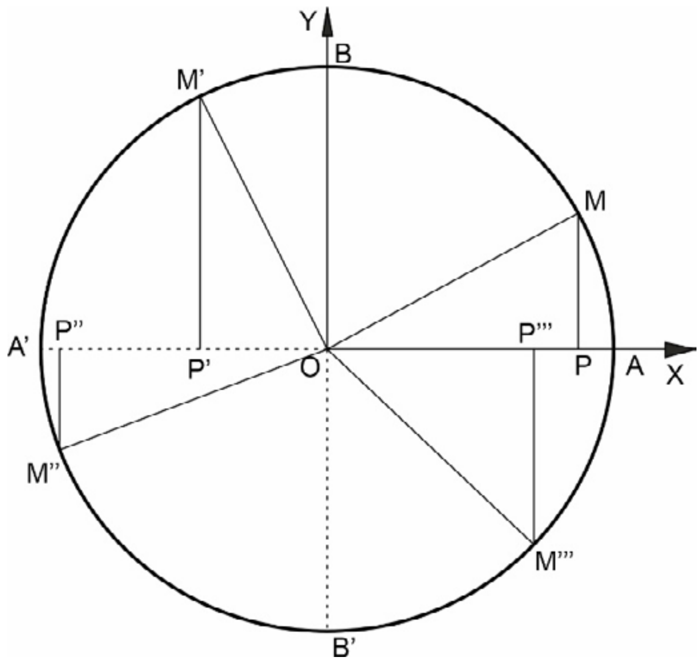


Figura 3.8
Variación de la función seno.

Por consiguiente, el seno es positive en los dos primeros cuadrantes, y negativo en los otros dos. Cuando el punto movible M esta en A, el seno es igual a cero, es decir que el seno (0)° = 0; si M se mueve en el sentido ABA'B', el seno MP va aumentando, y su valor es 1 cuando M llega a B, luego el seno (90)° = 1. En seguida disminuye y es igual a M'P' cuando M esta en M'; cuando M esta en A', el seno es igual a cero, es decir que el seno (180)° = 0 siguiendo M su camino de AA', el seno resulta negativo; al llegar M al punto M'', el valor del seno es – M''P''; es igual a -1 cuando el punto movil esta en B' es decir que el seno (270°) = –1; luego aumenta y es igual a 0 cuando M vuelve a A, entonces sen (360°) = 0, es decir que el sen (0°) = sen (360°) = 0. Si M sigue su recorrido encontraremos que el sen (450°) = sen (90°) = 1, sen (540°) = sen (180°) = 0 y asi sucesivamente.

Lo anterior puede ser generalizado por:

$$sen\ A = sen\ (A + 2n\pi) \text{ para cualquier } n \tag{5}$$

Estos es posible ya que los valores de la relación *sen A* se repite en intervalos de longitud es 2π. Por lo tanto el seno A puede variar entre -1 y $+1$, tomando todos los valores comprendido entre estos dos limites. Sabemos que la gráfica de cualquier función consiste en el conjunto de todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la relación dada. Para obtener las gráficas de las funciones circulares, haremos *y* igual a cada función, para el tranzado de la gráfica de la ecuación resultante, se empleará las variaciones de cada función, como se a discutido.

Para graficar la función circular *seno x*, haremos $y = sen\ x$, esta grafica consiste en el conjunto de todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen $y = sen\ x$, donde *x* y *y* son número reales, el significado de esta función es que cuando *x* varia, se obtiene el valor correspondiente *y* en radianes. Así, si $x = \pi / 3$, $y = sen\ \pi / 3 = 0,87$; si $x = \pi / 6$, $y = sen\ \pi / 6 = 0,50$; y así sucesivamente. Por conveniencia, a menudo el punto $\pi = 3,1416...$ puede ser asumido como x = 3,14. Por la periodicidad de la función *sen x* (sección 3.3.1) la parte de gráfica obtenida así, puede repetirse indefinidamente a la derecha y a la izquierda, para obtener la gráfica completa; para nuestro caso analizaremos los intervalos desde *0* a *2π,* ver Figura 3.9.

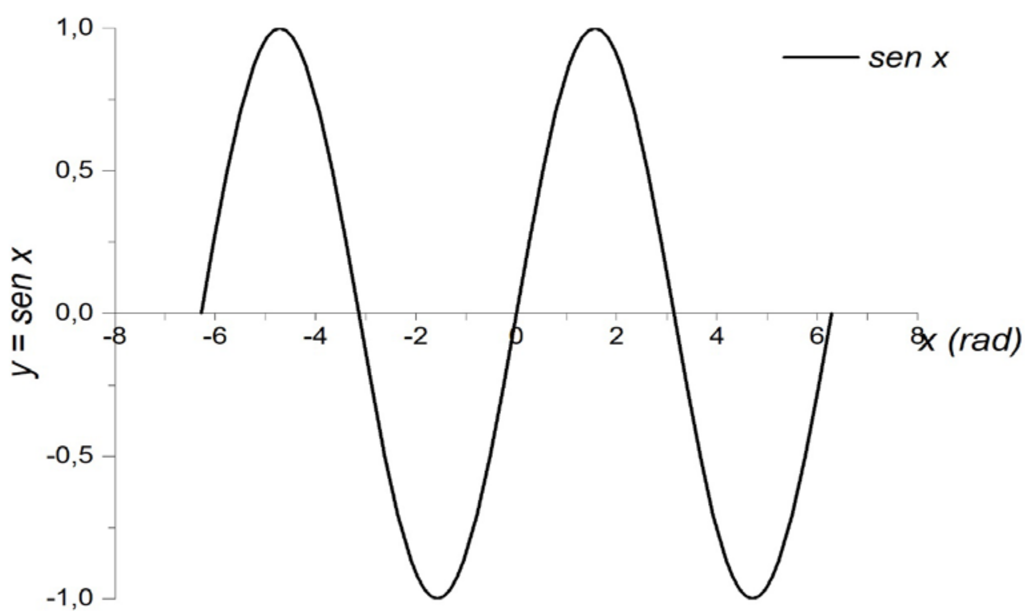


Figura 3.9
Función seno en el intervalo [-2π, 2π].

3.2.2 Variaciones de la función tangente

Sea $\overline{AT}$ la tangente del arco AM, o del ángulo correspondiente AOM, ver Figura 3.10. Por convención, la tangente es positive cuando el radio $\overline{OM}$ prolongado encuentra a $\overline{TT}$ se encuenra encima de $\overline{AA}$, y negative cuando lo encuentra debajo. Luego, la tangente es positiva en los cuadrantes 1 y 3, y negative en los otros dos.

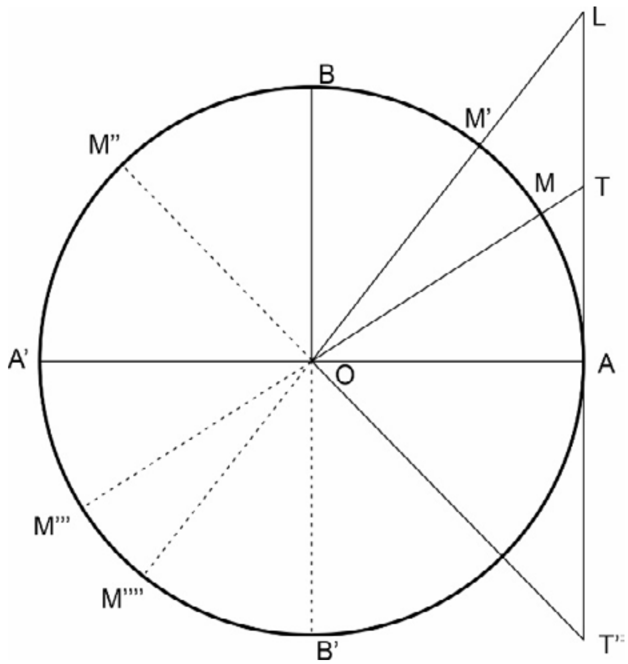


Figura 3.10
Variación de la función tangente.

Cuando el punto movil está en A, la tangente es igual a cero, luego *tan (0) = 0*; siguiendo M la dirección ABA'B', la tangente aumenta en el tramo AB, observamos que cuando el punto móvil está en M la tangente valdrá AT y cuando M esta en M' la tangente valdra $\overline{AL}$, donde $AL > AT$. Luego si M se acerca cada vez más a B la tangente se acercará cada vez mas a $+\infty$, es decir cuando M esta en B la tangente aumenta a $+\infty$; tan pronto como M pase del punto B, la tangente se hace negative y pasa sin transición de $+\infty$ a $-\infty$, y en seguida se disminuye su valor absoluto, hasta hacerse cero cuando M se encuentre en A', es decir que *tan (180°) = 0*; observece que cuando M estaba en M'' la tangente valdrá –AT'' e ira disminuyendo en valor absoluto a medida que se acerque a A'. Siguiendo su movimiento el punto M, la tangente cambia de signo y crece constantemente; su valor es AT cuando el punto movible esta en M''; luego aumenta hasta $+\infty$ cuando M está en B', y de repente pasa por segunda vez de $+\infty$ a $-\infty$; en fin, disminuye su valor absolute hasta 0 cuando M vuelve a A, es decir que $tan\ (360°) = tan\ (0°) = 0$. Si M sigue su recorrido encontraremos que $tan\ (450°) = tan\ (180°) = 0$ y así sucesivamente.

Lo anterior puede ser generalizado asi:

$$tan\ A = tan\ (A + n\pi) \text{ para cualquier } n \tag{6}$$

Estos es posible ya que los valores de la relación *tan A* se repitan en intervalos de longitudes π. Por lo tanto, la tangente puede variar entre $+\infty$ y $+\infty$ tomando todos los valores posibles, positivos o negativos. Notese que estos valores máximos y mínimos se consiguen cuando el punto móvil se encuentra en cualquiera de las siguientes posiciones, $\pi/2 = 3\pi/2 - 5\pi/2...$.

Para graficar de $y = tan\ x$, según lo que acabamos de ver en la variación del ángulo para $0 < x < \pi$, y empleando nuestro conocimiento sobre el comportamiento de la función tangente para los valores de x próximos a $\pi / 2$. Si la posición de la curva obtenida así para $0 < x < \pi$ se continua en ambas direcciones (ver sección 3.3.2 y 3.3.3.) el periodo de la *tan x* es π, es posible obtener la curva tangente, ver Figura 3.11.

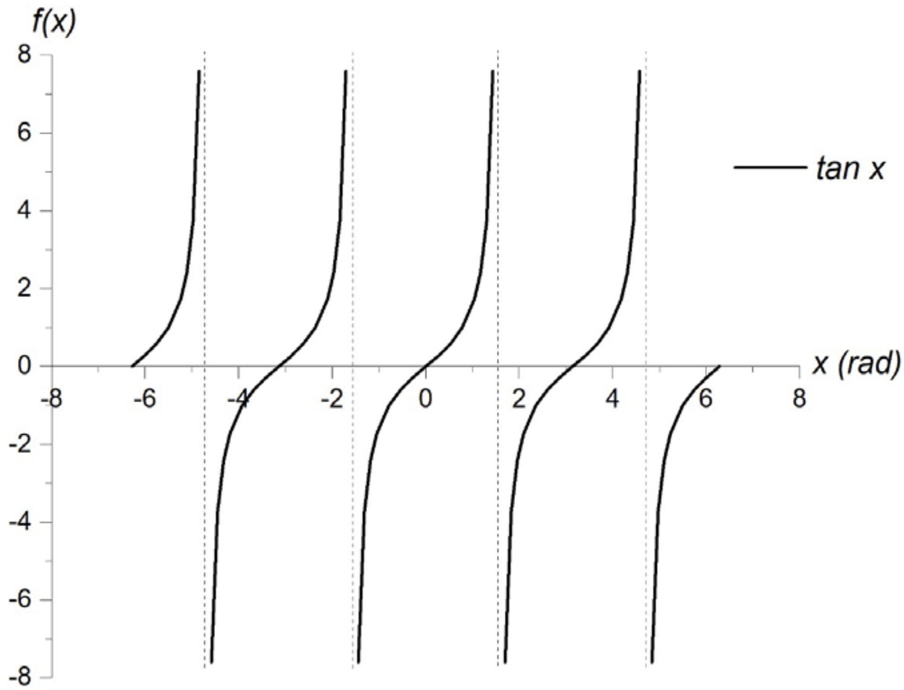


Figura 3.11
Función tangente en el intervalo [-2π, 2π]

3.3.3 Variaciones de la función secante

Sea $\overline{OT}$ la secante del arco OM, o del ángulo correspondiente AOM, ver Figura 3.12 por convención, la secante es positive cuando resulta a la derecha del diámetro $\overline{BB'}$, y como negativa cuando está a la izquierda. Luego, la secante es positive en los cuadrantes 1 y 4, y negative en los otros dos.

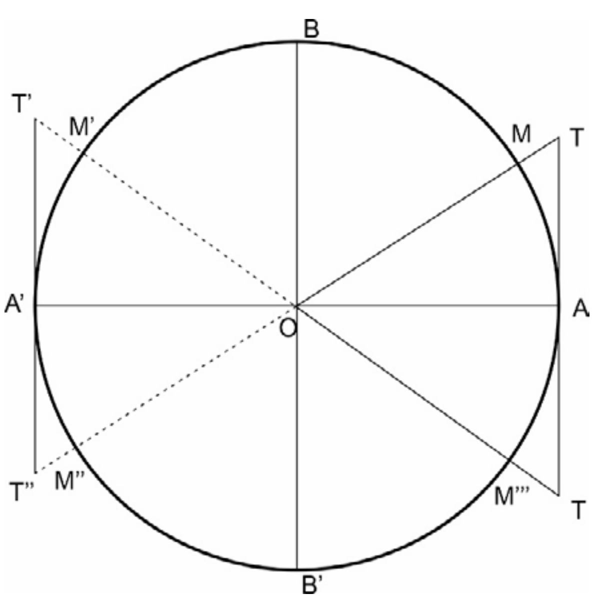


Figura 3.12
Variación de la función secante.

Cuando el punto movil M se encuentra en A, la secante es igual a 1, es decir que *sec (0°) = 1*; al recorrer la circunferencia en el sentido ABA'B'. El punto movil M, observamos que, cuando M se encuentra en el punto M la secante valdrá OT > 1, es decir que la secante aumenta en el arco AB, haciendo *+∞* cuando el punto móvil M se encuentra en B; cuando M pasa del punto B, la secante se hace negativa y pasa sin transición de *+∞* a *–∞*. En seguida empieza a disminuir su valor absoluto; cuando M está en M' la secante será OT' donde *–∞ < OT < –1* y cuando llega a A' la secante será *–1*, es decir *sec (180°) = – 1*; al seguir su recorrido el punto movible M obtenemos que la secante será OT' cuando M se encuentre en M'', y que *[OT''] > 1*, es decir que la secante aumenta en valor absoluto en el arco A'B', haciendose *–∞* cuando el punto móvil M se encuentra en B'; cuando M pasa del punto B', la secante se hace positive y pasa sin transición de *–∞ +∞* y en seguida empeza a disminuir cuando M se encuentra M''' la secante será OT'''>1 pero OT''<*+∞* y cuando M llega a A la secante será nuevamente 1, es decir que *sec (360°) = sec (0°) = 1*. Si M sigue su recorrido encontraremos que *sec (540°) = sec (180°) = –1* y así sucesivamente. Lo anterior puede ser generalizado por:

$$\sec A = \sec\,(A + 2n\pi) \text{ para cualquier } n \tag{7}$$

Estos es posible ya que los valores de la relación secante se repiten en intervalos de longitud *2π*. Por lo tanto, la secante puede variar entre *+∞* y -∞, tomando todos los valores posibles, positivos o negativos. Notese que estos valores donde se presenta *+∞* y *–∞* se consiguen cuando el punto móvil se encuentra en cualquiera de las siguientes posiciones: *π/2, 3π/2, 5π/2, ……, π/2+ππ* donde *n* pertenece a los enteros. La gráfica de la función *sec x* pueden obtenerse también de la misma manera que las funciones *sen x* y *tan x*; veamos a continuación en la Figura 3.13 la función secante.

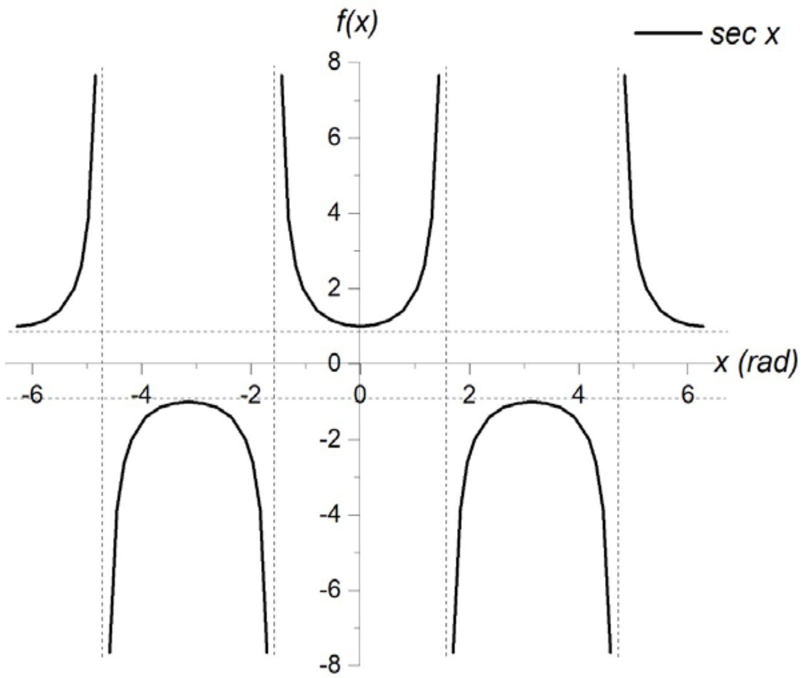


Figura 3.13
Función secante en el intervalo [-2π, 2π].

3.3.4 Consideraciones

Es posible saber si una relación es función, aplicando la definición de función. Analizaremos la relación circular *sen x*, obtenemos que el dominio de la relación *sen x* es el conjunto de partida R y el conjunto de imagenes es el intervalo *[–1,1]*, según la relación 3.3.1. además, cada real del dominio tiene imagen única en el codiminio, luego la relación circular *sen x*, es una función circular y la notaremos *f(x) = sen x*.

Veamos si la relación tangente es una función: sea la relación *f(x) = tan x*.

$$F: R^{*} \longrightarrow R; \text{ donde } R^{*} = R - \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \text{ donde } n \in \mathbb{Z}.$$

Esta restricción que se hace al dominio de la relación *tan x*, es por que la tangente no esta definida en dichos puntos (ver sección 3.3.2.); es decir, dichos valores de x debemos eliminarlos del conjunto R por que la relación tangente x sea una relación funcional o una función circular, puesto que cada elemento del dominio, debe tener imagen única en el conjunto de llegada o recorrido.

En forma similar se puede definer la función *sec x*, así:

$$F: R^* \longrightarrow R; \text{ donde } R^* = R - \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \text{ donde } n \in \mathbb{Z}.$$

Para mayor claridad de la restricción hecha al dominio de la relación circular *sec x*, (ver sección 3.3.3). En el presente trabajo cuando se haga referencia a las funciones circulares estaremos refiriendonos a las funciones *sen x, tan x* y *sec x*, a menos que se diga lo contrario.

3.4 Cofunciones.

Existen otros tipos de funciones (funciones circulares) llamadas "cofunciones" es decir, las funciones definidas para el ángulo complementario se conocen como co-funciones y así, la cofunción de la función seno, es el coseno, la cofunción de la función tangente es cotangente y que a cofunción de la función secante es la cosecante definidas de la siguiente forma. Sea un circulo de radio 1, vease la Figura 3.14.

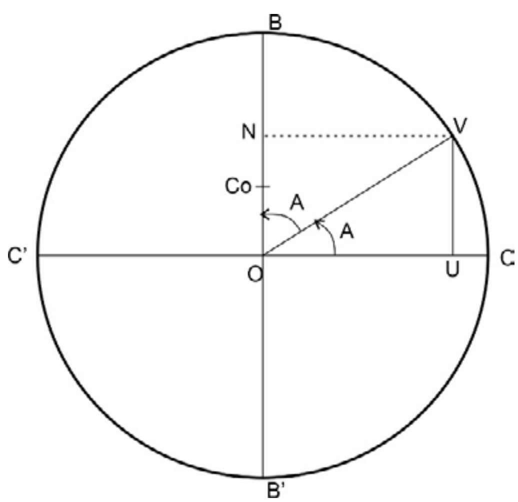


Figura 3.14
Variación de la función coseno.

Tracemos dos diametros perpendiculares $\overline{CC'}$, $\overline{BB'}$ que dividen el circulo en cuatro sectores iguales llamados cuadrantes, y V un punto cualquiera que se encuentra sobre la circunferencia de *r = 1*, desde V trazamos VU perpendicular a $\overline{OC}$, llamese coseno del arco VC, la relación $\overline{OU}/\overline{OV}$, es decir: coseno A = $\overline{OU}$ ya que OU = r = 1.

Sea el ángulo A de la Figura 3.15, dado por el arco VC con un radio *r = 1*, si desde B trazamos una paralela $\overline{CC}$ que corte a $\overline{OV}$ en el punto T, llámese cosecante del arco VC o del ángulo A, a la relación $\overline{OT}/\overline{OV}$, es decir: cosecante A = $\overline{OT}$ ya que OV = R = 1

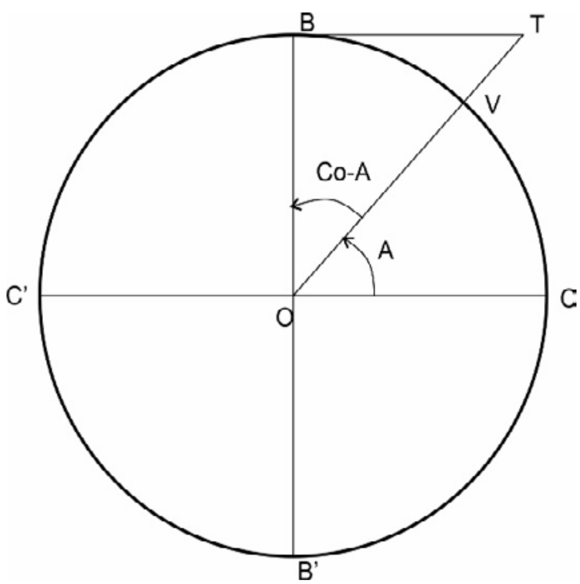


Figura 3.15
Variación de la función cosecante.

Llámese cotangente del arco VC o de ángulo A, a la relación BT/OV vease la Figura 3.16, es decir; cotangente A = $BT\,/OV$ ya que OV = r = 1

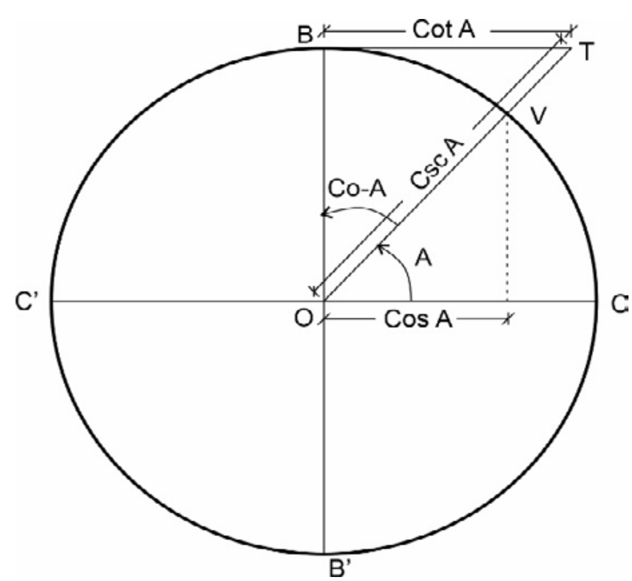


Figura 3.16
Variación de la función cotangente.

Las relaciones coseno A, cosecante A y cotangente A pueden abreviarse de la siguiente forma: coseno A como *cos A*, cosecante A como *cosec A*, cotangente A como *cot A*. Mediante triángulos se puede demostrar que las relaciones dadas, son independientes del punto V de coordenadas (x, y) que se escoge en el lado terminal de A. Nótese que la convergencia se ha tomado con $r = 1$ pero puede ocurrir que $r > 0$ para cualquier r, veamos las relaciones: coseno A= $\overline{OU}$, cosecante A= $\overline{OU}$ y cotangente A= $\overline{CT}$, vease la Figura 3.16.

3.5 Cofunciones Circulares.

3.5.1. Variaciones de la cofunción del seno:

Sea $\overline{OP}$ el coseno del arco AM o del ángulo correspondiente AOM, Figura 3.17. Se ha convenido en considerar el coseno positivo cuando esta a la derecha de diámetro $\overline{BB'}$, y como negativo cuando está a la izquierda. Por consiguiente, el coseno es positivo en las coordenadas 1 y 4, y negativo en las otra dos. Cuando el punto M está en A, el coseno es igual a 1. Si el punto M recorre la circunferencia en sentido antihorario el coseno disminuye y se hace cero cuando llega al punto B; luego cambia el signo, y aumenta en valor absoluto; –OP'' cuando M se localiza en el punto M'', –1 cuando M a llegado hasta el punto A'.

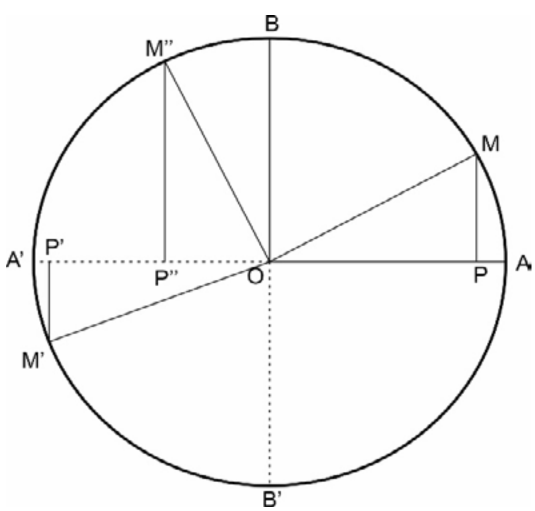


Figura 3.17
Variación de la función circular coseno.

Siguiendo M su camino, el coseno es negativo y disminuye en valor absoluto, hasta O cuando M está en B, luego aumenta y se hace igual a 1 cuando M llega a A. así pues, el coseno puede variar entre *–1* y *1* tomando todos los valores correspondientes entre estos dos limites. Ahora bien si observamos *cos (0°) = cos (360°) = 1*, si M sigue su recorrido encontraremos que *cos (450°) = cos (90°) = 0* y así sucesivamente. Lo anterior puede ser generalizado por: *Cos A = cos (A+2nπ)* para cualquier *n,* ya que los valores de la relación coseno A se repite en intervalos de longitud *2*π En la Figura 3.18 se ilustra la cofunción coseno de *x*, recuerde que $\cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

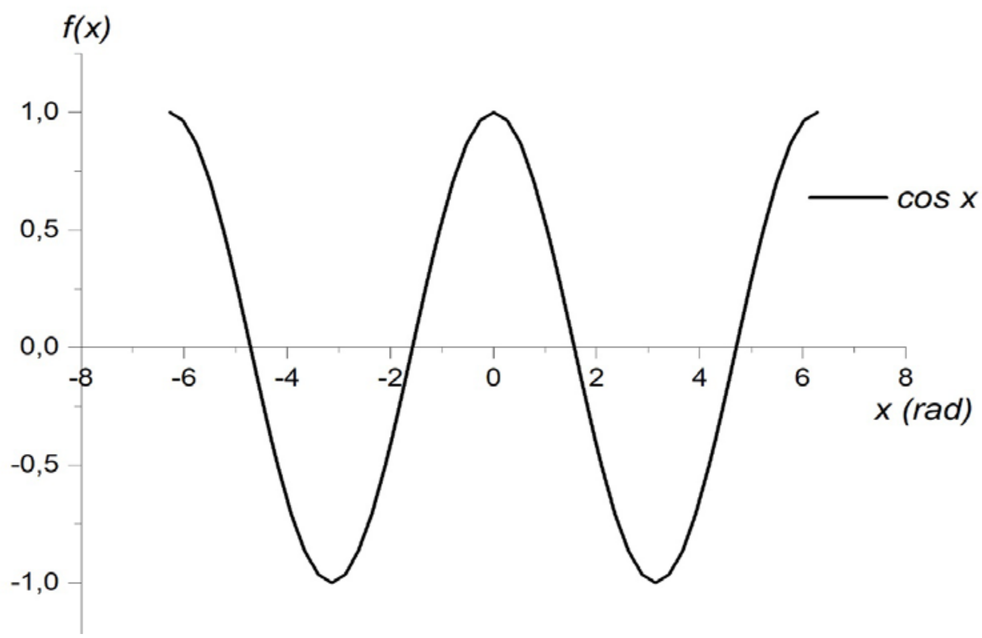


Figura 3.18
Variación de la función coseno

3.5.2 Variaciones de la cofunción de la tangente

En lugar de estudiar el comportamiento de la cofunción cotangente A como la cofunción coseno A, haremos un análisis mucho más sencillo y didáctico. Sea el arco *CM = A*, ver la Figura 3.19, los triángulos *TCO* y *TBO* son semejantes, por ser rectángulos, y el ángulo *TOC* del uno es igual al ángulo *BTO* del otro. Luego se tiene que: $\overline{TB}/\overline{OB} = \overline{OC}/\overline{CT}$ ó *cot A/1=1/tan A* , es decir que, *cotA = 1/tan A*. Así pues, la tangente A es reciproca de la cotangente A y viceversa, por lo tanto, las variaciones de la cotangente dependen de las tangente.

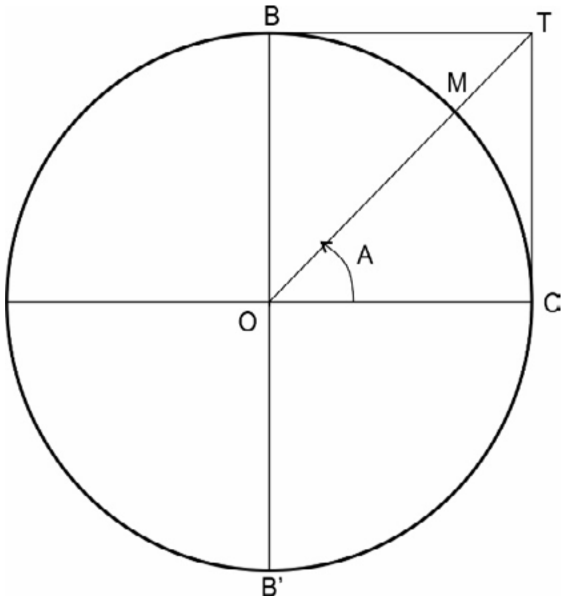


Figura 3.19

Variación de la función circular cotangente.

En la relación *cotan A = 1 / tan A*, siendo invariable el numerador *1*, el signo de la cotangente A dependerá del de la tangente A. Luego la cotangente, así como la tangente, será positiva en los cuadrantes 1 y 3, negativa en los cuadrantes 2 y 4. De esta relación podemos deducir que cuando la tangente A aumenta, la cotangente A disminuye, es decir que cuando la *tan A* es ∞, la *cotan A* es *0*, y cuando la *tan A* es *0*, la *cot A* es ∞. Por lo tanto, la *cot A* así como la *tan A*, puede tomar todos los valores posibles. Para la relación *cot A* se cumple que:

$$\cot A = \cot\,(A + n\pi) \text{ para cualquier } n \qquad (8)$$

ya que *cot A = 1/Tan A*. Nótese que la *cot A* tiende a ∞ cuando la *tan A* tiende a cero, para *0, π, 2π, 3π, …… nπ*, donde *n* pertenece a los enteros. La Figura 3.20 ilustra la variación de la cofunción *cot x*; recuerde que *cot X = tan(π/2 – x),* por lo tanto, seria la tan *x* desplazada *π / 2* a la derecha.

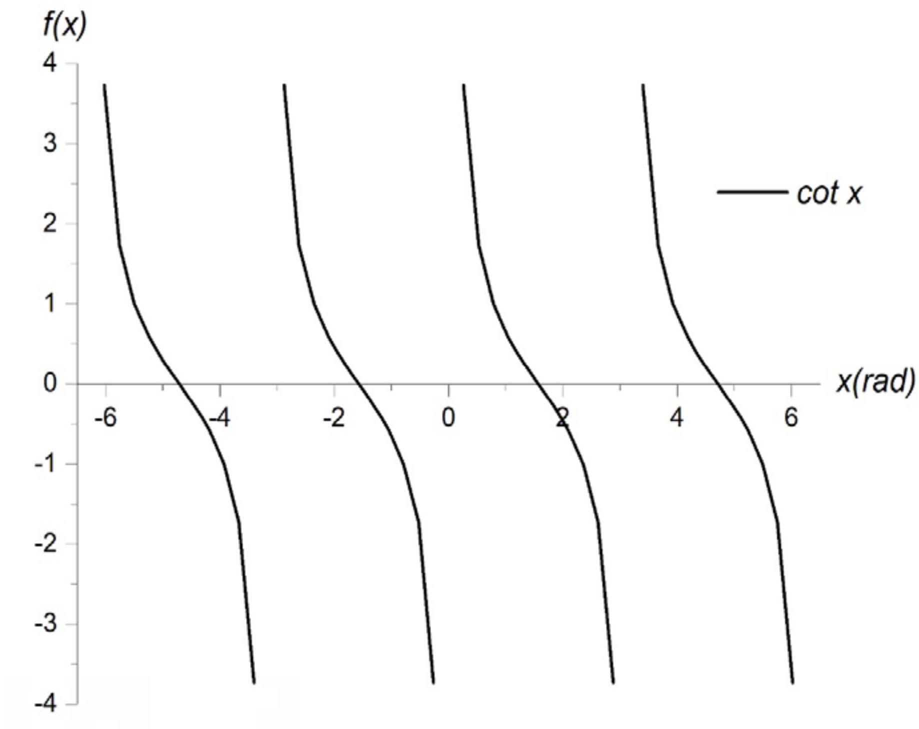


Figura 3.20
Función cotangente en el intervalo [-2π, 2π]

3.5.3 Variaciones de la cofunción de la secante

Sean los triángulos rectángulos semejantes SBO y MQB, ver la Figura 3.21 dónde: $\overline{OS}/\overline{OM} = \overline{BO}/(\overline{QO}$ o $\overline{MP})$ o $cosec\ A/1 = 1/senA$ luego, $cosec\ A = 1/sen\ A$. Es decir la cosecante A es lo inverso del seno A y sus variaciones dependen de las del seno A.

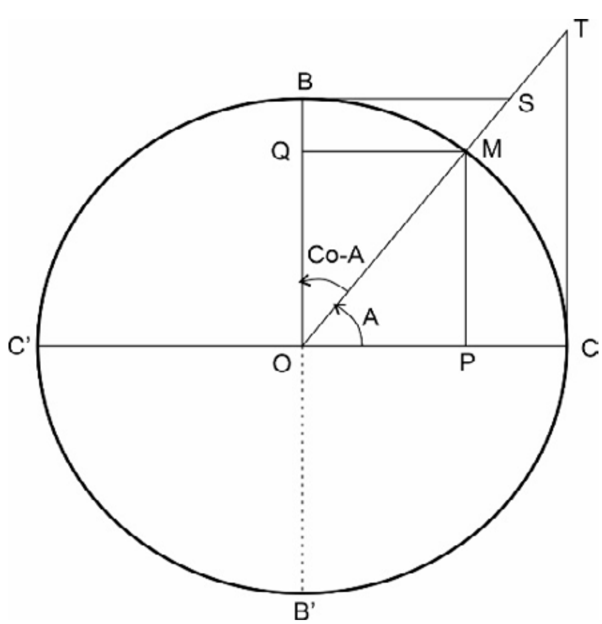


Figura 3.21
Variación de la función circular cosecante.

El signo de la cosecante A es el mismo que el del seno A, y como este es positiva en los cuadrantes 1 y 2, negativa en los dos restantes. Cuando el seno A es *0*, la cosecante A es también *1*, cuando el seno A es *0*, la cosecante A es ∞ luego:

$$cosec\ A = cosec(A + 2\pi/n) \text{ para cualquier } n \qquad (9)$$

Por lo tanto la cosecante A puede tomar valores entre *1* y *+∞*, *–1* y *–∞* tomando todos los valores posibles, positivo o negativo. Nótese que estos valores máximos y mínimos se consiguen cuando el punto móvil M se encuentra en cualquiera de las siguientes posiciones: 0 = π = 2π = 3π,...,nπ donde n ∈ Z. La cofuncion *cosec x* es lo mismo que *cosec(x + π/2)*, la cual ya sabemos su variación (ver sección 3.3.3) y su representación se da a continuación

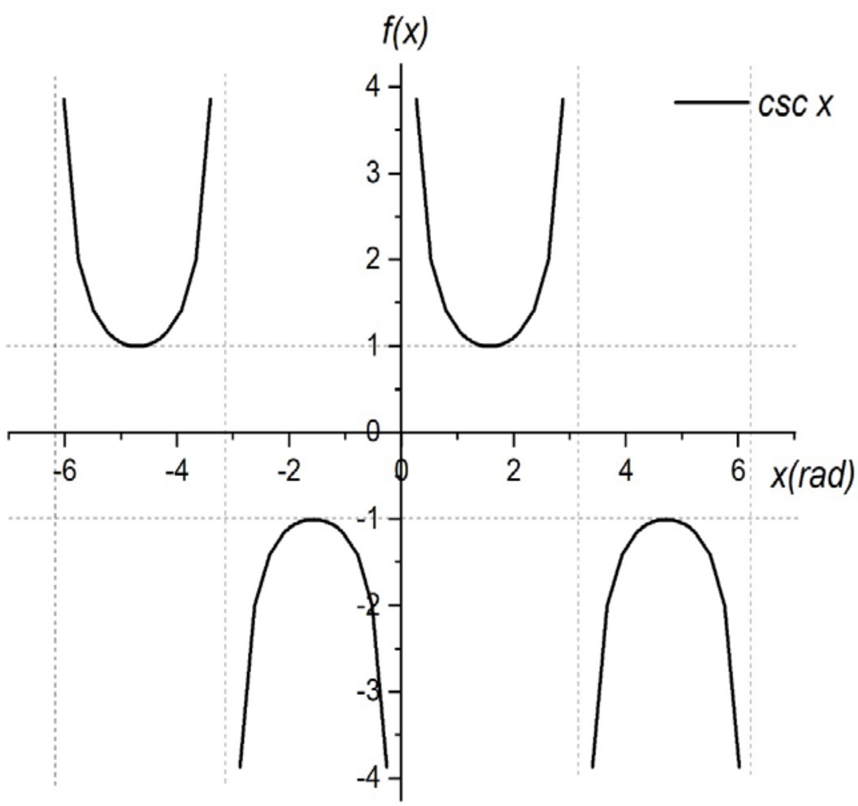


Figura 3.22
Función cosecante en el intervalo [-2π, 2π].

3.6 Valores principales de las funciones y cofunciones circulares

El signo de las funciones circulares depende de los diferentes cuadrantes, ya que cada función está definida como positivo o negativo dependiendo del cuadrante en que se encuentre, ver secciones 3.3 y 3.5. En el siguiente cuadro se indican los signos de las funciones y cofunciones.

Tabla 1.

Signo de las funciones y cofunciones respecto a los cuadrantes cartesianos.

Función	**Cuadrante**			
	I	**II**	**III**	**IV**
seno A	+	+	-	-
tangente A	+	-	+	-
secante A	+	-	-	+
Cofunción				
coseno A	+	-	-	+
cotangente A	+	-	+	-
cosecante A	+	+	-	-

Ejemplo: En la colina de Santa Elena que domina el valle de Medellín se levanta una torre para conexión inalambrica gracias a un plano topográfico de la zona se tiene la cuota baja y alta de la colina, es decir 1142 m y 1184 m respectivamente. Se desea saber la altura necesaria de la Torre para que el ángulo de elevación desde la alcaldía distante 785 m sea de 15°42', ver Figura 3.23. Nota tenga en cuenta que la alcaldía se encuentra ubicada a una altura de 1153 m sobre el nivel del mar.

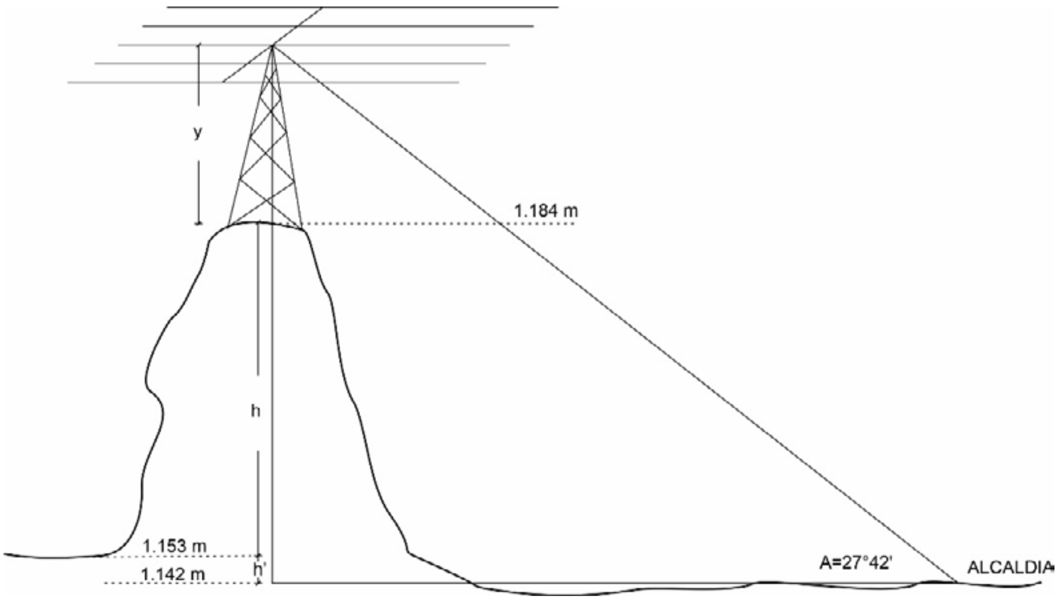


Figura 3.23
Altura de torres de transmisión.

La *tan A*, para *A = 27°42'; Tan A = (H + y)/785; h = 1184 – 1153 = 31*m y *v* es la altura de la torre (m). Luego $\tan(15°42') = \frac{31+y}{785}$; $y = 189{,}65$ m. Luego no es aconsejable tener un ángulo de elevación *A* grande a una pequeña distancia ya que una torre de semejante altura es costosa e innecesaria.

Ejemplo: Para medir la distancia de un punto *D* a un punto inaccesible *B*, se ha tomado como base *C=80* m perpendicular a *B*; calcular la distancia *B* si el ángulo *DCB* es de *48°25'*, ver Figura 3.24.

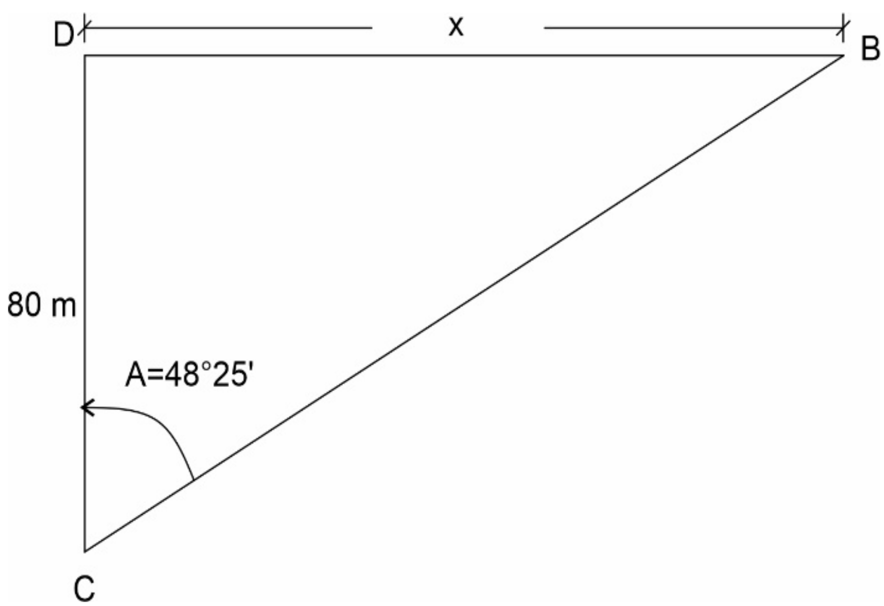


Figura 3.24
Distancia entre dos posiciones.

La función trigonométrica *tan A*, obtenemos que: *tan A = X/80; X = 80 tan (48°25´) = 90,16 m* m. Luego la distancia entre los dos puntos inaccesibles *D* y *B* es de *90,16* m.

3.7 Propiedades de las funciones circulares

Se puede estudiar una gran cantidad de propiedades de las funciones circulares considerando los efectos sobre las gráficas de ciertos cambios en las variables. En particular consideramos las siguientes propiedades: translación y reflexiones; estás propiedades son básicas en las demostraciones del teorema 4.8 1.3.

3.7.1 Translación

Sea el punto *(m, n)* las coordenadas de un punto sobre la gráfica de $y = F(x)$, entonces el punto $(m+a, n)$ resulta en la traslación de la gráfica a una distancia a en la dirección de las *x* positivas y es equivalente sobre la gráfica de $Y = f(x - a)$, cómo se verá en el siguiente ejemplo. Si $a>0$, la translación es hacia la derecha y si $a<0$, la translación es a la izquierda. Es decir que, si una función *f(x)* la variable *x* se reemplaza por $x - a$, el efecto sobre la gráfica de *f (x)* es trasladar la curva una distancia a paralelamente al eje *x*, en la dirección positiva.

Ejemplo: Con lo dado en la sección 3.7.1 puede obtenerse la gráfica $y = \cos(x - \pi)$ trasladando $y = \cos x$ una distancia π hacia la derecha de las abscisas (eje *x*). Una revisión de la Figura 3.18 indicará que está translación produce la gráfica de $y = -\cos x$. También puede presentarse el caso que haya una translación de la curva en la dirección de las *y*, para una distancia c, por una sustitución de *y* por $y-c$, asimismo se puede presentar una translación simultánea de *x* y de *y*.

3.7.2 Rotación

Continuando con las anteriores sustituciones, se puede presentar tres tipos de rotaciones. Sea *(m, n)* un punto del plano, entonces el punto *P1 (–m,n)* se llama su rotación o imagen en el eje *Y*, es decir que, si *x* se reemplaza por *–x* en la ecuación.

$$y = f(x) \tag{10}$$

La ecuación obtenida, es

$$y = f(-x) \tag{11}$$

Es la rotación de la ecuacion (10) respecto al eje Y, así como el punto *P1 (–m, n)* es la rotación o imagen en el eje *Y*. El punto *P2 (m, –n)* es la rotación en el eje *x*, luego si *y* se reemplazará por *–y* en la ecuación (10) se obtendrá la siguiente expresión.

$$-y = f(-x) \text{ o } y = -f(x) \tag{12}$$

Corresponde a la rotación respecto al eje x. Así como existe rotación en el eje *x* y rotación en el eje *y* también existe rotación en el origen; esto se obtiene si al mismo tiempo se sustituyen *x* por *–x* y *y* por *–y* en la ecuación (10), es decir que

$$-y = f(-x) \text{ o } y = -f(-x) \tag{13}$$

Ejemplo: Encontrar la ecuación que se obtiene de realizaar una rotación respecto al origen de coordenadas para $Y = \cos x$.

Para que ocurra una reflexión en el origen se tiene que

$$-y = \cos(-x) \text{ o } y = -\cos(-x)$$

Pero como la función cos x es una función par, $y = -\cos(-x)$.

Ejemplo: Deducir la ecuación obtenida de $y=\cos x$ por una contracción en la dirección de las x en la razón 1:3, seguida de una translación en la dirección de la x de $\pi/6$ unidades a la derecha y luego seguida de una rotación en el eje x.

Ecuación original	$y = \cos x$
Contracción en x en razon 1:3	$y = \cos 3x$
Traslación π/6 a la derecha de x	$y = \cos 3(x - \pi/6)$
Rotación en el eje x	$y = -\cos 3(x - \pi/6)$

Ejemplo: Describir el cambio de variable o la secuencia de cambios, que conduce de $y = \operatorname{sen} x$ a $y = 3 \operatorname{sen}[2(x - \pi)]$.

Inicialmente se aplica una expansión en la dirección y en una razón 1:1/3.

$$y/3 = \operatorname{sen} x; \quad y = 3 \operatorname{sen} x$$

Una contracción en la dirección x en una razón 1:2

$$y = 3 \operatorname{sen} 2x$$

Una translación en la dirección x de π unidades a la derecha.

$$y = 3 \operatorname{sen} 2(x - \pi) = 3 \operatorname{sen}[2(x - \pi)]$$

3.7.3 Funciones pares e impares

La condición para funciones par e impar consiste en que el cambio de la variable que produce la rotación, dejando inalterada la ecuación y a su vez su representación gráfica. De acuerdo con esto tenemos que: Una función es par si la gráfica de la función $y = f(x)$ rotada con respecto al eje y, se cumple que $f(x) = f(-x)$, entonces $f(x)$ es llamada función par, note que la gráfica al ser rotada con respecto al eje *Y* está no sufre ninguna variación.

Una función es impar si la gráfica de la función $y = f(x)$ rotada con respecto al origen, se cumple que $-y = f(-x)$, así que $f(x) = f(-x)$, entonces $f(x)$ (x) se llama función impar de *x*. Obsérvese que la gráfica al ser rotada con respecto al origen, está no sufre ninguna variación.

Ejemplo: Probar que, para $f(x) = \cos x$, es una función par.

Cómo se puede apreciar en la Figura 3. 18 la variacion de $f(x) = \cos(x)$ y si esta función es rotada respecto al eje *y*, no sufre ninguna variación. Entonces $\cos x$ es una función par de *x* y podemos decir que, $\cos(-x) = \cos x$, para todo *x*. Este mismo análisis se puede realizar para las demás cofunciones y funciones dando como resultado que:

$$\left.\begin{array}{l} \cos x \\ \operatorname{cosec} x \end{array}\right\} \quad \textit{Función par}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x \\ \sec x \\ \tan x \\ \cot x \end{array}\right\} \quad \textit{Función impar}$$

3.7.4 Observaciones

De acuerdo al análisis realizado en las secciones 3.7.1, 3.7.2 y 3.7.3 se pueden concluir aspectos importantes de la trigonometría. Según las herramientas dadas en las anteriores secciones, se puede hallar cualquier cofunción circular. Veamos qué ocurre si a la gráfica de la función $y=\operatorname{sen} x$ la trasladamos $\pi/2$ a la derecha, es decir que *x* ya no será la variable dependiente si no $x - \pi/2$ (ver sección 3.8.1), ver Figura 3.25.

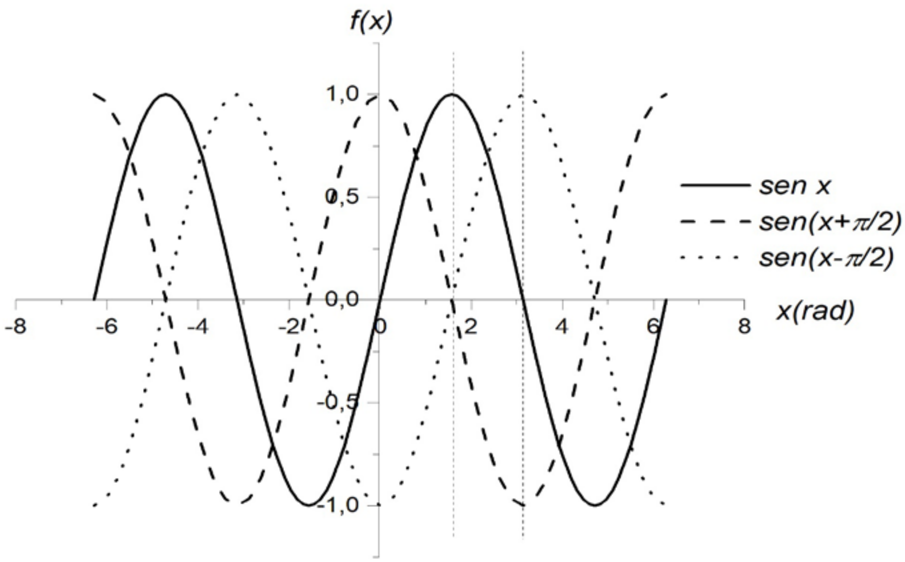


Figura 3.25
Función y = sen(x ± π⁄2).

Nótese que la gráfica de la función *y = sen(x – π/2)* es la misma gráfica de la cofunción del sen x, es decir que *y = cos x*. Analicemos que ocurre si en vez de trasladar *π /2* a la derecha es trasladada a la izquierda; es decir que la gráfica sea *y = sen(x + π/2)* es la cofuncion del *sen x*, es decir rotada respecto al eje *x*. En el caso de la *sec x* ver Figura 3.26, sí es trasladada π*/2* a la derecha, la secante obtenida es,

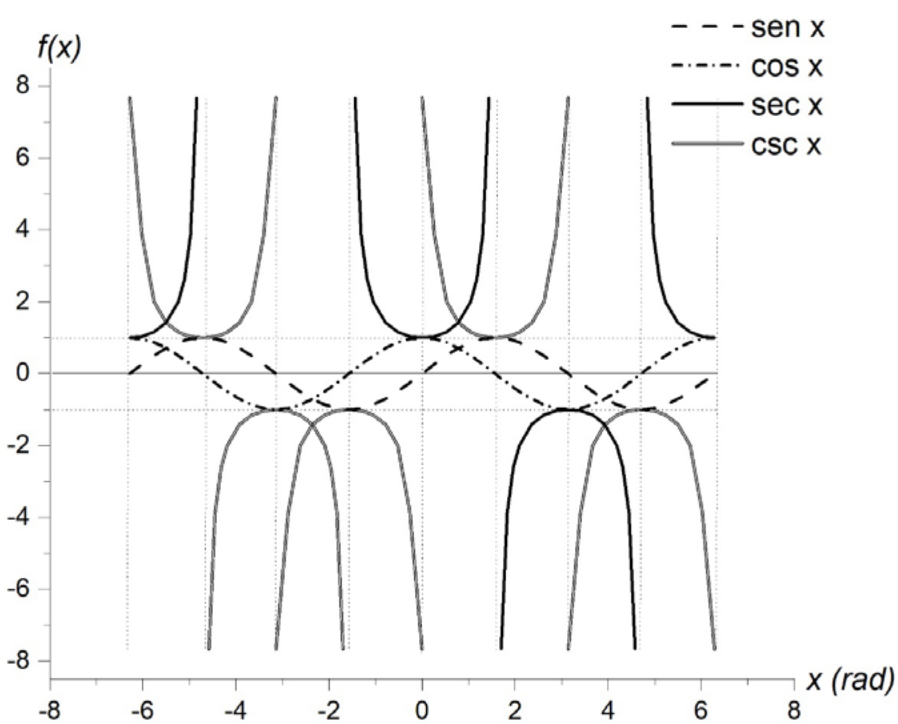


Figura 3.26
Función y = sec(x ± π⁄2).

Luego la *sec x = cosec(x + π/2),* luego la secante es la misma cosecante trasladada π/2 a la izquierda. Las anteriores afirmaciones son también válidas para el caso de la función *tan x* y su cofunción, cómo también para la *sec x* y su cofunción, pero veamos qué ocurre en el caso de la función *tan x*. En el caso de la *tan x*, ver Figura 3.27 si la rotamos con respecto al eje *y*, obtenemos:

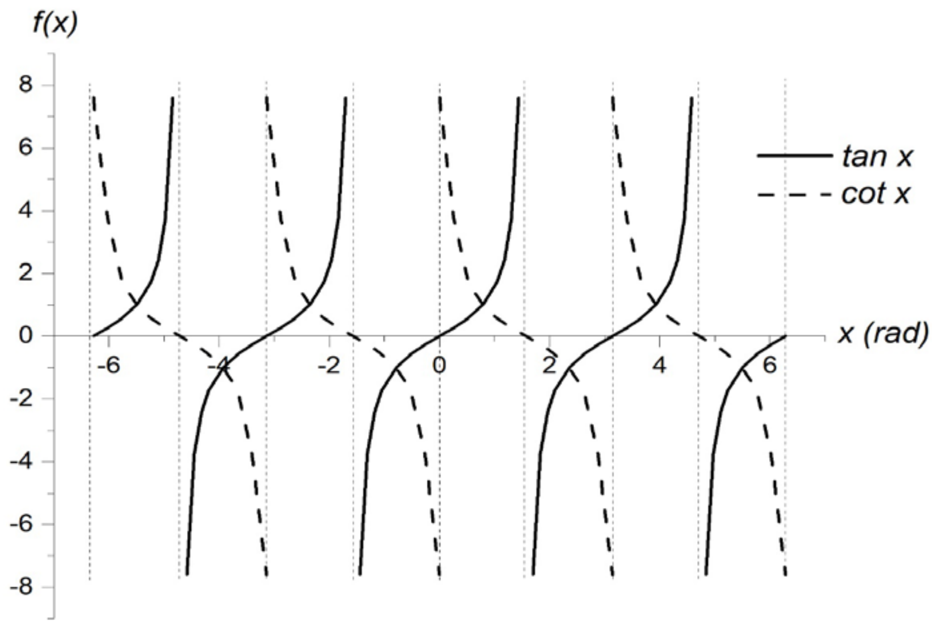


Figura 3.27
Función y = tan(x ± π/2).

Si la *tan x* es rotada con respecto al eje *y*, seria *y=tan x = cot (x – π/2)* luego si transladamos la *tan x* rotada con respecto al eje y una distancia *π/2* a la derecha obtenemos la cofuncion de la *tan x*, es decir *cot x*, es decir *y = – tan(x + π/2)*.

Lo mismo ocurre con la *sec x* y con su cofunción, de lo anterior se puede deducir que:

1. Siempre se va a tener que transladar *π/2* ya sea a la derecha o a la izquierda según sea el caso, observe que siempre será *π/2* porque se quiere ir de la función a la cofunción. Es decir, la cofunción definida por el ángulo complementario, y siempre tendrá que pasar por *π/2*, ver Figura 3.28.

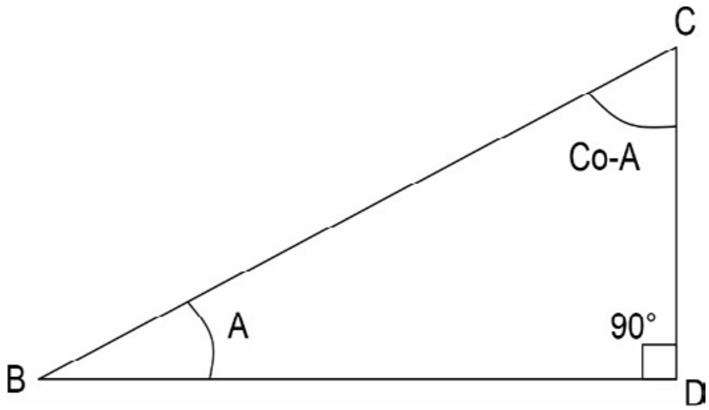


Figura 3.28
Ángulo complementario.

2. La trigonometría se basa en tres funciones que son: el *sen x*, la *tan x* y la *sec x*, ya que de ellas se pueden deducir las demás.

3.8 Funciones circulares inversas

Las funciones circulares no tienen funciones inversas, ya que no son uno a uno. Sin embargo al restringir los dominios, es posible obtener funciones (sobre dominios más reducidos) con el mismo comportamiento de las funciones circulares y que tengan funciones inversas. Garantizaremos la existencia de la función inversa, eligiendo un subconjunto *S* del dominio de una función circular dada, en el cual la función sea creciente o decreciente; téngase presente que en la escogencia de *S* la función tomé todos sus valores.

Veamos la función circular *sen x* en el cual el dominio son los reales y el rango es el conjunto $[-1, 1]$ de números reales en el intervalo. En la función *sen x* no es una función uno a uno, ya que por ejemplo: $sen\ x = 1/2$ para valores de $x = 5\pi/6,\ 7\pi/6$ etc. Es decir que para $sen\ x = 1/2$ existen más valores de *x* tal que se cumplen que $sen\ x = 1/2$, luego no es una función uno a uno. Entonces *sen x* con dominio en los reales y el rango, el intervalo de números reales [–1,1] no tiene inversa. Sea $y = sen\ x$ y si restringimos a x en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ con esto garantizamos que y toma los valores entre -1 y 1 dados en el rango de *sen x*; por lo tanto la nueva función $y = sen\ x$ tiene inversa ya que, y es una función uno a uno.

3.8.1 Definición

La función inversa del seno, denotada por arcoseno (*arcsen x*), se define como: $y = arcsen\ x$, si y sólo si, $sen\ y = x$ donde $-1 < x < 1$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Ejemplo

Trazar la gráfica de $y = arcsen\ x$

Por definición, la gráfica de $y = arcsenx$ es la misma qué la gráfica de $sen\ y = x$, con la única restricción que $-1 < x < 1$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Nótese que en la Figura 3.29 se encuentran trazadas dos gráficas; la gráfica $y = arcsen\ x$ (línea continua) que en función inversa de "$x = sen\ y$", donde x es definido en el intervalo de números reales $[-1,1]$ y cuyo dominio son los números reales, y la relación $y = arcsen\ x$ (línea discontinua) ver Figura 3.29.

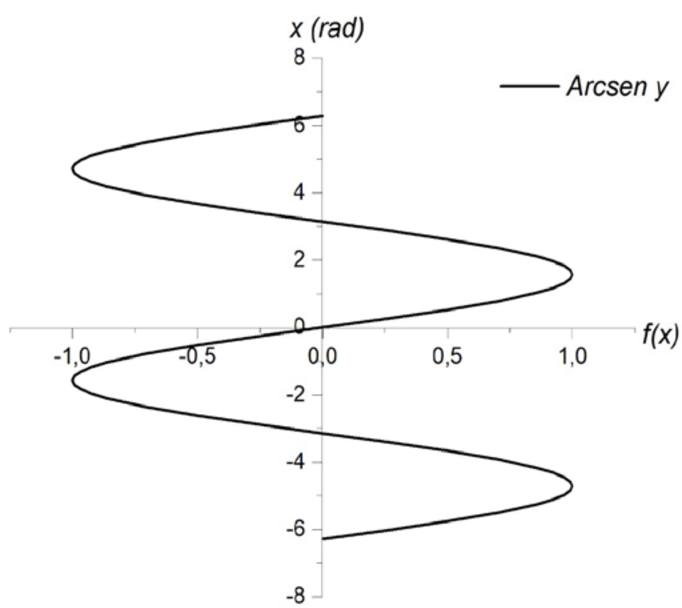


Figura 3.29
Gráfica de arcsen y.

Como una ayuda al lector las gráficas de funciones o relaciones, serán útiles los términos periodo y amplitud que se aplican a las funciones circulares, y los términos periodo inverso y amplitud del inverso a la función inversa.

3.8.2 Definición

La función inversa de la tangente denotada por $y = arctan\,x$ se define como: $y = arctan\,x$, si y sólo si, $tan\,y = x$ donde x es cualquier real y $-\pi/2 < y < \pi/2$, ver Figura 3.30.

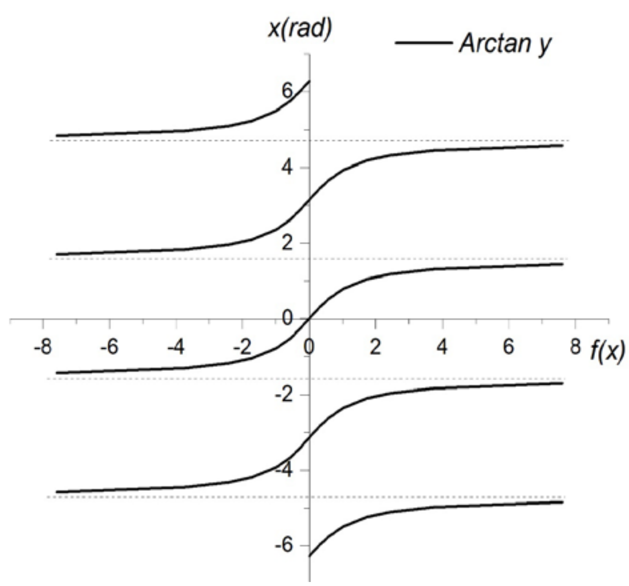


Figura 3.30
Gráfica de arctan y.

De forma similar podríamos definir la inversa de la función circular secante, restringiendo el dominio de la función secante en el intervalo de números reales $[0,\pi]$, garantiza la existencia la función secante.

3.8.3. Definición

La función inversa de la secante, denotada por $y = arcsec\,x$, se define como: $y = arcsec\,x$, si y sólo si, $sec\,y = x$ donde $x>1$ real y $0 \leq y < \pi/2$ y $\pi/2 < y \leq \pi$, ver Figura 3.31.

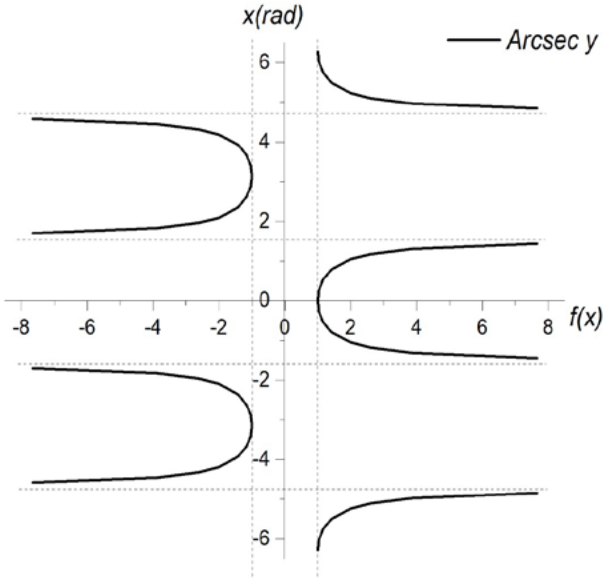


Figura 3.31
Gráfica de arcsec y.

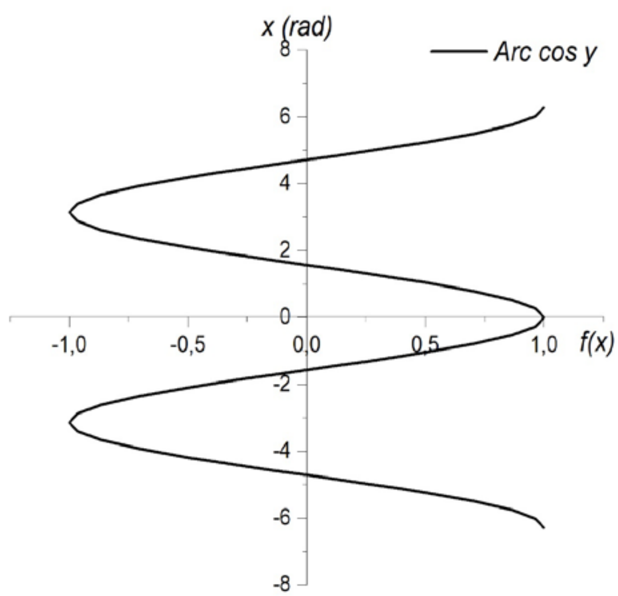
De igual forma podríamos definir la función inversa de las cofunciones circulares cómo arcocoseno, cotangente, cosecante; dadas a continuación

3.9 Co funciones circulares inversas

3.9.1 Definición

La función inversa del coseno, denotada por $y = arccos\ x$, se define como: $y = arcocos\ x$, si y sólo si $cos\ y = x$, donde $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$, ver Figura 3.32.

Figura 3.32
Gráfica de arc cos y.



3.9.2 Definición

La función inversa de la cotangente, denotada por $y = arccot\ x$, se define como: $y = arcocot\ x$, si y sólo si $cot\ y = x$, donde x es cualquier real y $0 \leq y \leq \pi$, ver Figura 3.33.

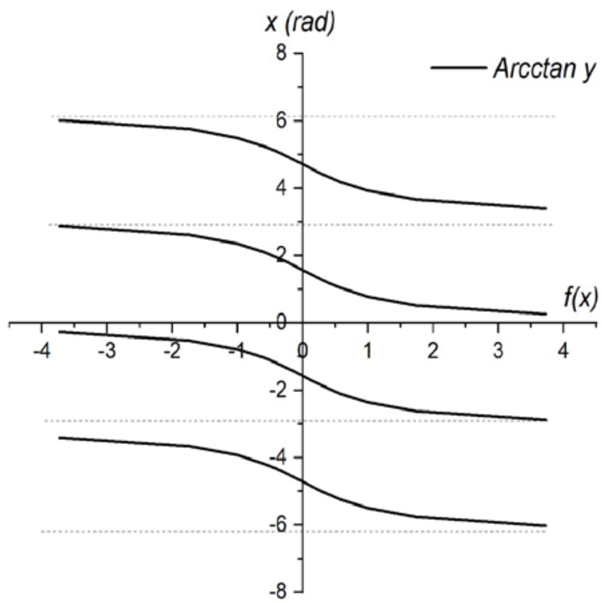
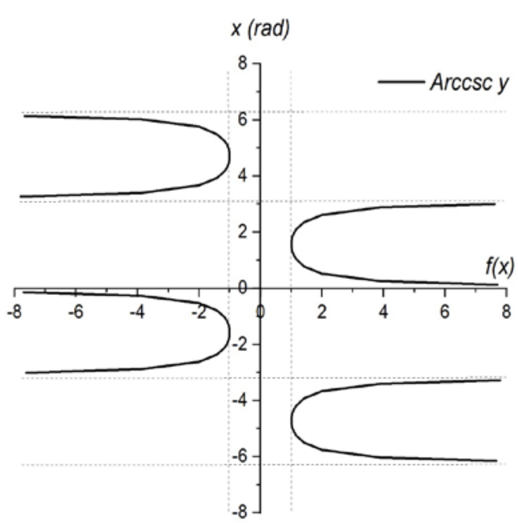


Figura 3.33
Gráfica de arcctan y .

3.9.3 Definición

La función inversa de la cosecante, denotada por $y = arccsc\ x$, se define como: $y = arccsc\ x$, si y sólo si $csc\ y = x$, donde $|x| \geq 1$ es número real y $\pi/2 \leq y < \pi$ y $\pi < y < 3\pi/2$, ver Figura 3.34.

Figura 3.34
Gráfica de arccsc y .



3.10 Los valores principales de las funciones circulares inversas

La multiformidad de las funciones circulares inversas pueden ser frecuentemente en obstáculo. Por lo tanto, nos limitaremos en cada una de estas funciones a un intervalo de valores para el cual sean uniformes, y llamaremos a estos valores “los valores principales” de las funciones circulares inversas. La parte de cada curva determinada por esta elección se llama entonces “rama principal” de la curva. La razón de nuestra elección es que por este medio la suma de los valores principales de una función inversa y de la cofuncion inversa es ahora , qué es consistente y más general que la notación dada por algunos autores; los intervalos para estos valores principales.

$$-\pi \leq arcsen\, x \leq \pi/2\,; \qquad 0 \leq arccos\, x \leq \pi$$

$$-\pi/2 \leq arctan\, x \leq \pi/2\,; \qquad 0 \leq arctan\, x \leq \pi$$

$$0 \leq arcsec\, x < \pi/2 \ \text{ ó } \ \pi/2 < arcsec\, x \leq \pi; \qquad \pi/2 \leq arccsc\, x < \pi \ \text{ ó } \ \pi < arccsc\, x \leq 3\pi/2$$

— IV —

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES CIRCULARES

4.1. Identidades de las funciones circulares

Existen expresiones llamadas identidades entre las funciones circulares y su estudio comprende una gran parte de la llamada trigonometría analítica. Las identidades fundamentales pertenecen a tres tipos; las identidades recíprocas, y las identidades pitagóricas o cuadradas. Estás identidades son básicas para el desarrollo de las demás relaciones, entre las funciones circulares.

4.1.1 Identidades recíprocas

Retomando las deducciones hechas en la sección 3.5, sabemos que:

$$sen\ A = 1/csc\ A \tag{14}$$

$$tan\ A = 1/cot\ A \tag{15}$$

$$sec\ A = 1\ cos\ A \tag{16}$$

Las anteriores identidades, se han deducido de las definiciones que se han dado de las funciones y cofunciones circulares.

4.1.2 Identidades pitagóricas

Sea A un ángulo cualquiera, y sea x, y las proyecciones del radio $r = (r \neq 0)$ a sus ejes coordenados, por el teorema de Pitágoras ver Figura 4.1, tenemos que:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ o } (x/r)^2(y/r)^2 = 1 \tag{17}$$

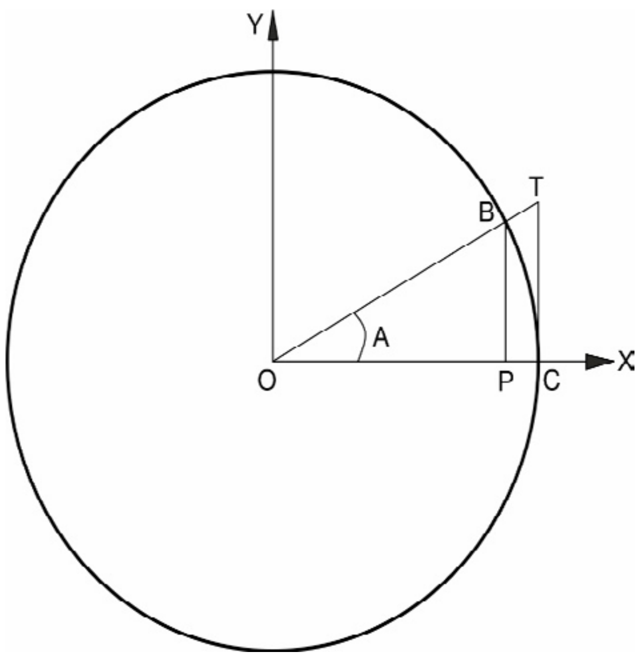


Figura 4.1
Representacion del teorema de pitagoras.

y puesto que: $cosA = OP/OC = x/r$; $sen\ A = BP/OC = y/r$; $tan\ A = TC/OC = x/y$ y $sec\ A = OT/OC$.

Reemplazando en la ecuación 17 se obtiene la identidad de segundo grado, $cos^2 A + sen^2 A = 1$, es decir que:

$$sen^2 A = 1 - cos^2 A \tag{18}$$

Sea el radio $r=1$, $sec\ A = OT$; $sec^2 A = OT^2 = OC^2 + TC^2$ ver Figura 4.1, luego $sec^2 = r^2 + tan^2 A$ pero como $r=1$, se tiene que:

$$sec^2 A = 1 + tan^2 A \tag{19}$$

Y la última identidad cuadrada, obtenida de modo semejante es:

$$tan^2 A = sec^2 A - 1 \qquad (20)$$

4.2 Identidades de las cofunciones circulares

Existen expresiones llamadas identidades entre las cofunciones circulares y su estudio comprende una gran parte de la llamada trigonometría analítica. Las identidades fundamentales pertenecen a tres tipos: las identidades recíprocas, las identidades pitágoricas o cuadradas y las de razón. Estas identidades son básicas para el desarrollo de las demás relaciones, entre las funciones circulares.

4,2,1 Identidades recíprocas

Retomando las deducciones realizadas en la sección 3.5 sabemos que:

$$cscA = 1/sen\ A$$

$$cotanA = 1/tan\ A$$

$$cos\ A = 1/sec\ A$$

Las anteriores identidades, se han deducido de las definiciones que se han dado de las funciones y cofunciones circulares

4.2.2 Identidades pitagóricas

Sea A un ángulo cualquiera, y x, y las proyecciones del radio r ($r \neq 0$) a sus ejes coordenados y recuerde que el teorema de Pitágoras fue expresado en la ecuación (17). De acuerdo a lo representado en la Figura 4.1, se puede decir que: $cosA = OP/OC = x/r$; $sen\ A = BP/OC = y/r$; $tan\ A = TC/OC = x/y$ y $sec\ A = OT/OC$. Reemplazando en la ecuación (17), obtenemos $cos^2 + sen^2$

$A = 1$ ó $cos^2 = 1 - sen^2 A$. Y si hacemos $r=1$ en la Figura 4.1, podemos decir que: $sec\, A = OT$ luego $sec^2 A = OT^2 = OC^2 + TC^2$ es decir que,

$$cotan^2 A = csc^2 A - 1 \qquad (21)$$

De forma similar podemos obtener la ecuación (22),

$$csc^2 A = 1 + cotan^2 A \qquad (22)$$

4.3 Identidades de razón

También las entidades razón se deducen inmediatamente de las definiciones de las funciones circulares y las cofunciones. Según las definiciones establecidas en el capítulo 3 y la Figura 4.1, tenemos que: $sen\, A = BP/OC$, $tan\, A = TC/OC$ y $cos\, A = OP/OC$, notese que: $sen\, A/cos\, A = (BP/OC)/(OP/OC) = BP/OP$ es semejante a $tan\, A = CT/OC$, luego

$$\frac{sen\, A}{cos\, A} = tan\, A \qquad (23)$$

Asimismo se tiene la que:

$$\frac{cos\, A}{sen\, A} = cotan\, A \qquad (24)$$

Acontinuación son realizadas algunas deducciones qué son válidas para las identidades de razón:

$sen\, A / cos\, A = tan\, A$, $sec\, A / csc\, A = tan\, A$ y $tan\, A/cotan\, A = Tan^2 A$. Es decir que $f(x(/cof(x) = tanx$, cuando $f(x)$ *es* $sen\, x$ ó $sec\,(x)$ y $cof(x)$ es $cos\, x$ ó $cosec\, x$. Mientras que $f(x)/cof(x) = tan^2$ cuando $f(x)$, es $tan\, x$ y $cof(x)$ es $cot\, x$.

Luego

$$\frac{f(x)}{cof(x)} \quad \begin{cases} tan\, x, & \text{cuando } f(x) \text{ es seno o secante de } x \\ tan^2 x, & \text{cuando } f(x) \text{ es la tangente de } x \end{cases} \qquad (25)$$

Y lo contrario será:

$$\frac{cof(x)}{f(x)} \quad \begin{cases} cotan(x), & \text{cuando } f(x) \text{ es seno o secante de } x \\ contan^2 x, & \text{cuando } f(x) \text{es la tangente de } x \end{cases} \qquad (26)$$

Entonces, cualquier identidad de razón nos dará como resultado la función tangente.

Teorema

Para cualquier función circular *f(x)* y su cofunción, se tendrá que:

$$\frac{f(x)}{cof(x)} \quad \begin{cases} \tan x, & \text{cuando } f(x) \text{ es seno o secante de } x \\ \tan^2 x, & \text{cuando } f(x) \text{ es la tangente de } x \end{cases}$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación de las identidades fundamentales.

Ejemplo

En el desarrollo de la cátedra de diseño geométrico de vías, se presenta la siguiente identidad:

$$sen_{vert}\ A/sen\ A = tan\ (1/2)\ A \quad \text{(curva compuesta)}$$

Sugerencia:

$$sen_{vert}\ A = 1 - cos\ A$$

$$tan\ (1/2)\ A = (1 - cos\ A)/(1 + cos\ A)$$

Solución

Tomando el primer término de la ecuación y sustituyendo el valor de $sen_{vert}\ A$ tenemos:

4.4 Ley del seno

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Sean ABC un triángulo cualquiera ver Figura 4.2, y h la perpendicular bajada de B a AC. En los triángulos rectángulos ABD y DBC respectivamente.

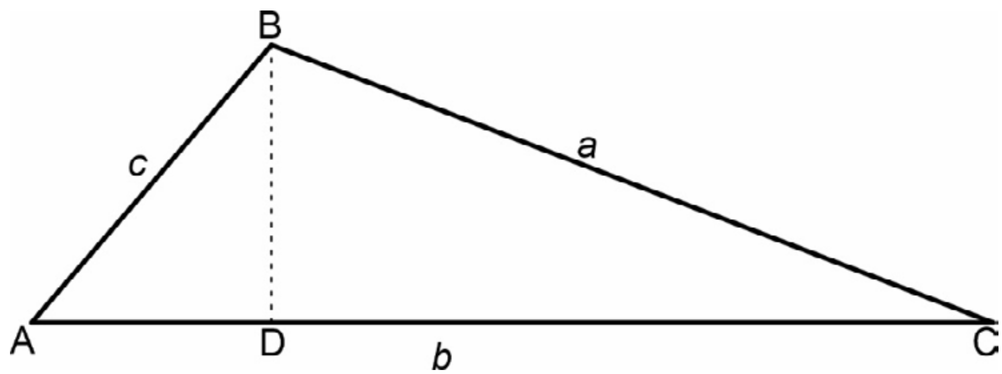


Figura 4.2
Representacion triangulo rectángulo.

Como $h = c \; sen \; A$, $h = a \; sen \; C$ y $c \; sen \; A = a \; sen \; C$; dividiendo los lados por *sen A sen C,* resuelta en:

$$\frac{c}{sen \; C} = \frac{a}{sen \; A} \qquad (27)$$

De la misma forma, si se traza la perpendicular de A a CB, se demostraría que:

$$\frac{b}{sen \; B} = \frac{c}{sen \; C} \qquad (28)$$

Comparando las Ecuaciones (27) y (28) tendremos:

$$\frac{a}{sen \; A} = \frac{b}{sen \; B} = \frac{c}{sen \; C} \qquad (29)$$

A continuación algunos ejemplos de aplicación de la ley del seno en ingeniería civil.

Ejemplo

Para medir la altura del Cerro Monserrate en Bogotá los topógrafos usaron el esquema que se muestra en la Figura 4.3. Sea una distancia de 2000 ft sobre la horizontal del pie de la montaña y encontraron que el ángulo del punto más próximo a la montaña es de 43°5' y el ángulo de punto más lejano a la montaña es 38°. Sí la base está 5000 ft sobre el nivel del mar, cuál es la altura del Cerro de Monserrate sobre el nivel del mar?

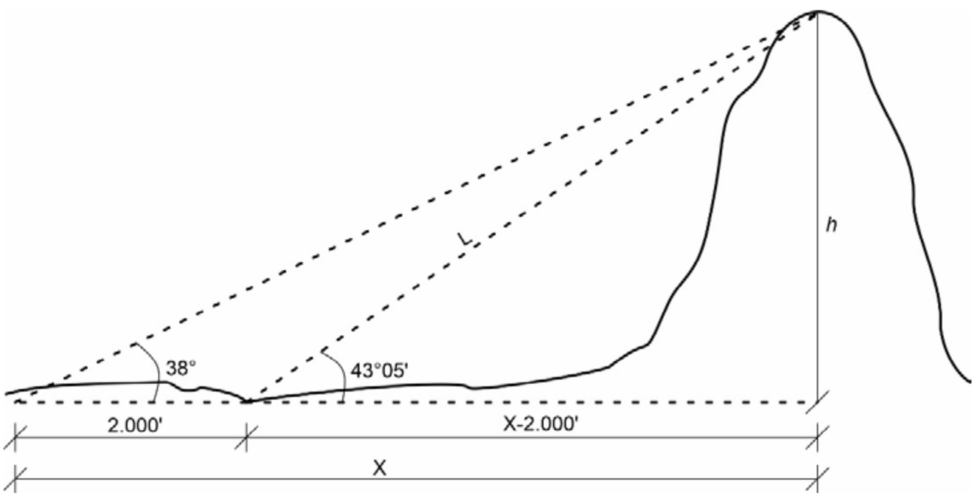


Figura 4.3
Esquema altura Cerro de Monserrate.

Aplicando la ley del seno;

$$\frac{2.000}{sen\ (5°5')} = \frac{L}{sen\ (38°)}$$

Luego, L=13.896,84 ft; y

$$\frac{L}{sen\ (90°)} = \frac{h}{sen\ (43°5)}$$

Es decir que h = 9.492,39 ft. Luego la altura monserrate sobre el nivel del mar es de 14.492, 39 ft.

Ejemplo

En la Figura 4.4 se muestra la sección transversal de un valle en el cual se quiere construir un puente que une los sitios A y B, el cual será soportado por un pilote en el punto C. Cuál debe ser la altura de este pilote? Proporcione la respuesta con una décima de metro de operación.

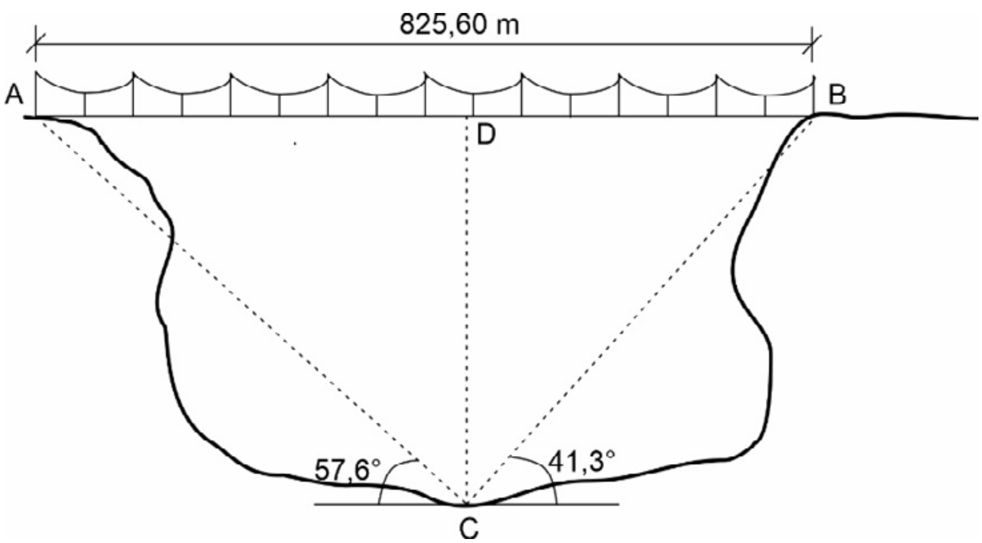


Figura 4.4
Aplicación de la Ley del seno aplicado en puentes.

Cómo la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, se tendrá que: *c = 180° – (57,6° + 41,3°) = 81,1°;* utilizando la ley de los senos se tiene que:

$$\frac{AB}{sen\ (81{,}1°)} = \frac{AC}{sen\ B} \quad \therefore \quad B = 41{,}31°, AB = 825{,}6 \text{ m} \ \text{luego} \ AC = AB\,\frac{sen\ (41{,}3°)}{sen\ (81{,}1°)} = 551{,}5 \text{ m.}$$

El triángulo ADC, se tiene que:

$$\frac{AC}{sen\ (90°)} = \frac{DC}{sen\ A} \quad \therefore \quad A = 57{,}6°, \ AC = 551{,}5 \text{ m} \ \text{luego} \ DC = AC\,\frac{sen\ (57.6°)}{sen\ (90°)} = 465{,}6 \text{ m.}$$

Luego la altura de la pila será de 465,6 m, algo fuera de proporciones y deberá buscarse otra solución.

4.5 Ley de las tangentes

Una desventaja en uso de la ley de la secante para resolver un triángulo en donde se conocen dos lados y el ángulo que forman es que el método no se presta al cálculo logaritmico, y por lo tanto le resta exactitud de a la ley de la secante.

Por la ley de los senos tenemos que:

$\frac{a}{b}=\frac{sen\,A}{sen\,B}$ se cumple que $\frac{a}{b}-1=\frac{sen\,A}{sen\,B}-1$; $\frac{a-b}{b}=\frac{sen\,A-sen\,B}{sen\,B}$, de igual manera si se suma 1 a cada lado obtenemos $\frac{a+b}{b}=\frac{sen\,A+sen\,B}{sen\,B}$

Si dividimos miembro a miembro $\frac{a-b}{b}=\frac{sen\,A-sen\,B}{sen\,B}$ y $\frac{a+b}{b}=\frac{sen\,A+sen\,B}{sen\,B}$,

$$\frac{\frac{a-b}{b}}{\frac{a+b}{b}}=\frac{\frac{sen\,A-sen\,B}{sen\,B}}{\frac{sen\,A+sen\,B}{sen\,B}};\quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{sen\,A-sen\,B}{sen\,A+sen\,B}$$

Luego

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\,sen\,[1/2(A-B)]\,cos\,[1/2(A+B)]}{2\,sen\,[1/2(A+B)]\,cos\,[1/2(A-B)]}$$

Si dividimos ambos términos del segundo miembro por, $cos\,[1/2(A-B)]\,cos\,[1/2(A+B)]$, obtenemos la Ecuación (30).

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{tan\,[1/2(A-B)]}{tan\,[1/2(A+B)]}\qquad (30).$$

Está fórmula se conoce como la ley de las tangentes, inmediatamente puede escribirse fórmulas semejantes que contengan a y c, o b y c.

Ejemplo

Se desea hallar la distancia entre dos puntos A y B tan exactamente como sea posible. Los dos puntos están en lados opuestos de una pequeña laguna. Un tercer punto C está localizado de modo que el ángulo ACB mide 72.3° y las distancias AC y BC miden 492,3 m y 348,6 m respectivamente. Calcular la distancia de AB tan exactamente como lo justifiquen los datos.

Se sabe que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, luego $B = 180° - (C + A)$ es decir que $B = 107.7° - A$. Utilizando la Ecuación (30), se tiene que:

$$-0{,}1708883 = \frac{tan\left[\frac{(-107{,}7° + 2A)}{2}\right]}{tan\left[\frac{(107{,}7°)}{2}\right]}; \quad tan\left[\frac{(-107{,}7° + 2A)}{2}\right] = -0{,}233917337$$

Luego $A = 67{,}01583°$ y $B = 40{,}68416°$. Como $sen\ A/a = sen\ C/c$, AB $= c = a(sen\ C/sen\ A) = 360{,}74$ m.

4.6 Ley de la secante

Sea cualquier triángulo ABC, como se muestra en la Figura 4.5 y traza una perpendicular desde el vértice c hasta el lado opuesto, o la prolongación del lado opuesto.

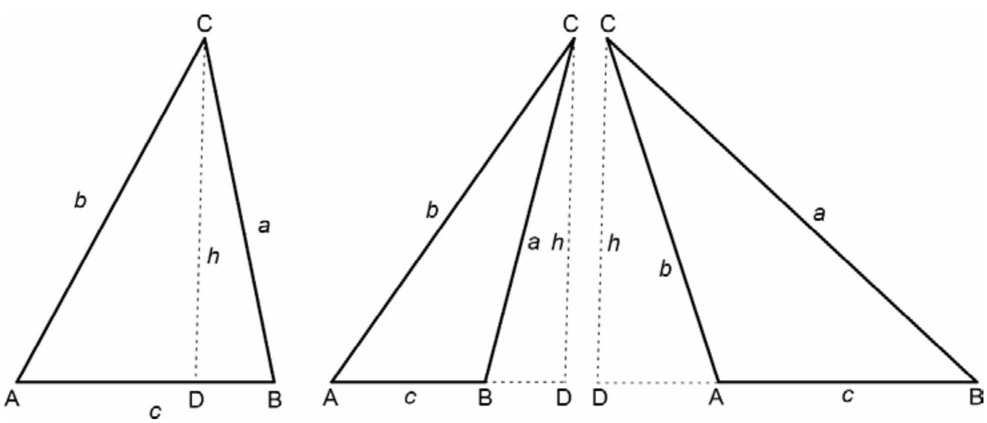


Figura 4.5
Ley de la Secante.

Aplicando el teorema de Pitágoras a cualquiera de los triángulos de la Figura 4.5 se tiene: $a^2 = h^2 + DB^2$, cada término del miembro de la derecha de esta ecuación en funciones de b, c, A, B y C. Así: $AD = b\ cos\ A = b/sec\ A$ y $h = AD\ tan\ A$, reemplazando en la anterior ecuación usando Pitagoras.

$$a^2 = (AD\ tan\ A)^2 + (c - AD)^2 = AD^2\ (1 + tan^2 A) + c^2 - 2c\ AD = AD^2\ sec^2\ A + c^2 -$$

$2c\ AD = AD(AD\ sec^2 A - 2c) + c^2$, reemplazando $AD = b/sec\ A$, tenemos que:

$$a^2 = (b/sec\ A)\big((b/sec\ A)\ sec^2 A - 2c\big) + c^2 = (b/sec\ A)(b\ sec\ A - 2c) + c^2 = b^2 -$$

$\frac{2bc}{sec\ A} + c^2$, entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{2bc}{sec\ A} \tag{31}$$

Así mismo,

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{2ac}{sec\ B} \tag{32}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{2ab}{sec\ C} \tag{33}$$

Las Ecuaciones (31), (32) y (33) se llaman la ley de la secante, y se pueden enunciar así:

En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados, menos 2 veces el producto de estos lados sobre la secante del ángulo comprendido.

Ejemplo

Un topógrafo encuentra que el ángulo en el punto A de la Figura 4.6 desde dónde observa los puntos B y C, en cada orilla del lago, es de 72°. Encuentrese la distancia a través del lado determinando la separación qué hay entre los puntos B y C, con una decima de aproximación.

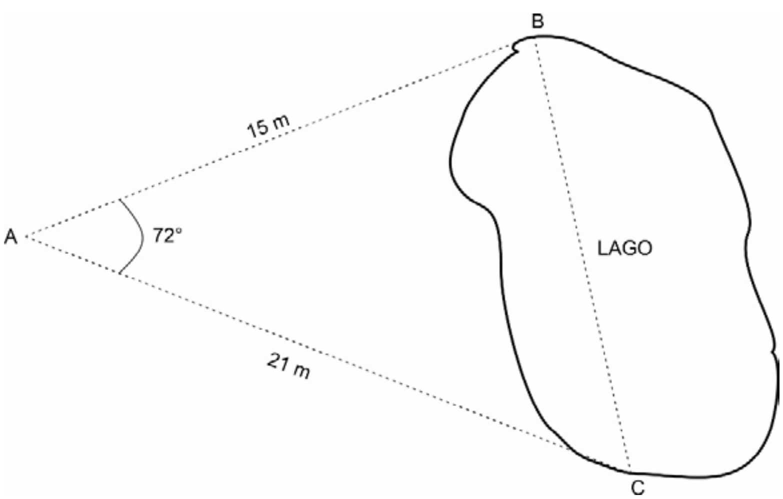


Figura 4.6
Ley de la Secante aplicada en topografia.

Utilizando la Ley de la Secante, en la anterior Figura 4.6 (triángulo ABC).

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{2(AB)(AC)}{sec\ 72°} = (15)^2 + (21)^2 - \frac{2(15)(21)}{sec\ 72°}$; $BC = 21{,}7$ m. Es decir que la distancia que separa los puntos B y C es de 21,7 m.

Ejemplo

Una carga de G = 60 kp = 598 N se sube por medio de un juego de poleas (ver Figura 4.7) la fuerza de atracción Fz actúa según un ángulo C = 28° respecto a la vertical. Cuánto vale la fuerza Fa en el punto de suspensión y bajo qué ángulo actúa respecto a la vertical.

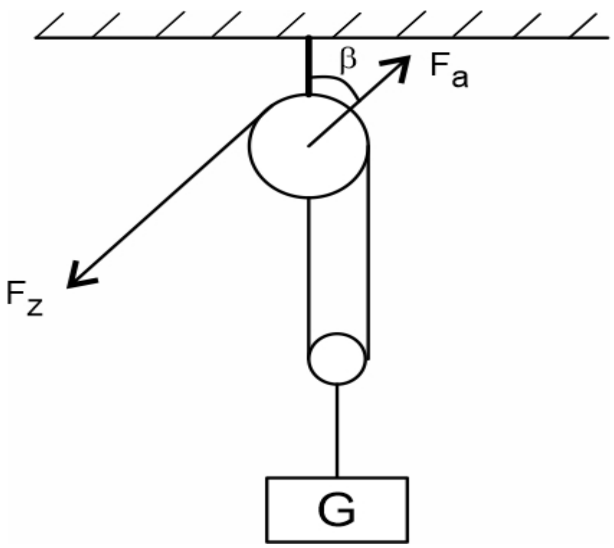


Figura 4.7
Ley de la Secante aplicada en estática.

Haciendo un diagrama de fuerzas (o también conocido como diagrama de cuerpo libre) que actúan en el sistema de poleas véase la Figura 4.8

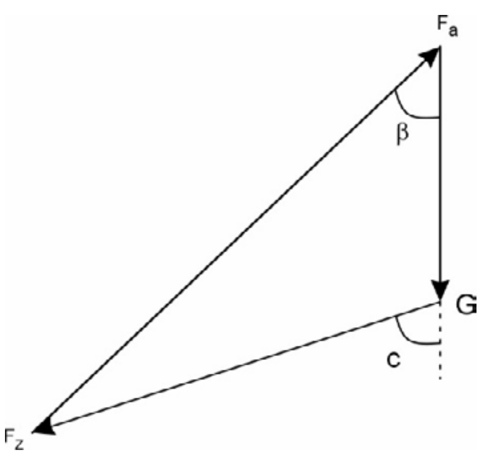


Figura 4.8
Diagrama de fuerzas ejemplo .

Siendo que Fz debe soportar ½ G = 30 kp = 294,5 N, para hallar la fuerza

F_a, se debe utilizar la Ley del Coseno en el triángulo de fuerza (ver Figura 4.8).

$F_a{}^2 = G^2 + F_z{}^2 - \frac{2GF_z}{sec\,(180°-C)} = (60)^2 + (30)^2 - \frac{2(60)(30)}{sec\,(180°-28°)} = 7678{,}61$ kp. Es decir que F_a= 87,64 kp = 859 N. El ángulo a que actúa la fuerza Fa con respecto a la vertical (B) se puede determinar por medio de la Ley del Seno.

$\frac{F_z}{sen\,B} = \frac{F_a}{sen\,(180°-C)}$; $\quad sen\,B = sen\,152° \,\frac{F_z}{F_a} = sen\,152° \,\frac{30}{87{,}64} = 0{,}160704551$, luego *B = 9° 14´ 52 ´´*.

4.7 Resolución de Triángulos

Teniendo en cuenta que el área de un triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura, podemos hallar otras fórmulas igualmente válidas, para el área empleando un valor de la altura deducida mediante la Figura 4.9. Si se emplea *K= 1/2 c h* y se sustituye *h* por , se obtiene:

Es decir qué, el área de un triángulo es la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

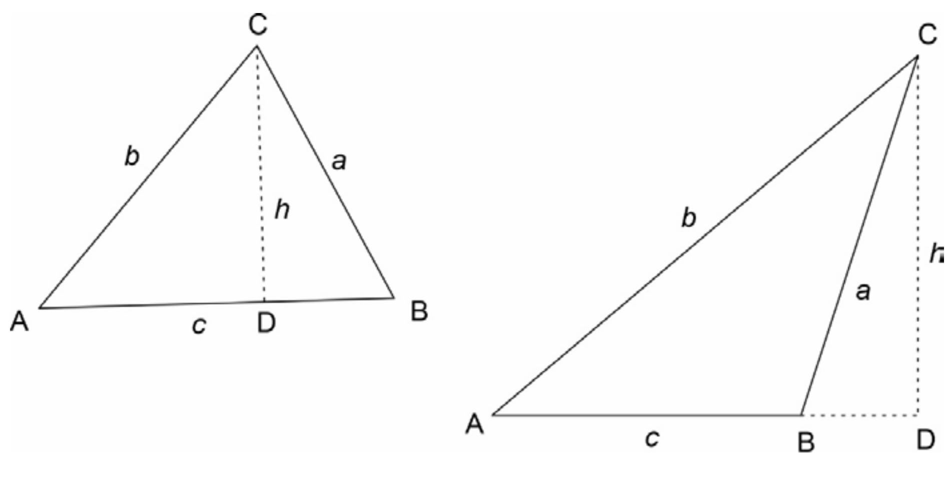


Figura 4.9
Resolución de triángulos.

Se puede obtener otra fórmula para el área sustituyendo *b* en la Ecuación (33) por *c sen B / sen C*, valor obtenido de resolver *b / sen B = c / sen C*, respecto a *b*. Se tiene, que:

$$K = c^2 \frac{sen\, A\, sen\, B}{2\, sen\, C} \tag{35}$$

Es decir que, el área de un triángulo es igual al producto del cuadrado de un lado por los senos de los ángulos adyacentes, dividiendo por el duplo del seno del ángulo opuesto.

La Ecuación (35) es básica cuando se tiene que hacer un levantamiento topográfico de un lote, finca, etc., y contamos con la distancia de un lado y sus respectivos ángulos.

Ejemplo

En la repartición de parcelas dadas por el INCORA a los campesinos de un sector del Norte de Santander, se ha presentado una zona de terreno de forma triangular del cual se desea saber su área. El topógrafo de la entidad no puede medir la distancia BC por cuestiones topográficas; en su lugar sabe qué: AC = 560 m, AB = 310 m, y A = 30°, ver Figura 4.9.

Por la Ecuación (34) se tiene que: $A = 1/2\ bc\ sen\ A = (1/2)560(310)\ sen\ 30° = 43.400\ \mathrm{m}^2$, es decir que el área del terreno de forma triangular es, Ha.

4.8 Funciones que Envuelven más de un Ángulo

4.8.1 Ángulos que Difieren en Múltiplos de π

Hagamos a continuación algunas anotaciones, que son básicas para el desarrollo de esta sección.

4.8.1.1 Definición

Los ángulos que tiene el mismo lado terminal, se llaman coterminales. Como una ilustración en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8

Hallar el ángulo coterminal de 135°, ver Figura 4.10.

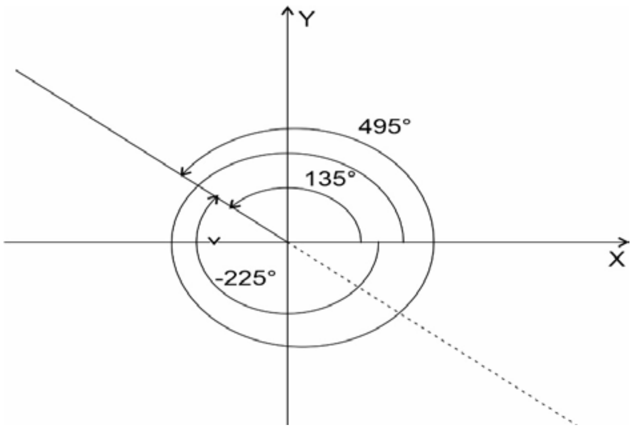


Figura 4.10
Ángulos coterminales.

Partiendo de la definición dada en la sección 4.5.1.1 se tiene algunos ángulos coterminales de 135°, que son -225° y 495°, los cuales están ilustrados en la Figura 4.10.

4.8.1.2 Ángulo de Referencia

Cuándo un ángulo esta definido entre su lado terminal y el eje *x* será ángulo agudo positivo, o ángulo recto, o nulo, llámese a este ángulo, ángulo de referencia.

El ángulo de referencia, a menos que sea nulo o recto, se debe considerar que esta siempre en Q1 (cuadrante 1).

Ejemplo

Hallar el ángulo de referencia de los ángulos mostrados en la Figura 4.11.

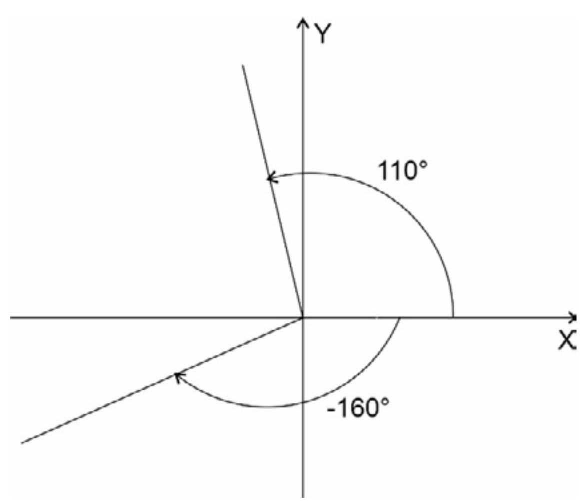


Figura 4.11
Ángulos cualquiera.

El ángulo de referencia de -160° se hace proyectando el lado terminal al Q1 y midiendo el ángulo que hay entre el eje *X* (lado inicial) y el lado terminal con base en la Figura 4.12; es decir el ángulo de referencia será 20°.

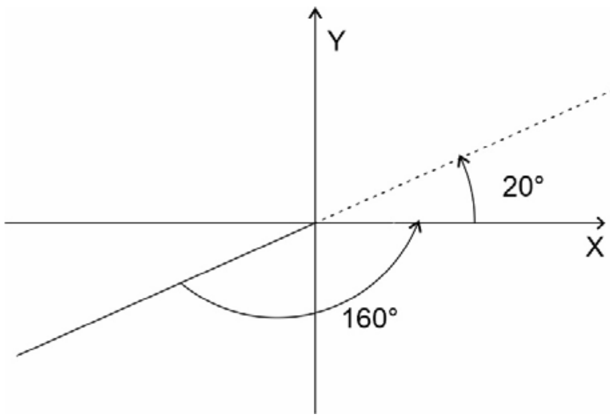


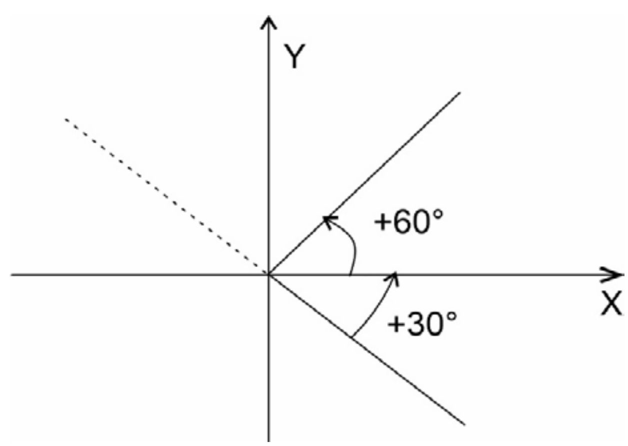
Figura 4.12
Ángulos de referencia**.**

Ejemplo

En algunos casos, en las obras no se cuantifica el material disponible en el patio de trabajo, y se tiene que determinar el seno y coseno de un ángulo igual a -30°.

Se debe recurrir a: el ángulo de referencia para el ángulo de -30° se calcula trazando una perpendicular en el origen de coordenadas. Luego tomamos como lado inicial el eje x y como lado terminar la perpendicular trazada, cómo se puede observar el ángulo de referencia será 60°, ver Figura 4.13, además *sen 60° = 0.86603*; *cos 60° = 0.5*

Figura 4.13
Ángulos de referencia para un angulo de -30°.



Asimismo el ángulo de referencia de 110°, será 20°. Sean *x* y *r* con $r \neq 0$, las coordenadas *y* de la distancia polar de algún punto sobre el lado terminal de un ángulo A. El ángulo de referencia para A está en Q1, y es claro que $|x|$, $|y|$ y *r* son las cantidades correspondientes a algún punto sobre el lado terminal de este ángulo en Q1. De la definición de las funciones trigonométricas se sigue que:

Toda función de un ángulo A es numéricamente igual a la función del mismo nombre en su ángulo de referencia (36)

Es decir que, las funciones del mismo nombre de cualquier ángulo y de su ángulo de referencia difieren cuando mucho en el signo; por ejemplo, tenemos que $cosec(A) = r/y$, qué puede ser positivo negativa, pero la cosecante del ángulo de referencia será $|r/|y|$que siempre es positiva. Cuándo se aplica (36) falta la determinación del signo apropiado de la función en el cuadrante en que esta el ángulo.

Ejemplo

Expresar el en términos de su ángulo de referencia.

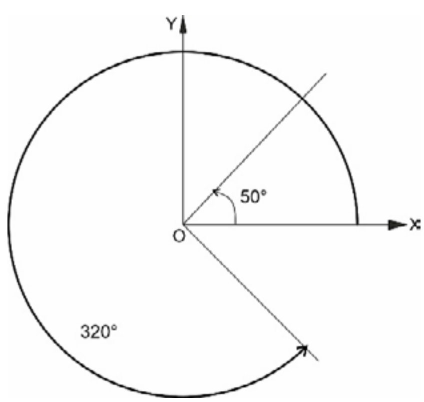


Figura 4.14
Ángulos de referencia para un angulo de 320°.

Cómo el ángulo de referencia de 320° es 50°, como puede observarse en la Figura 4.14 es decir que aplicando (36) tenemos que $cos(320°) = \pm cos(50°)$. Ahora bien, como el coseno en Q1 es positiva y el coseno en Q4 es positivo, se aplica entonces que: $cos(320°) = \pm\ cos(50°)$.

Ejemplo

Expresar la sec (120°) en términos de su ángulo de referencia.

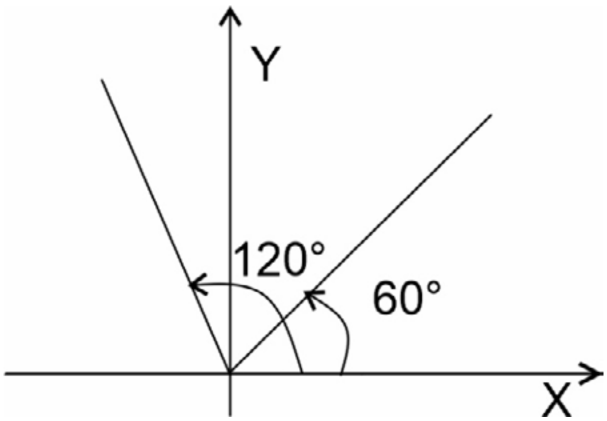


Figura 4.15
Ángulos de referencia para un angulo de 120°.

Cómo el ángulo de referencia de 120° es 60° cómo se puede observar en la Figura 4.15, luego $sec\ 120° = \pm\ sec\ 60°$, pero como la secante en Q2 es negativa y la secante en Q1 es positica, se tiene que: $sec\ 120° = -sec\ 60°$. Aplicando la relación (36) existe una gran variedad de las llamadas fórmulas de reducción, que implican funciones de angulos de la forma $(n\ \pi/2 \pm x)$ donde n es un entero positivo, negativo o cero.

Por ejemplo se tiene que $sen(\pi - x) = sen(x)$ si x está entre 0 y $\pi/2$. A esto se llega aplicando (36) con la determinación del signo apropiado. También es cierto, y será demostrado en la próxima sección, que esta relación es válida para todos los valores de x. Esta relación y $cos\ ((\pi/2) - x) = sen(x)$ (sección 3.6) son ejemplos del siguiente teorema general, que se demostrará en la siguiente sección 4.8.1.3.1.

4.8.1.3 Teorema

Toda función circular de $(n\ \pi/2 \pm x)$ es igual a:

a $\pm$ (la función de x), sí n es par.

b. (la cofuncion de x), sí n es impar, para un entero n dado, el signo apropiado en el segundo miembro se aplica para todos los valores de x para los cuales están definidas las funciones.

Para aplicar este teorema, se hace necesario anotar el múltiplo de $\pi/2$ que aparezca y luego analizar el signo apropiado. Veamos a continuación algunos ejemplos que permiten aclarar este tema, aún más.

Ejemplo

Expresar $sen\ [(\pi/2) - A]$ como una función circular de A. Observe que tiene un múltiplo impar de $\pi/2$, aplicando el teorema 4.8.1.3 tenemos que: $sen\ [(\pi/2) - A] = \pm\ cos\ A$, donde el signo aplicable es válido para todos los valores de A, debemos escoger un valor de A en Q1 puesto que el signo esta determinado por cualquier valor de A. De acuerdo con lo anterior, sí $0 < A < \pi/2$, entonces $cos\ A$ es 0 y $(\pi/2) - A$ está en Q2, y el seno de un ángulo en Q2 es positivo, luego se aplica el signo positivo, es decir $sen\ [(\pi/2) - A] = \pm\ cos\ A$.

Ejemplo

Expresar $cos(A - 5\pi)$ como una función circular de A.

Por el teorema 4.8.1.3 tenemos que: $cos(A - 5\pi) = \pm\ cos\ A$, el signo que le corresponde a la función coseno de A, es $0<A<\pi/2$, tenemos que $A > 0$ y $A - 5\pi$ esta en el Q3 y el coseno de un ángulo en Q3 es negativo, es decir que,

$cos(A - 5\pi) = -\ cos\ A$

Ejemplo

Expresar las cantidades dadas en términos de:

a.) La misma función del ángulo de referencia

b.) Una función de un ángulo entero 0° y 45°, y

c.) La cofuncion de un ángulo agudo positivo

1. $cot(243°)$
2. $sec(95°)$
3. $tan(218°)$

1. *cot(243°)*

a.) El ángulo de referencia de 243° es 63°, luego *cot(243°) = ± cot(63°)*, pero como la cotangente es Q1 y Q2 son positivos, tendremos que, *cot(243°) = cot(63)* .

b.) y c.) *cot(243°) = cot(270° – 27°) = cot (3π/2 −27°),* aplicando el teorema 4.8.1.3, se tiene que: *cot(243°) = ± tan(27°)* como la tangente en Q1 y Q3 son positivos, *cot(243°) = tan(27°)*

como *sec 95 = sec (π/2 – 5°)*, *sec 95 = ± csc 5°* como la tangente en el Q1 y Q3 son positivos, .

2. *sec(95°)*

a.) El ángulo de referencia de 95° es 85°, por (18) tenemos que: *sec(95°) = – sec 85°*, la secante de ángulo en Q1 es positiva, mientras que la secante de ángulo en Q2 es negativa.

b.) y c.) como *sec 95° = sec (π/2 – 5°)* aplicando el teorema 4.8.1.3 se tiene que: *sec 95° = ± csc 5°*, ya que la cosecante en el Q1 es positiva, y la secante en el Q2 es negativa, *sec 95° = – csc 5°*.

3. *tan(218°)*

a.) El ángulo de referencia de 218° es 38°, por (18) sabemos que: *tan 218° = ± tan 38°*, como la tangente es positiva en el Q1 y Q3, se tiene *tan 218° = tan 38°*.

b.) *tan 218° = tan (π + 38°)* aplicando el teorema 4.8.1.3 se tiene *tan 218° = ± tan (38°)* como la tangente es positiva en Q3, *tan 218° = tan (38°)*.

c.) *tan 218° = ± tan (3π + 52°)* aplicando el teorema 4.8.1.3 *tan(218°) = ± tan (52°)* como la cotangente es positiva en Q3, *tan(218°) = tan (52°)*.

Ejemplo

En la evaluación del plano de falla de la zona activa en muros de contención se presenta que: *A = 45° + B/2*, donde B es ángulo de fricción interna del suelo, y A es el ángulo del plano de falla de la zona activa. Hallar para *B = 33°* (suelo no cohesivo), la *tan A* y su cofunción.

Sí reemplazamos en *tan A = tan (45° + 33°/2) = 1,84* y la cofunción es: *cotan A = cotan 28,5 = 0.543*.

Ejemplo

Demostrar la siguiente identidad para todos los enteros impares *n*

$$sen\left(A+\frac{n\pi}{2}\right)=(-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}cos\,A$$

Solución por inducción matemática

I. Para *n = 1* la identidad se convierte en: *sen (A + π/2) = cos A* y es válido según lo visto por el teorema 4.8.1.3.

II. Supongamos que la identidad es válida para *n = p*, esto es

$$sen\left(A+\frac{p\pi}{2}\right)=(-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}cos\,A \qquad (37)$$

Deseamos demostrar la identidad para *n = p+2*, esto es, deseamos demostrar que:

$$sen\left(A+\frac{(p+2)\pi}{2}\right)=(-1)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}cos\,A$$

Podemos describir el primer miembro como:

$sen\left(A+\frac{(p+2)\pi}{2}\right)=sen\,(A+\pi+p\pi/2)$ haciendo *B = A + π* , aplicando la Ecuación (19) se tiene que: $sen\left(A+\frac{(p+2)\pi}{2}\right)=(-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}cos\,B=(-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}cos\,(A+\pi)=(-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}(-1)cos\,A$, aplicando el teorema 4.8.1.3 se obtiene, $sen\left(A+\frac{(p+2)\pi}{2}\right)=(-1)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}cos\,A$, lo cual es lo que se queria demostrar. Esto completa la demostración por inducción matemática. Luego, se cumple que

$$sen\left(A+\frac{n\pi}{2}\right)=(-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}cos\,A$$

Ejemplo

Demostrar la siguiente identidad:

$$cos(A+n\pi/2)=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\,sen\,A$$

Donde n es entero impar.

Solución por inducción matemática:

I. Para $n = 1$ la identidad se convierte en: $cos\,(A + \pi/2) = (-1)sen\,A$.

II. Supongamos que la identidad es válida para $n = p$, esto es,

$$cos\left(A+\frac{p\pi}{2}\right)=(-1)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}sen\,A \qquad (38)$$

Deseamos demostrar la identidad para $n = p+2$, esto es como deseamos demostrar que:

$$cos\left(A+\frac{(p+2)\pi}{2}\right)=(1)^{\left(\frac{p+3}{2}\right)}sen\,A$$

Podemos describir el primer miembro como:

$cos\left(A+\pi+\frac{p\pi}{2}\right)=cos\,(B+p\pi/2)$ haciendo $B = A + \pi$, aplicando la Ecuación (38) $cos\left(B+\frac{p\pi}{2}\right)=(-1)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}sen\,B=(-1)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}sen\,(A+\pi)=(-1)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}sen\,A(-1)$ por el teorema 4.8.1.3 $cos\left(B+\frac{p\pi}{2}\right)=(-1)^{\left(\frac{p+3}{2}\right)}sen\,A$ que era a lo que se queria llegar.

Se dejara como ejercicio al lector el demostrar la siguiente identidad.

$$cos\left(A+\frac{n\pi}{2}\right)=(-1)^{\left(\frac{n}{2}\right)}cos\,A \qquad (39)$$

Donde n es un entero par.

a. Demostración del teorema de la sección 4.8.1.3

Considérese la función circular de una manera general y usaremos $f(x)$ para hacer referencia a todas las funciones trigonométricas, así que en adelante $f(x)$ puede ser: *sen(x), tan(x), sec(x).* Para mayor claridad en las siguientes deducciones se hará referencia repetidamente a las gráficas de las funciones circulares, así como a la sección 3.8.2 en la que $f(x-\pi)$ representa una translación de la gráfica en la dirección positiva de las x, en una distancia π unidades.

Es así como las curvas tangente y cotangente, en esta translación π unidades, da nuevamente la curva original (ya que, la función tangente y su cofunción tienen periodo π). Luego para estar dos funciones tenemos la siguiente relación:

$$f(x-\pi) = f(x)$$

Veamos qué sucede para cada una de las otras funciones circulares, por ejemplo $sen\,(x-\pi)$ representa la curva $y = sen(x)$ trasladada en π unidades a la derecha de las abscisas, gráficamente se observa en la Figura 3.9 en la cual se puede observar la translacion qué da como resultado $y = -sen(x)$.

Cómo pudo observarse en la sección 3.8.2 que $cos\,(x-\pi) = -cos\,(x)$; esto también se presenta en las funciones circulares, es decir que;

$$f(x-\pi) = -f(x)$$

Luego en general tenemos que,

$$f(x-\pi) = \pm f(x) \qquad (40)$$

Donde el signo está determinado por el cuadrante donde cae la función, para todos los valores de x.

En la sección 3.4 quedó establecido que las tres funciones circulares se agrupan en tres pares de cofunciones, las cuáles son, del seno el coseno, de la tangente la cotangente, y de la secante de la cosecante. Denotaremos la cofuncion de cualquier función trigonométrica $f(x)$ como $cof(x)$.

Nuevamente por la sección 3.8.2. la función $f(x - \pi/2)$ representa una translación de la gráfica correspondiente en una cantidad $\pi/2$ unidades a la derecha del eje x. Para las gráficas del coseno y la secante se tiene que: $cos(x - \pi/2) = sen(x)$ y que $sec(x - \pi/2) = csc\, x$, es decir que, para estas curvas, coseno y secante se tiene que:

$$f(x - \pi/2) = cof(x)$$

Mientras que para las gráficas seno y tangente se presenta que:

$$sen(x - \pi/2) = cos\, x \quad \text{y que}$$

$$tan(x - \pi/2) = cot\, x$$

Es decir que:

$$f(x - \pi/2) = -\, cof(x)$$

En general, para cada una de las funciones circulares se cumple que:

$$f(x - \pi/2) = cof(x) \qquad (41)$$

En donde nuevamente el signo vale para cada función trigonométrica $f(x)$, para todos los valores de x.

Demostración:
Sea una función de la forma $f(x + n\pi)$, dónde n es cualquier entero.

I. Sí n es par
Si n es par y por la periodicidad de $f(x)$ se cumple que $f(x + n\pi) = f(x)$ siendo $f(x)$ cualquier función circular.

II. Sí n es impar

Luego $f(x + n\pi) = f((x - \pi) + (n + 1)\pi) = \pm f(x - \pi)$ por periodicidad de $f(x)$. Aplicando la Ecuación (40).

$$f(x + n\pi) = \pm f(x) \tag{42}$$

Entonces la Ecuación (42) es válido sí n es par o impar.

Nótese que para una función circular dado el signo aplicable es válida para todos los valores de la variable para los cuales este definida la función circular.

Consideremos la función de la forma $f(x + n\frac{\pi}{2})$, donde n es un entero impar, es decir que:

$$f(x + n\pi/2) = f(x - \pi/2 + (n + 1)\,\pi/2) = \pm f(x - \pi/2)$$

Ya que $n + 1$ es par y $(n+1)/2$ es un múltiplo de π y por la periodicidad de se cumple lo anterior. Por la Ecuación (41).

$$f(x + n\pi/2) = \pm cof(x) \tag{43}$$

Finalmente, si hacemos un reemplazo de x por $-x$ en la Ecuación (42) y (43) es decir, reflexion con respecto al eje y. Utilizando la Ecuación (43) se tiene que:

$$f(x + n\pi) = \pm f(x)$$

$$f(-x + n\pi) = \pm f(-x)$$

Sabemos que toda función trigonométrica es par o impar se debe cumplir qué $f(-x) = \pm f(x)$ luego

$$f(-x + n\pi) = \pm f(x) \tag{44}$$

Usando las Ecuaciones (43) y (44) tenemos que:

$$f(\pm x + n\pi) = \pm f(x) \tag{45}$$

Utilizando la Ecuación (43) tendremos que,

$$f(x + n\pi/2) = \pm cof(x)$$

Reemplazando *x* por −*x* se obtiene:

$$f(-x + n\pi/2) = \pm cof(-x)$$

Por la sección 3.8 tenemos que:

$$\pm cof(-x) = \pm cof(x)$$

Reemplazando:

$$f\left(-x + \frac{n\pi}{2}\right) = \pm cof(x) \tag{46}$$

Uniendo las Ecuaciones (43) y (46) se debe cumplir que:

$$f\left(\pm x + \frac{n\pi}{2}\right) = cof(x) \tag{47}$$

Para cualquier entero impar *n*.

Con esto queda demostrado el teorema 3.8.1.3.1, aunque podemos mejorar aún más su presentación, como:

Teorema:

Sí *f(x)* es cualquier función circular, entonces:

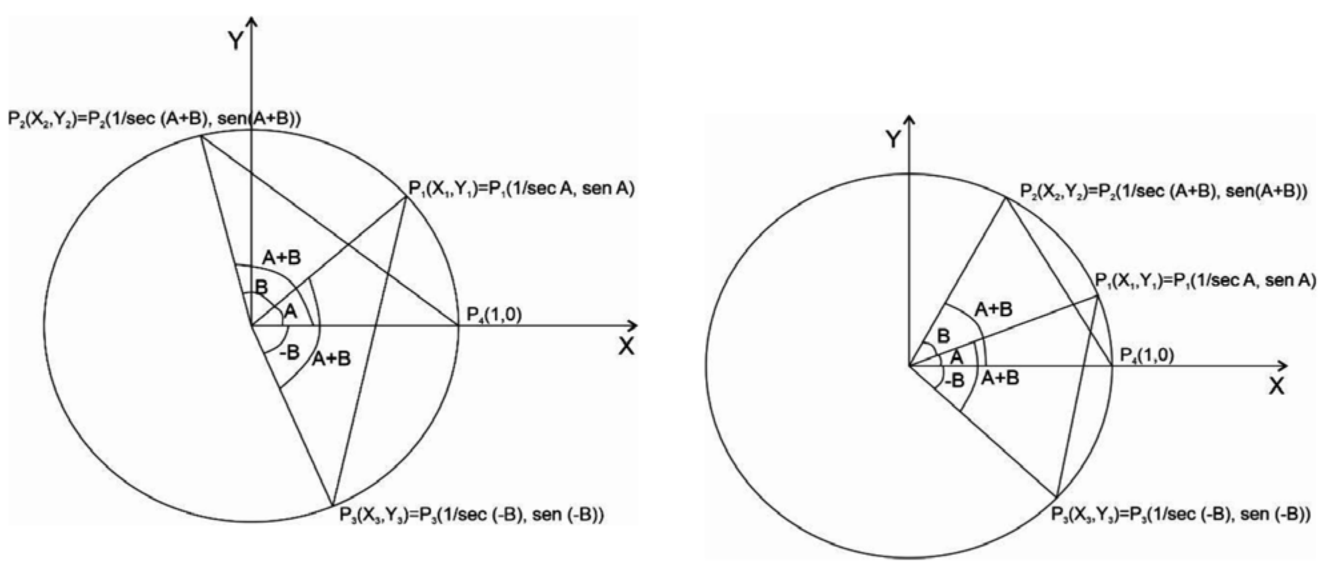
$$f\left(\left(\frac{n\pi}{2}\right) \pm x\right) = \begin{cases} \pm f(x), & si\ n\ es\ par \\ \pm cof(x), & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

Donde para un entero dado *n*, el signo de apropiado en los segundos miembros de la ecuación, se aplica para todos los valores de *x* para los cuales están definidas las funciones. Como puede notarse el anterior teorema es el resumen de las Ecuaciones (45) y (47).

4.8.2 Fórmulas Trigonométricas

4.8.2.1 Secante de la Suma de Dos Ángulos

Sea la Figura 4.16 (a) y (b) una circunferencia de radio unitario, con centro en el origen de coordenadas XY, y los ángulos A (en posición normal, ver Figura 4.16), B (trazado con su vértice en 0, y el lado inicial sobre el lado terminal de A; es decir que B está en posición normal en un sistema de coordenadas cuyos ejes se obtienen girando alrededor de 0 los ejes *x* y *y* en un ángulo A). A+B y -B, estos últimos en posición normal. Denotaremos la intersección del ángulo A con la circunferencia mediante la letra P1, asimismo para las siguientes intersecciones P2 para la intersección del ángulo A+B, P3 para la intersección del ángulo -B y por último al punto de coordenadas (1,0) mediante P4.



(a) (b)

Figura 4.16 Secante de la suma de dos ángulos, (a) y (b).

Debemos demostrar que:

$$sec(A+B) = \frac{sec\,A\,sec\,B}{1 - tan\,A\,tan\,B} \tag{48}$$

Demostraremos la Ecuación (48) con restricción de que A y B sean ángulos en el intervalo $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$, luego A+B es $\pi/2$, o un ángulo en Q1, o un ángulo Q2. Los pasos que a continuación daremos se aplican a los tres casos antes enunciados.

Si las coordenadas de P1 son (*x1, y1*), y de acuerdo a la sección 3.2 y 3.4 tenemos que cos A = *x1* y sen A = *y1* respectivamente, luego las coordenadas de P1 son *(1/sec(A + B), sen (A + B)).*

Análogamente se puede obtener las coordenadas de P2 y P3 que son *(1/sec (A + B), sen (A + B))* y respectivamente.

Cómo el ángulo P30P4 es B y el ángulo P40P1 es A, luego el ángulo P30P1 es B+A, es decir que los triángulos P30P1 y P40P2 son iguales, por lo tanto P3P1= P4P2. Ahora bien recordemos que *1/sec(−B) = 1/sec B* y *sen (−B) = − sen B*. Cómo sabemos de nuestro curso de trigonometría, la distancia entre los puntos P1(*x1, y1*) y P2(*x2, y2*) es posible gracias a que la distancia entre dos puntos (d) es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{49}$$

Pues bien, utilizando las coordenadas de cada punto (ver Figura 4.16), tenemos que:

$$(P3P1)^2 = \left((1/sec\,A) - (1/sec\,B)\right)^2 + (sen\,A + sen\,B)^2$$

$$= (1/sec^2A) - 2/(sec\,A\,sec\,B) + (1/sec^2B) + sen^2A + 2sen\,A\,sen\,B + sen^2B$$

$$(P3P1)^2 = 2 - \frac{2}{(sec\,A\,sec\,B)} + 2sen\,A\,sen\,B$$

Ahora bien,

$$(P4P2)^2 = \left((1/sec\ (A+B)) - 1\right)^2 + (sen\ (A+B) - 0)^2$$
$$= 1/sec^2(A+B) - 2/sec(A+B) + 1 + sen^2(A+B)$$
$$(P4P2)^2 = 2 - 2/sec(A+B)$$

Pero cómo P3P1= P4P2, se debe cumplir que $(P3P1)^2 = (P4P2)^2$ es decir que:

$$2 - 2/(sec\ A\ sec\ B) + 2sen\ A\ sen\ B = 2 - 2/sec(A+B)$$
$$\frac{1}{sec(A+B)} = -\frac{1}{sec\ A\ sec\ B} - sen\ A\ sen\ B = \frac{1 - (sen\ A\ sec\ A)(sen\ B\ sec\ B)}{sec\ A\ sec\ B}$$
$$\frac{1}{sec(A+B)} = \frac{1 - tan\ A\ tan\ B}{sec\ A\ sec\ B}$$
$$sec(A+B) = \frac{sec\ A\ sec\ B}{1 - tan\ A\ tan\ B} \tag{50}$$

Que era lo que queríamos demostrar.

4.8.2.2 Secante del ángulo doble

Sí en lugar de utilizar el ángulo B en la Ecuación (30) utilizamos el ángulo A, obtendremos

$$sec(A+A) = \frac{sec\ A\ sec\ A}{1 - tan\ A\ tan\ A} = \frac{sec^2 A}{1 - tan^2 A} \tag{51}$$

Como la $sec^2 A = 1 + tan^2 A$

$$= \frac{1 + tan^2 A}{1 - tan^2 A}$$
$$sec(2A) = \frac{1 + tan\ A}{1 - tan\ A} \tag{52}$$

Obsérvese que es necesario saber la identidad expresada en la Ecuación (30) únicamente, ya que las demás resultarán de cambiar un ángulo de la misma ecuación.

4.8.2.3 Secante del ángulo mitad

Si se resuelve la Ecuación (51) respecto a $sec^2 A$,

$$sec^2 A = \frac{sec^2 A}{1 - tan^2 A}$$

Es decir que:

$$sec^2 A = (1 - tan^2 A)\ sec\ (2A)$$

sustituyendo A por 1/2B, entonces 2A=B, se tiene que:

$$sec(B/2) = (1 - tan2(B/2))\ sec\ (B) \qquad (53)$$

El signo algebraico a utilizar en la Ecuación (53) el signo que determina la función coseno de 1/2B en el cuadrante correspondiente. Tengase presente la Ecuación (52) en la deducción del seno de la ángulo mitad.

4.8.2.4 Secante de la diferencia de dos ángulos

Si en la Ecuación (50) sustituimos -C por B,

$$sec(A - C) = \frac{sec\ A\ sec\ (-C)}{1 - tan\ A\ tan\ (-C)}$$

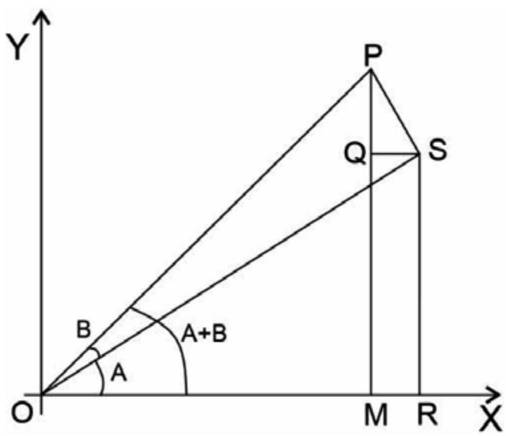
Dado que la función secante es par y la función circular tangente es impar, se cumple que:

$$sec(A - C) = \frac{sec\ A\ sec\ C}{1 + tan\ A\ tan\ C} \qquad (54)$$

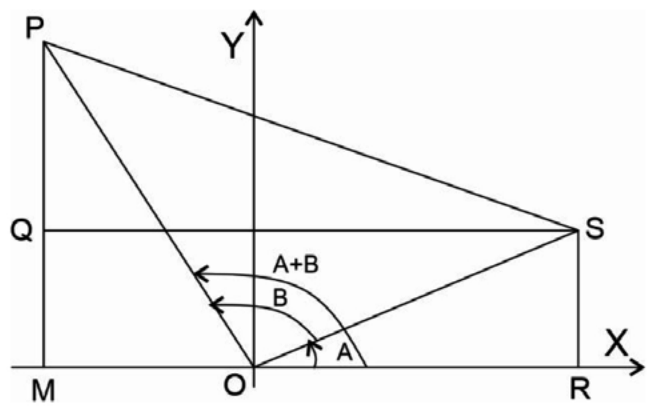
Notese que, partiendo de la Ecuación (54) podemos hallar las Ecuaciones (50), (52) y (53).

4.8.2.5 Seno de la suma de dos ángulos

Con centro en el origen de coordenadas *xy*, y los ángulos A (en posición normal), B (trazando con su vértice en 0, y el lado inicial sobre el lado terminal de A; es decir que B está en posición normal en un sistema de ejes coordenados cuyos ejes se obtienen girando alrededor de 0, los ejes *x* y *y* en un ángulo A), y A+B (en posición común), ver figura 4.17.



(a)



(b)

Figura 4.17 Seno de la suma de dos ángulos, (a) y (b)

Debemos demostrar que:

$$sen(A + B) = sen\,A\,cos\,B - cos\,A\,sen\,B \qquad (55)$$

Demostraremos la Ecuación (55) con restricción de A y B sean igual en el intervalo: 0<$A + B < \pi/2$, o $\pi/2 < A + B > \pi$, es decir que el ángulo esta en el Q1 o en el Q2.

Sí P es un punto sobre el lado terminal de, la línea PS se traza perpendicular al lado terminal de A, y PM se traza perpendicular al eje *x*. En seguida QS se traza perpendicular a PM, tenemos que:

$$sen(A+B) = \frac{PM}{OP} = \frac{QM+PQ}{OP} = \frac{QM}{OP} + \frac{PQ}{OP} = \frac{SR}{OP} + \frac{PQ}{OP}$$

$$sen(A+B) = \frac{SR}{OP}\frac{OS}{OP} + \frac{PS}{OP}\frac{PQ}{PS}$$

$$sen(A+B) = sen\ A\ cos\ B - cos\ A\ sen\ B$$

Que corresponde a lo que se quería demostrar.

4.8.2.7 Seno del ángulo doble

Si en la Ecuación (55) se reemplaza A por B, tendremos que

$$sen\ (A+A) = sen\ A\ cos\ A - cos\ A\ sen\ A$$

$$sen\ (2A) = 2sen\ cos\ B \quad (56)$$

4.82.7 Seno del ángulo mitad

Resolviendo la Ecuación (52) respecto a , se tiene que

$$sec(2A) = \frac{1+tan\ A}{1-tan\ A}$$

$$\frac{1}{cos(2A)} = \frac{1+\frac{sen\ A}{cos\ A}}{1-\frac{sen\ A}{cos\ A}} = \frac{\frac{cos\ A+sen\ A}{cos\ A}}{\frac{cos\ A-sen\ A}{cos\ A}} = \frac{\cos A+sen\ A}{\cos A-sen\ A}\frac{\cos A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos A+sen\ A}{\cos A-sen\ A}\frac{\cos A+sen\ A}{\cos A+sen\ A} = \frac{\cos^2 A+sen^2\ A}{\cos^2 A-sen^2\ A}$$

$$\cos(2A) = \cos^2 A - sen^2\ A = 1-2sen^2 A$$

$$sen\ A = \sqrt{\frac{1-cos\ (2A)}{2}} = \sqrt{\frac{sec\ (2A)-1}{2}sec\ (2A)}$$

Haciendo *2A = B*

$$sen(B/2) = \sqrt{\frac{sec\ B-1}{2}sec\ B} \quad (57)$$

Es la fórmula para el seno de la mitad de un ángulo. El signo algebraico a emplear depende del cuadrante a que pertenezca B/2.

4.8.2.8 Seno de la diferencia de dos ángulos

Si se reemplaza en la Ecuación (55) al ángulo B por el ángulo -C, se tiene:

$$sen\ (A - C) = sen\ A\ cos\ (-C) - cos\ A\ sen\ (-C)$$

Como $cos(-C) = cos\ C$ y $sen\ (-C) = -sen\ C$, luego,

$$sen\ (A - C) = sen\ A\ cos\ C - cos\ A\ sen\ C \qquad (56)$$

4.8.2.9 Tangente de la suma de dos ángulos

Para deducir la fórmula de la tangente de la suma de dos ángulos, tendremos que apelar a la Ecuación (23) (identidades de razón), es decir que:

$$\tan(A+B) = \frac{sen\ (A+B)}{cos\ (A+B)}$$

Como,

$$\sec(A+B) = \frac{sec\ A\ sec\ B}{1 - \tan A \tan B}; \qquad cos\ (A+B) = \frac{1 - \tan A \tan B}{sec\ A\ sec\ B} =$$

$$= cos\ A\ cos\ B(1 - tan\ A\ tan\ B)$$

$$cos\ (A+B) = cos\ A \cos B - sen\ A\ sen\ B \qquad (59)$$

Luego:

$$tan\ (A+B) = \frac{sen\ A\ cos\ B + cos\ A\ sen\ B}{cos\ A\ cos\ B + sen\ A\ sen\ B}$$

Dividiendo la tan *(A + B)* en el numerador y el denominador por *cos A cos B*

$$tan\ (A+B) = \frac{tan\ A + tan\ B}{1 - tan\ A\ tan\ B} \qquad (60)$$

4.8.2.10 Tangente del ángulo doble

Para hallar la fórmula de la tangente del ángulo doble se debe realizar la siguiente sustitución, B=A, así:

$$tan\,(A+A) = \frac{tan\,A + tan\,A}{1 - tan\,A\,tan\,A}$$
$$tan\,(2A) = \frac{2tan\,A}{1 - tan^2\,A} \tag{61}$$

4.8.2.11 Tangente del ángulo mitad

Cómo sabemos

$$tan\,(1/2B) = \sqrt{\frac{\frac{1 - cos\,B}{2}}{\frac{1 + cos\,B}{2}}}$$

Utilizando un solo radical, y multiplicando el numerador y el denominador por 2, se obtiene:

$$tan\,(1/2B) = \sqrt{\frac{1 - cos\,B}{1 + cos\,B}} \tag{62}$$

Podemos cambiar la forma de la tangente del ángulo mitad, si multiplicamos el numerador y el dominador por *1 – cos B*, luego:

$$tan\,(1/2B) = \sqrt{\frac{1 - cos\,B}{1 + cos\,B}} * \sqrt{\frac{1 - cos\,B}{1 - cos\,B}} = \sqrt{\frac{(1 - cos\,B)^2}{sen^2 B}} =$$
$$tan\,(1/2B) = \frac{1 - cos\,B}{sen\,B} \tag{63}$$

Nótese que si en vez de multiplicar y dividir por *1 – cos B*, hubiéramos multiplicado el numerador y el denominador por *1 + cos B* y simplificando se obtendría:

$$tan\,(1/2B) = \frac{sen\,B}{1 - cos\,B} \tag{64}$$

4.8.2.12 Tangente de la diferencia de dos ángulos

Para obtener la fórmula de la tangente de la diferencia de dos ángulos, se realiza una sustitución en la Ecuación (60) de −C por B.

$$tan\ (A - C) = \frac{tan\ A + tan\ (-C)}{1 - tan\ A\ tan\ (-C)}$$

Como la *tan (−C) = −tan C*, se tiene que

$$tan\ (A - C) = \frac{tan\ A - tan\ C}{1 + tan\ A\ tan\ C} \qquad (65)$$

A continuación presentaremos algunos ejemplos a las anteriores deducciones, y trataremos de mostrar ejemplos de aplicación en la rama de la ingeniería civil.

Ejemplo

Determinar el valor exacto de las funciones dadas y exprese la respuesta en la forma más sencilla posible.

a) cos(π/2)

b) cos(23π/12)

Para el caso *a)*

$$cos(\pi/2) = cos(\pi/4 - \pi/6) = cos(\pi/4)cos(\pi/6) + sen(\pi/4)sen(\pi/6) =$$

$$= \frac{2^{1/2}}{2} * \frac{3^{1/2}}{2} + \frac{2^{1/2}}{2} * \frac{1}{2} = \frac{6^{1/2}}{4} + \frac{2^{1/2}}{4}$$

$$cos(\pi/2) = \frac{6^{1/2}}{4} + \frac{2^{1/2}}{4}$$

Para el caso *b)*

$$cos\ (23\pi/12) = cos\ (2\pi - \pi/12) = cos(2\pi)cos(\pi/12) + sen(2\pi)sen(\pi/12)$$

$$= 1 * \frac{6^{1/2}}{4} + \frac{2^{1/2}}{4} = \frac{(6^{1/2} + 2^{1/2})}{4}$$

Ejemplo

Para la Figura 4.18, evalúen *cos(A − B)*, *cos(A +B)*, *sen(A +B), tan(A −B)* y *tan(A + B)*, en cada caso.

a.) *sen A = 5/13;* *cos B = 3/5*

b.) *cos A = −8/17* *sen B = 4/5*

Para el caso (a)

a.) *sen A = 5/13* *cos B = 3/5*

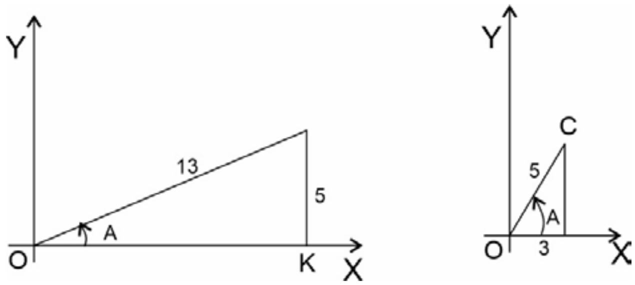


Figura 4.18 Ejemplo de adicción y sustracción de ángulos en triángulos rectángulos caso a)

Los dos lados restantes son determinados usando el Teorema de Pitagoras,

$\overline{OK} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12;\quad cos\ A = 12/13;\quad sen\ B = 4/5$

$\overline{OC} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4;$

Luego,

$$cos\ (A+B) = cos\ A\ cos\ B - sen\ A\ sen\ B = \frac{12}{13}\frac{3}{5} - \frac{5}{13}\frac{4}{5} = \frac{36}{65} - \frac{4}{13} = \frac{16}{65}$$

$$cos\ (A-B) = cos\ A\ cos\ B + sen\ A\ sen\ B = \frac{12}{13}\frac{3}{5} + \frac{5}{13}\frac{4}{5} = \frac{36}{65} + \frac{4}{13} = \frac{56}{65}$$

$$sen\ (A+B) = sen\ A\ cos\ B + cos\ A\ sen\ B = \frac{5}{13}\frac{3}{5} + \frac{12}{13}\frac{4}{5} = \frac{3}{13} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}$$

$$sen\ (A-B) = sen\ A\ cos\ B - cos\ A\ sen\ B = \frac{5}{13}\frac{3}{5} - \frac{12}{13}\frac{4}{5} = \frac{3}{13} - \frac{48}{65} = -\frac{33}{65}$$

$$tan\ (A+B) = \frac{tan\ A + tan\ B}{1 - tan\ A\ tan\ B} = \frac{\frac{5}{12} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{5}{12}\frac{4}{3}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{4}{9}} = \frac{63}{16}$$

$$tan\ (A-B) = \frac{tan\ A - tan\ B}{1 + tan\ A\ tan\ B} = \frac{\frac{5}{12} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{5}{12}\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{11}{12}}{\frac{14}{9}} = -\frac{33}{56}$$

b.) $cos\ A = -8/17$ $\quad\quad$ $sen\ B = 4/5$

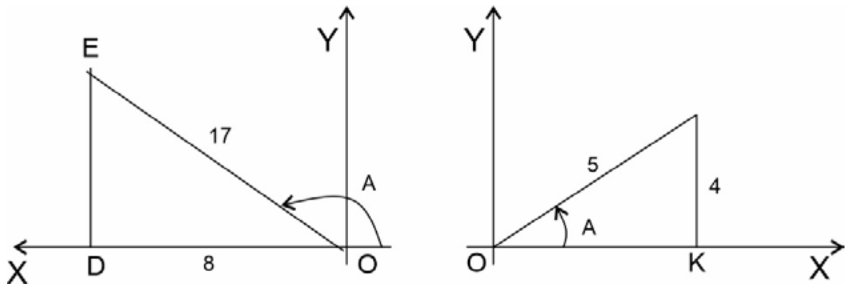


Figura 4.19 Ejemplo de adición y sustracción de ángulos en triángulos rectángulos, caso b)

Los dos lados restantes son determinados usando el Teorema de Pitagoras,

$\overline{DE} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15;\quad cos\ B = 3/15;\quad sen\ A = 15/17;\quad tan\ A = -15/8$ y $tan\ B = 4/3$.

$\overline{OC} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3;$

Luego,

$$cos\ (A+B) = cos\ A\ cos\ B - sen\ A\ sen\ B = -\frac{8}{17}\frac{3}{5} - \frac{15}{17}\frac{4}{5} = -\frac{84}{85}$$

$$cos\ (A-B) = cos\ A\ cos\ B + sen\ A\ sen\ B = -\frac{8}{17}\frac{3}{5} + \frac{15}{17}\frac{4}{5} = \frac{36}{85}$$

$$sen\ (A+B) = sen\ A\ cos\ B + cos\ A\ sen\ B = -\frac{8}{17}\frac{4}{5} + \frac{15}{17}\frac{3}{5} = \frac{13}{85}$$

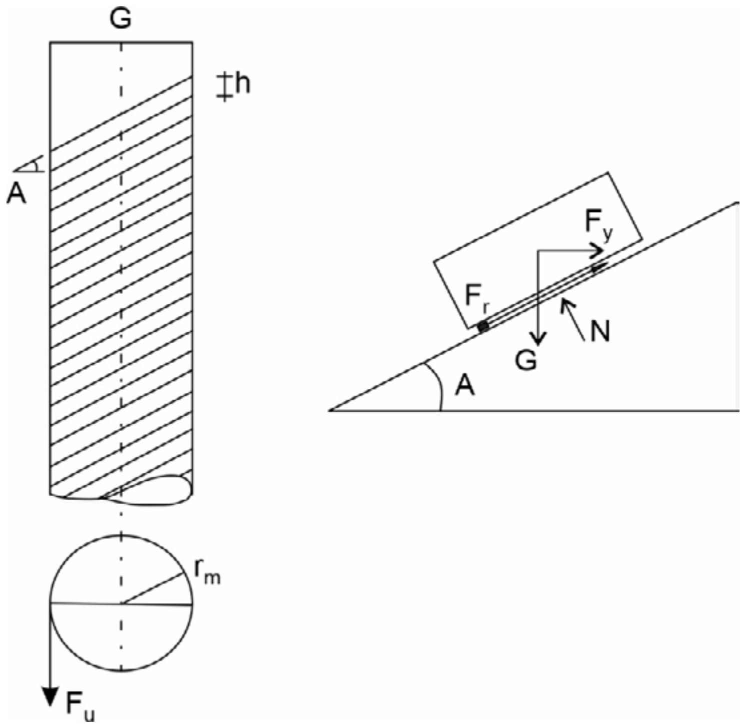
$$sen\ (A-B) = sen\ A\ cos\ B - cos\ A\ sen\ B = \frac{15}{17}\frac{3}{5} - \left(-\frac{8}{17}\right)\frac{4}{5} = \frac{77}{85}$$

$$tan\ (A+B) = \frac{tan\ A + tan\ B}{1 - tan\ A\ tan\ B} = \frac{\left(-\frac{5}{8}\right) + \frac{4}{3}}{1 - \left(-\frac{15}{8}\right)\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{13}{24}}{\frac{7}{2}} = -\frac{13}{84}$$

$$tan\ (A-B) = \frac{tan\ A - tan\ B}{1 + tan\ A\ tan\ B} = \frac{-\frac{15}{8} - \frac{4}{3}}{1 + \left(-\frac{5}{12}\right)\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{77}{24}}{-\frac{3}{2}} = \frac{77}{36}$$

Ejemplo

Mediante un tornillo de paso circlar levanta una carga G. Qué momento se necesita?. Sí: h es el paso de rosca, r_m el radio medio y fuerza tangencial (ver Figura 4.20 a y 4.20 b).



a) b)

Figura 4.20 Ejemplo de aplicación en tornillos, caso a) y caso b)

El movimiento de dos superficies del tornillo, una respecto de la otra, y el movimiento de un cuerpo sobre un plano con un ángulo de inclinación A obedecen en mecánica a la misma ley de rozamiento (Figura 4.20 b). La tangente del ángulo A es el cociente del paso de rosca y el contorno medio desarrollado. Para un movimiento con velocidad constante las componentes de la fuerza en la dirección del movimiento y en la perpendicular a él están en cada caso en equilibrio, esto es, satisfacen las ecuaciones $F_t \cos A - F_r = G \operatorname{sen} A$ y $F_n = G \cos A + F_t \operatorname{sen} A$. Entre la fuerza normal F_n y la fuerza de rozamiento F_r existe ademas la relación $F_r = nF_n$. El coeficiente de rozamiento es $n = \tan B$, siendo B aquel ángulo de inclinación del plano para el cual la carga se deslizaría por su propio peso con velocidad uniforme. Para la fuerza tangencial se obtiene:

$$F_t = G\frac{sen\ A + n\ cos\ A}{cos\ A - n\ sen\ A}$$

Dividiendo el numerador y denominador por cos A, e introduciendo el ángulo de rozamiento, esta expresión se simplifica,

$$F_t = G\frac{tan\ A + n\ tan\ B}{1 - tan\ A\ tan\ B} = G\ tan\ (A + B)$$

El momento M (ver Figura 4.20 a) $M = F_t\, r_m$

4.8.2.13 Fórmulas de productos y factores

Escribamos las fórmulas anteriormente deducidas *sen (A + B)* y *sen (A − B)*, tenemos que:

$$sen\ (A + B) = sen\ A\ cos\ B + cos\ A\ sen\ B$$

$$sen\ (A - B) = sen\ A\ cos\ B - cos\ A\ sen\ B$$

Sumando miembro a miembro estas dos expresiones, tenemos:

$$sen\ (A + B) + sen\ (A - B) = 2\ sen\ A\ cos\ B$$

Al resolver *sen A cos B*,

$$sen\ A\ cos\ B = \frac{sen\ (A + B) + sen\ (A - B)}{2} \qquad (66)$$

Y la substracción de las fórmulas del seno de la suma y la resta de ángulos cómo se obtiene:

$$cos\ A\ sen\ B = \frac{sen\ (A + B) - sen\ (A - B)}{2} \qquad (67)$$

Del mismo modo, la adición de las fórmulas del secante de la suma y resta de ángulos, se tiene:

$$sec\ (A + B) = \frac{sec\ A\ sec\ B}{1 - tan\ A\ tan\ B}$$

$$sec\ (A - B) = \frac{sec\ A\ sec\ B}{1 + tan\ A\ tan\ B}$$

$$sec\ (A + B) + sec\ (A - B) = sec\ A\ sec\ B\left(\frac{1}{1 - tan\ A\ tan\ B} + \frac{1}{1 + tan\ A\ tan\ B}\right)$$

$$= sec\ A\ sec\ B\left(\frac{1 + tan\ A\ tan\ B + 1 - tan\ A\ tan\ B}{1 - tan^2\ A\ tan^2\ B}\right)$$

$$= sec\ A\ sec\ B \left(\frac{2}{1 - tan^2\ A\ tan^2\ B}\right)$$

$$\frac{sec\ A\ sec\ B}{1 - tan^2\ A\ tan^2\ B} = \frac{1}{2} sec\ (A + B) + sec\ (A - B)$$

Es decir que,

$$sec\ A\ sec\ B = \frac{1}{2}(1 - tan^2\ A\ tan^2\ B)\big(sec\ (A + B) + sec\ (A - B)\big) \qquad (68)$$

Y la substracción de las fórmulas de la secante de la suma y la resta de ángulos, se obtiene:

$$sec\ (A + B) - sec\ (A - B) = sec\ A\ sec\ B \left(\frac{1}{1 - tan\ A\ tan\ B} - \frac{1}{1 + tan\ A\ tan\ B}\right)$$

$$= sec\ A\ sec\ B \left(\frac{1 + tan\ A\ tan\ B - 1 + tan\ A\ tan\ B}{1 - tan^2\ A\ tan^2\ B}\right)$$

$$= sec\ A\ sec\ B \left(\frac{2tan\ A\ tan\ B}{1 - tan^2\ A\ tan^2\ B}\right)$$

Luego,

$$sec\ A\ sec\ B \left(\frac{tan\ A\ tan\ B}{1 - tan^2\ A\ tan^2\ B}\right) = \frac{1}{2}\big(sec\ (A + B) - sec\ (A - B)\big)$$

$$\frac{tan\ A\ tan\ B}{1 - tan\ A\ tan\ B}\ \frac{sec\ A\ sec\ B}{1 + tan\ A\ tan\ B} = \frac{1}{2}\big(sec\ (A + B) - sec\ (A - B)\big)$$

$$\frac{tan\ A\ tan\ B}{1 - tan\ A\ tan\ B} sec\ (A + B) = \frac{1}{2}\big(sec\ (A + B) - sec\ (A - B)\big)$$

$$\frac{tan\ A\ tan\ B}{1 - tan\ A\ tan\ B} = \frac{1}{2}\left(\frac{sec\ (A + B)}{sec\ (A - B)} - 1\right)$$

$$\frac{sen\ A\ sen\ B}{cos\ A\ cos\ B - sen\ A\ sen\ B} = \frac{1}{2}\left(\frac{sec\ (A + B)}{sec\ (A - B)} - 1\right)$$

$$\frac{sen\ A\ sen\ B}{cos\ (A + B)} = \frac{1}{2}\left(\frac{sec\ (A + B)}{sec\ (A - B)} - 1\right)$$

$$sen\ A\ sen\ B = \frac{1}{2} cos\ (A + B)\left(\frac{sec\ (A + B)}{sec\ (A - B)} - 1\right)$$

$$sen\ A\ sen\ B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{sec\ (A - B)} - \frac{1}{sec\ (A + B)}\right)$$

$$sen\ A\ sen\ B = \frac{1}{2}\left(\frac{sec\ (A + B) - sec\ (A - B)}{sec\ (A - B) sec\ (A + B)}\right) \qquad (69)$$

Si tomamos las identidades anteriormente deducidas de la *tan (A + B)* y *tan (A – B)*, luego:

$$tan\ (A+B) = \frac{tan\ A + tan\ B}{1 - tan\ A\ tan\ B}$$

$$tan\ (A-B) = \frac{tan\ A - tan\ B}{1 + tan\ A\ tan\ B}$$

Sumando miembro a miembro estas dos expresiones tenemos que:

$$tan\ A\ tan\ B = 1 - \frac{2\ tan\ A\ sec^2 B}{tan\ (A+B) + tan\ (A-B)} \tag{70}$$

Y haciendo la resta de la *tan (A + B)* y *tan (A – B)*,

$$tan\ A\ tan\ B = 1 - \frac{2\ tan\ B\ sec^2 A}{tan\ (A+B) - tan\ (A-B)} \tag{71}$$

Las Ecuaciones (66), (67), (68), (69), (70) y (71) se conocen como fórmulas de producto.

Sea *(A + B) = x*, y *(A – B) = y*. Podemos resolver estás ecuaciones para obtener $A = \frac{1}{2}(x+y)$, $B = \frac{1}{2}(x-y)$, y la substracción de esto en la Ecuación (66),

$$sen\ x + sen\ y = 2\left[\frac{sen\frac{1}{2}(x+y)}{sec\frac{1}{2}(x-y)}\right] \tag{72}$$

Al substituir *y* por *-y* en esta fórmula resulta, ya que *sen(−y) = −sen y*,

$$sen\ x - sen\ y = 2\left[\frac{sen\frac{1}{2}(x-y)}{sec\frac{1}{2}(x+y)}\right] \tag{73}$$

Por la substitución de las Ecuaciones (67), (68), (69), (70) y (71) obtenemos:

$$sec\ x - sec\ y = \frac{sec\frac{1}{2}(x+y)\ sec\frac{1}{2}(x-y)}{1 - \left[tan\frac{1}{2}(x+y)\ tan\frac{1}{2}(x-y)\right]^2} \tag{74}$$

También,

$$sec\ x - sec\ y = 2sec\ x\ sec\ y sec\frac{1}{2}(x+y)\ sec\frac{1}{2}(x-y) \tag{75}$$

y,

$$tan\ x + tan\ y = \frac{2tan\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] sec^2\left[\frac{1}{2}(x-y)\right]}{1-\left\{tan\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] tan\left[\frac{1}{2}(x-y)\right]\right\}^2} \tag{76}$$

$$tan\ x - tan\ y = \frac{2tan\left[\frac{1}{2}(x-y)\right] sec^2\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]}{1-\left\{tan\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] tan\left[\frac{1}{2}(x-y)\right]\right\}^2} \tag{77}$$

Las Ecuaciones (70), (71), (72), (73), (74), (75), (76) y (77) se llaman fórmulas de factores. Nótese que las fórmulas de producto expresan como suma ciertos productos de senos y cosenos, mientras que las fórmulas de factores expresan como productos ciertas sumas de senos y cosenos.

Bibliografía

Bell, E. T. (2021). *Historia de las matemáticas*. Fondo de cultura económica.

Rey Pastor, J., & Babini, J. (1984). *Historia de la Matemática*.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2019). *História da matemática*. Editora Blucher.

Ruiz Guzmán L.F. (1990). Apuntes de Matematicas, Universidad de La Salle.

Thompson, J. E., & Ortiz Vázquez, R. (1992). *Trigonometría*. Editorial UTEHA Noriega, 2da edicion.

Moise, E. E. (1980). *Geometria elemental desde el punto de vista avanzado*. Compania Editorial Continental.

Tirado, A. (2021). Asíntotas curvas en funciones del plano cartesiano. *Revista Paradigma*, *42*(1), 66-81.

Barnett, R. (1988). *Álgebra y trigonometría* (No. 512 B261a). editorial McGraw-Hill, 2da edición.

Niles, N. O. (1970). *Trigonometría plana*. AID, Washington (EUA), 2da edición.

Swokowski, E. W., & JA, C. (2005). *Algebra y trigonometria con geometria analitica*. Editorial Thomson.

Ayres, F., & Linares, A. (1970). *Teoría y problemas de trigonometría plana y esférica,* editorial MC Graw Hill.

PATIÑO DUQUE, G. (1966). *Trigonometría plana y esférica*. editorial bedout, 6ta. edición.

Spitzbart, A., BOUCLIER, S., & ANDRES, T. (1972). *Algebra y trigonometría plana* (No. 512.13 S758A.).

Nestor, A. (1959). *Trigonometria Plana.* editorial bedout.

Hirsch, C. R., & Schoen, H. L. (1987). *Trigonometría: conceptos y aplicaciones*. Editorial McGraw-Hill.

Delgado, A. (1966). *Tratado de trigonometría plana y esférica*. Editorial Bedout.

Ministerio de obras públicas de Venezuela, *Apuntes de topografia en vias,* 2da edición.

Torres Nieto, A., & Villate Bonilla, E. (1983). *Topografía* (No. 526.9 T6 1983), editorial norma, tercera edición.

Carciente, J. (1980). *Carreteras: estudio y proyecto*. Vega, ediciones Vega segunda edición.

García, N. A. (2019, September). Quantification of uncertainty in metallic elements subjected to fatigue. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1329, No. 1, p. 012011). IOP Publishing.

García, N. A., Alvarez, K. F., & Calderón, F. (2019, November). A numerical model of the behavior of the resistance to compression in prisms of solid masonry. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1386, No. 1, p. 012131). IOP Publishing.

García, N. A., Sanchez, C. N., & Serna, C. N. (2020, September). Evaluation of uncertainty in determining the physical properties of concrete using Bootstrap. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1645, No. 1, p. 012008). IOP Publishing.

García, N. A., Gómez, G. G., & Serna, C. N. (2021, May). Reinforced concrete beams subjected to three-point bending using finite element method. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1938, No. 1, p. 012008). IOP Publishing.

Afanador-Garcia, N., Guerrero-Gomez, G., & Gallardo-Amaya, R. (2022, Feb). Structural and physical evaluation of a reinforced beam using strain gauges. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 2153, No. 1, p. 012003). IOP Publishing.