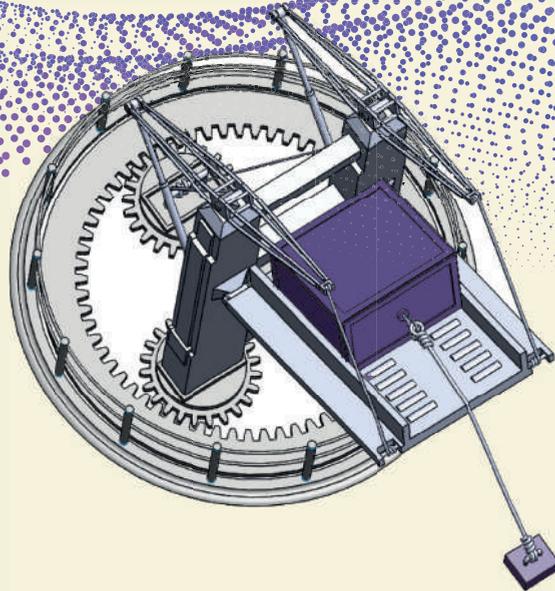


# CINEMÁTICA Y CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA

PROBLEMAS RESUELTOS



**Gustavo Guerrero Gómez - Nelson Afanador García  
Christian Nolasco Serna**





**CINEMÁTICA Y CINÉTICA  
DE UNA PARTÍCULA**  
PROBLEMAS RESUELTOS

GUSTAVO GUERRERO GÓMEZ  
NELSON AFANADOR GARCÍA  
CHRISTIAN NOLASCO SERNA

Guerrero Gómez, Gustavo

Cinemática y cinética de una partícula : problemas resueltos / Gustavo Guerrero Gómez, Nelson Afanador García, Christian Nolasco Serna. -- 1a. ed. -- Ocaña : Universidad Francisco de Paula Santander ; Bogotá : Ecoe Ediciones, 2020.

73 p. -- (Ingeniería y afines. Ingeniería)

Incluye datos de los autores en la pasta. -- Contiene bibliografía.

ISBN 978-958-503-037-4 -- 978-958-503-038-1 (e-book)

1. Cinemática - Problemas, ejercicios, etc. 2. Partículas  
I. Afanador García, Nelson II. Nolasco Serna, Christian III. Título  
IV Serie

CDD: 531.112 ed. 23

CO-BoBN- a1069051

---



**Área:** Ingeniería y afines

**Subárea:** Ingeniería



**Universidad Francisco  
de Paula Santander**

Ocaña - Colombia  
Vigilada Mineducación

© Gustavo Guerrero Gómez  
© Nelson Afanador García  
© Christian Nolasco Serna

- ▶ Universidad Francisco de Paula Santander  
Vía Acolsure, Sede el Algodonal  
Ocaña Norte de Santander -  
Colombia  
Teléfono (057)(7) 5690088  
Bogotá, Colombia
- ▶ Ecoe Ediciones Limitada  
Carrera 19 # 63C 32  
Bogotá, Colombia

**Primera edición:** Bogotá, diciembre del 2020

**ISBN:** 978-958-503-037-4  
**e-ISBN:** 978-958-503-038-1

Directora editorial: Claudia Garay Castro  
Corrección de estilo: Andrés Caro  
Copy: Angie Sánchez Wilchez  
Diagramación: Magda Barrero  
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz  
Impresión: Carvajal Soluciones de  
comunicación S.A.S  
Carrera 69 #15 -24

*Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio  
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.*

*Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados*

# CONTENIDO

<b>PRÓLOGO</b> .....	IX
<b>OBJETIVOS</b> .....	XI
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	XIII
<b>CAPÍTULO 1: CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA</b> .....	1
1.1 Cinemática rectilínea.....	2
1.1.1 Problema: caso 1.....	2
1.2 Movimiento curvilíneo.....	3
1.2.1 Problema: caso 2.....	3
1.3 Movimiento curvilíneo componentes rectangulares.....	9
1.3.1 Problema: caso 3.....	9
1.3.1.1 Taller experimental: movimiento en dos dimensiones .....	19
1.3.2 Problema: caso 4 .....	22
1.3.2.1 Simulación: movimiento en dos dimensiones.....	29
1.4 Movimiento de una partícula: componentes tangenciales y normales .....	33
1.4.1 Problema: caso 5.....	33
1.5 Movimiento en coordenadas cilíndricas.....	43
1.5.1 Problema: caso 6.....	43
1.6 Movimiento relativo de partículas .....	46
1.6.1 Problema: caso 7.....	46
1.6.2 Problema: caso 8.....	50
1.6.2.1 Simulación: movimiento relativo .....	55

<b>CAPÍTULO 2: CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA: FUERZA Y ACELERACIÓN ...</b>	61
2.1 Ecuación del movimiento: coordenadas rectangulares .....	61
2.1.1 Problema: caso 9 .....	61
2.2 Ecuación del movimiento: coordenadas tangenciales y normales.....	63
2.2.1 Problema: caso 10 .....	63
2.3 Movimiento dependiente de partículas .....	68
2.3.1 Problema: caso 11 .....	68
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	73

# ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1.	Velocidad de la partícula .....	4
FIGURA 2.	Aceleración de la partícula .....	6
FIGURA 3.	Esquema general.....	9
FIGURA 4.	Trayectoria de la partícula .....	10
FIGURA 5.	Velocidad de la partícula en el punto C.....	16
FIGURA 6.	Aceleración de la partícula en el punto C.....	17
FIGURA 7.	Dirección del lanzador de proyectiles.....	20
FIGURA 8.	Alcance de la partícula.....	20
FIGURA 9.	Variación del ángulo del lanzador de proyectiles.....	21
FIGURA 10.	Variación del alcance de la partícula.....	21
FIGURA 11.	Trayectoria de la partícula .....	22
FIGURA 12.	Velocidad de la partícula en el punto B.....	29
FIGURA 13.	Ubicación de la partícula y la pared.....	30
FIGURA 14.	Croquis con líneas constructivas para la dirección de la velocidad inicial de la partícula .....	30
FIGURA 15.	Asignación de la magnitud de la velocidad inicial de la partícula .....	31
FIGURA 16.	Impacto de la partícula con la pared.....	31
FIGURA 17.	Desplazamiento de la partícula a lo largo del eje Y.....	32
FIGURA 18.	Velocidad de la partícula en el punto B.....	32
FIGURA 19.	Sistema de engrane planetario .....	33
FIGURA 20.	Esquema general.....	34
FIGURA 21.	Posición de la corredera en su punto más bajo en la plataforma	34
FIGURA 22.	Posición de la corredera .....	35
FIGURA 23.	Idealización de la posición de la corredera .....	35
FIGURA 24.	Componentes radial y transversal de velocidad de la corredera.	42
FIGURA 25.	Componentes rectangulares de aceleración de la corredera.....	43
FIGURA 26.	Trayectorias de las partículas .....	47
FIGURA 27.	Velocidad del proyectil en el momento del impacto.....	49
FIGURA 28.	Velocidad relativa del proyectil respecto al avión .....	49

FIGURA 29. Aceleración relativa del proyectil respecto al avión .....	50
FIGURA 30. Componentes rectangulares iniciales de velocidad de la partícula A.....	51
FIGURA 31. Velocidad de la partícula A cuando han transcurrido 3s.....	52
FIGURA 32. Componentes rectangulares iniciales de velocidad de la partícula B.....	53
FIGURA 33. Velocidad de la partícula B cuando han transcurrido 3 s .....	54
FIGURA 34. Línea constructiva para la dirección de la partícula A .....	56
FIGURA 35. Línea constructiva para la dirección de la partícula B.....	56
FIGURA 36. Aplicación de la constante gravitacional .....	57
FIGURA 37. Aplicación de la velocidad inicial para la partícula A.....	57
FIGURA 38. Aplicación de la velocidad inicial para las partículas .....	58
FIGURA 39. Desplazamiento de la partícula A a lo largo del eje X.....	58
FIGURA 40. Desplazamiento de la partícula A a lo largo del eje Y.....	59
FIGURA 41. Velocidad final de la partícula A.....	59
FIGURA 42. Componentes de la velocidad final de la partícula A.....	60
FIGURA 43. Esquema general.....	62
FIGURA 44. Segunda ley de Newton a la partícula.....	62
FIGURA 45. Esquema general.....	64
FIGURA 46. Trayectoria de la esfera.....	64
FIGURA 47. Segunda ley de Newton a la esfera.....	65
FIGURA 48. Esquema general.....	68
FIGURA 49. Posición de las partículas.....	68
FIGURA 50. Segunda ley de Newton de la carga a izar.....	71



# PRÓLOGO



La enseñanza de las ciencias experimentales, tanto en la secundaria como en las carreras de posgrados, ha generado dificultades y confusión en la comprensión de la física, al tratar conceptos cinemáticos como posición, tiempo, velocidad y aceleración, ya que existen múltiples preconcepciones que interfieren en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. El estudio de la cinemática es fundamental para entender conceptos como condiciones cinemáticas, fuerzas, etc., así como las interacciones entre sistemas y sus efectos en el movimiento de partículas o cuerpos rígidos.

Otra de las dificultades es que los estudiantes no hacen uso de las herramientas de representación de los movimientos en texto o gráficas, requiriendo, estas últimas, de capacidades de abstracción y del desarrollo de habilidades de representación, requeridas, no sólo para la continuación de estudios de posgrados, sino para el ámbito laboral, pues son magnitudes físicas y técnicas de representación de uso cotidiano en la sociedad tecnológica contemporánea.

En la provincia de Ocaña se ha demostrado, en los últimos años, que los alumnos que ingresan a carreras de la Facultad de Ingenierías de la Universidad Francisco de Paula Santander, seccional Ocaña (UFPSO), tienen bajo conocimiento conceptual de la cinemática y de su representación mediante gráficas; es por esta razón se crea el libro *Cinemática y cinética de la partícula: problemas resueltos*, como un curso introductorio de física universitaria en la UFPSO, mediante la adopción de estrategias de aprendizaje diseñadas para desarrollar en los estudiantes la capacidad de analizar y describir los movimientos dados, mediante sus diversos modos de representación.





## OBJETIVOS



- Asimilar conceptos fundamentales de la física para aplicarlos en la vida profesional.
- Adquirir herramientas físicas y matemáticas para la solución de problemas reales relacionados con la física.
- Desarrollar hábitos de trabajo en equipo mediante la aplicación del método científico en el análisis de problemas prácticos reales.
- Comprobar experimentalmente algunas deducciones de las leyes físicas.





# INTRODUCCIÓN



Este trabajo incluye la comprensión de los conceptos de tiempo, posición, velocidad y aceleración; el estudio de los movimientos relativo, curvilíneo y dependiente; el uso de coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas; las componentes tangente normal y radial transversal, así como la aplicación de la segunda ley de Newton en coordenadas rectangulares, tangente normal y radial transversal, llevando al estudiante a analizar situaciones que contribuyen a la adquisición de habilidades y al fortalecimiento de su precisión en la aplicación de los conceptos, desarrollando de su capacidad analítica y la habilidad para resolver problemas en estos temas.

En el desarrollo del tema se presentan diversos ejemplos cotidianos, los cuales aclaran los conceptos, haciendo, especial énfasis, en el desarrollo de técnicas matemáticas para la aplicación de la física.

Se realizó un laboratorio para el estudio del movimiento en dos dimensiones, apuntando hacia la comprensión básica de los principios físicos y el desarrollo de habilidades experimentales que sirven de introducción a la metodología de trabajo en ciencia e ingeniería, además de arrojar luces sobre los conceptos básicos de la metrología, el desarrollo de competencias transversales, la promoción del trabajo en equipo y la gestión de la información, así como su captación y análisis. Adicionalmente se realizaron dos videos de dicha práctica, en los que se indican los aspectos relevantes de la misma: los enlaces están presentes en el libro.

Además, se realizó una simulación para dos problemas del libro utilizando el *software Solidworks Education Edition*, suscrito en su versión educativa, para validar los resultados encontrados gracias al razonamiento analítico.

El libro está estructurado en secciones de la siguiente manera:

- 1.1.: se estudia el movimiento rectilíneo de una partícula determinando su posición, velocidad y aceleración en cualquier instante.
- 1.2. y 1.3.: se dan a conocer los métodos particulares para estudiar el movimiento de una partícula como son el movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y se estudian las aplicaciones del movimiento de una partícula utilizando componentes rectangulares de su velocidad y aceleración, además se analiza el movimiento de una partícula bajo la acción de la gravedad.
- 1.4. y 1.5.: se analiza el movimiento curvilíneo de una partícula utilizando la componente tangencial normal y las coordenadas cilíndricas de su velocidad y aceleración; se estudia el movimiento curvilíneo de la partícula en el espacio, utilizando diferentes tipos de sistemas de coordenadas y se determinan las componentes del movimiento a lo largo de los ejes de coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.
- 1.6.: se aborda el movimiento relativo de una partícula con respecto a otra.
- 2.1. a 2.2.: se da a conocer la segunda ley de Newton utilizando componentes rectangulares y tangenciales normales.
- 2.3.: se aborda la segunda ley de Newton aplicada al movimiento dependiente de varias partículas.

## CAPÍTULO 1

# CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA

La dinámica es la parte de la mecánica que analiza los cuerpos en movimiento. Esta se divide en dos:

**La cinemática** “es la parte de la dinámica que describe el movimiento de los cuerpos sin referencia a las fuerzas que lo causan ni a las que se generan a consecuencia del mismo” (Meriam y Kraige, 1998, p. 16). “La cinemática expresa inherentemente relaciones entre geometría y tiempo independientemente de cualquier ley que relacione fuerzas con movimientos” (McGill y King, 1989, p. 7).

**La cinética** “estudia la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, su masa y el movimiento de este mismo” (Beer et al., 2010, p. 602).

**La trayectoria** “se describirá utilizando diferentes tipos de sistemas de coordenadas y se determinarán las componentes del movimiento a lo largo de los ejes de coordenadas” (Hibbeler, 1995, p. 3).

“Una partícula o punto es un cuerpo cuyo tamaño puede ignorarse al estudiar su movimiento. Tan solo hay que considerar su centro de masa” (Riley y Sturges, 1996, p. 14). Sin embargo, hay situaciones donde dicha rotación no es despreciable, lo que ocasiona que no puedan considerarse como partículas, sino como cuerpos rígidos.

## 1.1 Cinemática rectilínea

### 1.1.1 Problema: caso 1

La aceleración de una partícula está dada por la expresión:

$$a=C V^2$$

Donde es constante y la partícula parte del reposo. Determinar su velocidad en función de la altura.

La aceleración es la variación de la velocidad respecto al tiempo:

$$a=\frac{dV}{dt}$$

La expresión de la aceleración se multiplica y divide entre el diferencial total de posición, encontrando:

$$a=\frac{dV}{dt} \frac{dY}{dY}$$

Utilizando la regla de la cadena para expresar la aceleración en función de la velocidad y la posición, se tiene:

$$a=\frac{dV}{dY} \frac{dY}{dt}$$

La variación de la posición respecto al tiempo es la velocidad.

$$V=\frac{dY}{dt}$$

Reemplazando la velocidad en la expresión de la aceleración, se tiene:

$$a=V \frac{dV}{dY}$$

Reemplazando la expresión de la aceleración dada, se tiene:

$$C V^2 =V \frac{dV}{dY}$$

Separando variables, se tiene:

$$dY = \frac{V dV}{C V^2}$$

$$dY = \frac{dV}{C V}$$

Ubicando el origen para el sistema de ejes cartesianos en el origen del movimiento para la partícula, teniendo en cuenta que la partícula parte del reposo e integrando, se tiene:

$$Y_0 = 0$$

$$\int_0^Y dY = \int_0^V \frac{1}{C V} dV$$

$$Y - 0 = \frac{1}{C} (\ln V - \ln 0)$$

$$Y = \frac{1}{C} \ln V$$

## 1.2 Movimiento curvilíneo

### 1.2.1 Problema: caso 2

La posición de una partícula está definida por  $\vec{r} = (3 t^2 - 2 t) \hat{i} + (5 t^3 + 4) \hat{j}$ , donde está dado en metros y t en segundos.

Determinar para t=0 y t=5 s.

- Posición.
- Velocidad.
- Aceleración.
- Distancia recorrida por la partícula en los segundos a lo largo de la trayectoria.

La posición de la partícula para el instante dado es:

$$\vec{r} = (3 t^2 - 2 t) \hat{i} + (5 t^3 + 4) \hat{j}$$

$$\vec{r} = (3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5) \hat{i} + (5 \cdot 5^3 + 4) \hat{j}$$

$$\vec{r} = 65 \hat{i} + 629 \hat{j} \quad (\text{m})$$

La velocidad de la partícula para el instante dado es:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Derivando la expresión de la posición en función del tiempo, se tiene:

$$\bar{V} = \frac{d}{dt} [(3t^2 - 2t)\hat{i} + (5t^3 + 4)\hat{j}]$$

$$\bar{V} = (6t - 2)\hat{i} + (15t^2)\hat{j}$$

Reemplazando el instante dado, se tiene:

$$\bar{V} = (6 \cdot 5 - 2)\hat{i} + (15 \cdot 5^2)\hat{j}$$

$$\bar{V} = 28\hat{i} + 375\hat{j} \left(\frac{m}{s}\right)$$

La magnitud de la velocidad es:

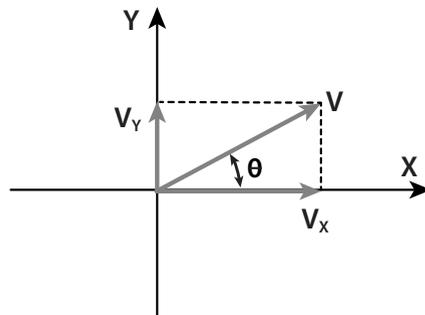
$$|\bar{V}| = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2}$$

$$|\bar{V}| = \sqrt{\left(28 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(375 \frac{m}{s}\right)^2}$$

$$|\bar{V}| = 376,04 \frac{m}{s}$$

La dirección de la velocidad respecto al eje X se muestra en la figura 1.

**Figura 1. Velocidad de la partícula**



Fuente: elaboración propia.

$$\tan \theta = \frac{V_Y}{V_X}$$

$$\tan \theta = \frac{375 \frac{m}{s}}{28 \frac{m}{s}}$$

$$\theta = \text{ArcTan} \left( \frac{375 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{28 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right)$$

$$\theta = 85,73^\circ$$

La aceleración de la partícula para el instante dado es:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

Integrando la expresión de la velocidad respecto al tiempo, se tiene:

$$\bar{a} = \frac{d}{dt} [(6t - 2) \hat{i} + (15t^2) \hat{j}]$$

$$\bar{a} = 6 \hat{i} + (30t) \hat{j}$$

Reemplazando el instante dado, se tiene:

$$\bar{a} = 6 \hat{i} + (30 * 5) \hat{j}$$

$$\bar{a} = 6 \hat{i} + 150 \hat{j} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

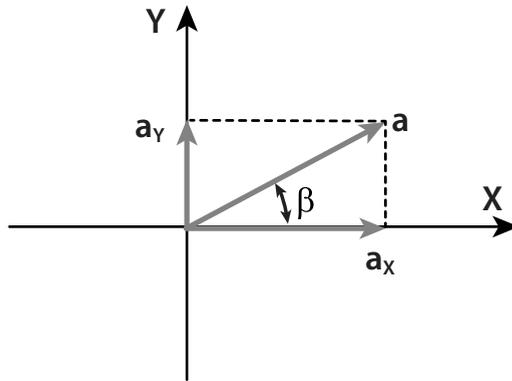
La magnitud de la aceleración es:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(150 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2}$$

$$|\bar{a}| = 150,12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La dirección de la aceleración respecto al eje X se muestra en la figura 2.

**Figura 2. Aceleración de la partícula**

Fuente: elaboración propia.

$$\tan \beta = \frac{a_y}{a_x}$$

$$\tan \beta = \frac{150 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$\beta = \text{ArcTan} \left( \frac{150 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right)$$

$$\beta = 87,71^\circ$$

La sacudida de la partícula es la variación de la aceleración con respecto al tiempo:

$$\bar{j} = \frac{d\bar{a}}{dt}$$

$$\bar{j} = \frac{d}{dt} (6 \hat{i} + 30 t \hat{j})$$

$$\bar{j} = 30 \hat{j} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \right)$$

Pero:

$$1 \text{ Hertz} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^3}$$

Por lo que la sacudida para la esfera es constante en todo su recorrido.

$$\bar{j}=30 \hat{j} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^3}\right)$$

$$\bar{j}=\text{Constante}$$

Para  $t=0$  s, la posición inicial de la esfera es:

$$\bar{r}=(3 t^2-2 t) \hat{i}+(5 t^3+4) \hat{j}$$

$$\bar{r}_0=(3 * 0^2-2 * 0) \hat{i}+(5 * 0^3+4) \hat{j}$$

$$\bar{r}_0=4 \hat{j} \text{ (m)}$$

Para  $t=0$  s, la velocidad inicial de la esfera es:

$$\bar{V}=(6 t-2) \hat{i}+(15 t^2) \hat{j}$$

$$\bar{V}_0=(6 * 0-2) \hat{i}+(15 * 0^2) \hat{j}$$

$$\bar{V}_0=-2 \hat{i} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

Para  $t=0$  s, la aceleración inicial de la esfera es:

$$\bar{a}=6 \hat{i}+(30 t) \hat{j}$$

$$\bar{a}=6 \hat{i}+(30 * 0) \hat{j}$$

$$\bar{a}_0=6 \hat{i} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

Para  $t=0$  s, la sacudida inicial de la esfera es:

$$\bar{j}_0=30 \hat{i} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^3}\right)$$

La distancia recorrida por la partícula en los 5 primeros segundos a lo largo de la trayectoria es:

$$\int dS = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2} dX$$

$$S = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2} dX$$

La componente de posición a lo largo del eje X es:

$$X=3 t^2-2 t$$

La componente de posición a lo largo del eje Y es:

$$Y=5 t^3 + 4$$

La variación de la posición de la variable X respecto al tiempo es:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt} (3 t^2 - 2 t)$$

$$\frac{dX}{dt} = 6 t - 2$$

La variación de la posición de la variable Y respecto al tiempo es:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt} (5 t^3 + 4)$$

$$\frac{dY}{dt} = 15 t^2$$

La variación de la variable Y respecto a la variable X se logra haciendo el cociente entre la variación de la posición de Y respecto al tiempo, con la variación de la posición de X respecto al tiempo:

$$\frac{dY}{dt} = 15 t^2$$

$$\frac{dX}{dt} = 6 t - 2$$

$$\frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dX}{dt}} = \frac{15 t^2}{6t-2}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{15 t^2}{6t-2}$$

La variación total de la variable X es:

$$\frac{dX}{dt} = 6 t - 2$$

$$dX = (6 t - 2) dt$$

Reemplazando la ecuación de la distancia recorrida por la partícula, se tiene:

$$\int dS = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2} dX$$

$$\int_0^S dS = \int_0^{5S} \sqrt{1 + \frac{225 t^4}{(6t-2)^2}} (6t-2) dt$$

$$S = \int_0^{5S} \sqrt{1 + \frac{225 t^4}{(6t-2)^2}} (6t-2) dt$$

$$S = \int_0^{5S} \sqrt{\frac{(6t-2)^2 + 225 t^4}{(6t-2)^2}} (6t-2) dt$$

$$S = \int_0^{5S} \sqrt{36 t^2 - 24 t + 4 + 225 t^4} dt$$

$$S = 10 \text{ m}$$

La distancia recorrida por la partícula es de m.

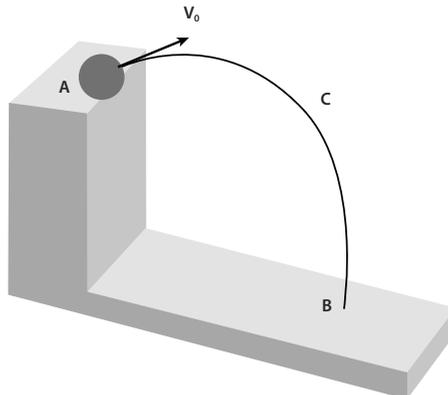
## 1.3 Movimiento curvilíneo componentes rectangulares

### 1.3.1 Problema: caso 3

Una partícula es lanzada desde el punto A con la mínima velocidad  $\bar{V}_0$ , de modo que golpee en el punto B (véase la figura 3). Determinar:

- La velocidad con la que es lanzada.
- El radio de curvatura en el punto C de la trayectoria.

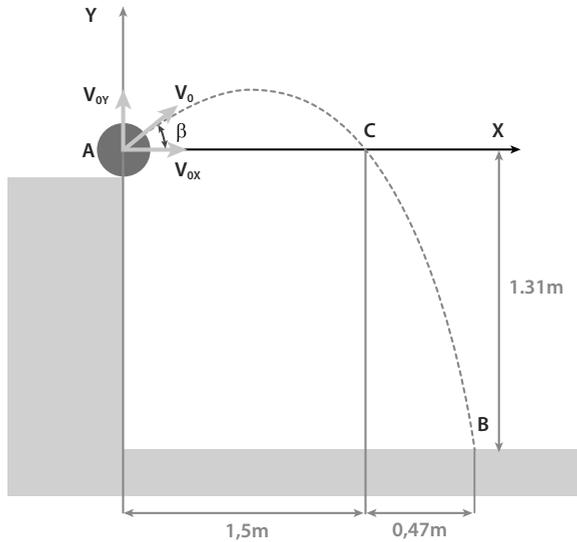
Figura 3. Esquema general



Fuente: elaboración propia.

La trayectoria de la partícula puede verse en la figura 4.

**Figura 4. Trayectoria de la partícula**



Fuente: elaboración propia.

Los ejes de coordenadas se ubican en el punto A, donde es disparada la partícula.

La componente inicial de la velocidad en el eje X es:

$$V_X = V_{0x}$$

$$V_{0x} = V_0 \cos \beta$$

La componente inicial de la velocidad en el eje Y es:

$$V_{0y} = V_0 \sin \beta$$

La partícula en el eje X tiene movimiento rectilíneo uniforme donde su componente de velocidad a lo largo del eje X es constante.

$$V_X = \text{constante}$$

$$V_X = V_{0x}$$

La componente de velocidad a lo largo del eje X es la variación de la posición a lo largo del eje X respecto al tiempo.

$$V_X = \frac{dX}{dt}$$

Separando variables, se tiene:

$$dX = V_X dt$$

Integrando, se tiene:

$$\int_{X_0}^X dX = \int_{t_0}^t V_X dt$$

$$X - X_0 = V_X t$$

Ubicando los ejes coordenados en el inicio del movimiento se tiene que  $X_0 = 0$  y  $Y_0 = 0$ .

Reemplazando la posición inicial  $X_0 = 0$ , la posición de la partícula a lo largo del eje X es:

$$X = X_0 + V_X t$$

$$X = 0 + V_X t$$

$$X = V_X t$$

La componente de velocidad de la partícula a lo largo del eje X es:

$$V_{0x} = \frac{X}{t}$$

Despejando de esta ecuación la variable tiempo, se tiene:

$$t = \frac{X}{V_{0x}}$$

Reemplazando la componente de velocidad de la partícula a lo largo del eje X, se tiene:

$$t = \frac{X}{V_0 \cos \beta}$$

El movimiento de la partícula en el eje Y es uniformemente acelerado, donde

$$a_Y = -g$$

La componente de aceleración a lo largo del eje Y es la variación de la componente de velocidad a lo largo del eje Y respecto al tiempo.

$$a_Y = \frac{dV_Y}{dt}$$

Separando variables para encontrar la componente de la velocidad a lo largo del eje Y, se tiene:

$$dV_Y = a_Y dt$$

Integrando, se tiene:

$$\int_{V_{Y_0}}^{V_Y} dV_Y = \int_{t_0}^t a_Y dt$$

$$\int_{V_{Y_0}}^{V_Y} dV_Y = \int_{t_0}^t -g dt$$

$$V_Y - V_{Y_0} = -g t$$

$$V_Y = V_{Y_0} - g t$$

La componente de la velocidad en el eje Y es la variación de la posición a lo largo del eje Y respecto al tiempo.

$$V_Y = \frac{dY}{dt}$$

Separando variables, se tiene:

$$dY = V_Y dt$$

Integrando y reemplazando la componente de la velocidad en el eje Y, se tiene:

$$\int_{Y_0}^Y dY = \int_{t_0}^t V_Y dt$$

$$\int_{Y_0}^Y dY = \int_{t_0}^t (V_{Y_0} - g t) dt$$

$$Y - Y_0 = V_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Y = Y_0 + V_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Reemplazando la condición inicial  $Y_0=0$  la componente inicial de la velocidad en el eje Y y la expresión del tiempo, en la posición a lo largo del eje Y se tiene:

$$V_{0Y} = V_0 \text{ Sen } \beta$$

$$t = \frac{X}{V_0 \text{ Cos } \beta}$$

$$Y = Y_0 + V_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Y = 0 + V_0 \text{Sen } \beta \left( \frac{X}{V_0 \text{Cos } \beta} \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{X}{V_0 \text{Cos } \beta} \right)^2$$

$$Y = X \text{Tan } \beta - \frac{g X^2}{2 V_0^2 \text{Cos}^2 \beta}$$

La posición final de la partícula en el punto B de colisión es:

$$X_B = 1,97 \text{ m}$$

$$Y_B = - 1,31 \text{ m}$$

Reemplazando en la ecuación de posición en el eje Y y despejando la rapidez con la que fue lanzada la partícula, se tiene:

$$- 1,31 = 1,97 \text{Tan } \beta - \frac{g (1,97)^2}{2 V_0^2 \text{Cos}^2 \beta}$$

$$\frac{g (1,97)^2}{2 V_0^2 \text{Cos}^2 \beta} = 1,97 \text{Tan } \beta + 1,31$$

$$V_0^2 = \frac{g (1,97)^2}{2 \text{Cos}^2 \beta (1,97 \text{Tan } \beta + 1,31)}$$

$$V_0^2 = \frac{g (1,97)^2}{2} [\text{Cos}^2 \beta (1,97 \text{Tan } \beta + 1,31)]^{-1}$$

Expresando la función  $\beta$  en función de  $\text{Sen } \beta$  y  $\text{Cos } \beta$ , se tiene:

$$V_0^2 = \frac{g (1,97)^2}{2} \left[ \text{Cos}^2 \beta \left( 1,97 \frac{\text{Sen } \beta}{\text{Cos } \beta} + 1,31 \right) \right]^{-1}$$

$$V_0^2 = \frac{g (1,97)^2}{2} \left( \frac{1,97 \text{Sen } \beta \text{Cos}^2 \beta}{\text{Cos } \beta} + 1,31 \text{Cos}^2 \beta \right)^{-1}$$

$$V_0^2 = \frac{g (1,97)^2}{2} (1,97 \text{Sen } \beta \text{Cos } \beta + 1,31 \text{Cos}^2 \beta)^{-1}$$

Para encontrar la dirección en la que es lanzada la partícula se deriva la velocidad con la que sale disparada respecto a donde se hace máxima la velocidad, que en este caso es la dirección de la velocidad en el momento en el que es lanzada la partícula, haciéndose nula.

$$\frac{dv_0}{d\beta} = 0$$

$$2 v_0 \frac{dv_0}{d\beta} = \frac{g (1,97)^2}{2} \left[ - (1,97 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta + 1,31 \operatorname{Cos}^2 \beta)^{-2} \right]$$

$$\left[ 1,97 (\operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta - \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Sen} \beta) + 1,31^2 \operatorname{Cos} \beta (-\operatorname{Sen} \beta) \right]$$

$$2 v_0 \frac{dv_0}{d\beta} = \frac{g (1,97)^2}{2} \left[ - (1,97 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta + 1,31 \operatorname{Cos}^2 \beta)^{-2} \right]$$

$$\left[ 1,97 (\operatorname{Cos}^2 \beta - \operatorname{Sen}^2 \beta) - 2,62 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta \right]$$

$$2 v_0 \frac{dv_0}{d\beta} = \frac{g (1,97)^2 \left[ 1,97 (\operatorname{Cos}^2 \beta - \operatorname{Sen}^2 \beta) - 2,62 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta \right]}{2 \left[ - (1,97 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta + 1,31 \operatorname{Cos}^2 \beta)^2 \right]}$$

Reemplazando  $\frac{dv_0}{d\beta} = 0$ , se tiene:

$$2 v_0 \frac{dv_0}{d\beta} = \frac{g (1,97)^2 \left[ 1,97 (\operatorname{Cos}^2 \beta - \operatorname{Sen}^2 \beta) - 2,62 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta \right]}{2 \left[ - (1,97 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta + 1,31 \operatorname{Cos}^2 \beta)^2 \right]}$$

$$0 = \frac{g (1,97)^2 \left[ 1,97 (\operatorname{Cos}^2 \beta - \operatorname{Sen}^2 \beta) - 2,62 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta \right]}{2 \left[ - (1,97 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta + 1,31 \operatorname{Cos}^2 \beta)^2 \right]}$$

$$0^{\circ} 2 \left[ - (1,97 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta + 1,31 \operatorname{Cos}^2 \beta)^2 \right] = g (1,97)^2 \left[ 1,97 (\operatorname{Cos}^2 \beta - \operatorname{Sen}^2 \beta) - 2,62 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta \right]$$

$$0 = g (1,97)^2 \left[ 1,97 (\operatorname{Cos}^2 \beta - \operatorname{Sen}^2 \beta) - 2,62 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta \right]$$

$$\frac{0}{g (1,97)^2} = \left[ 1,97 (\operatorname{Cos}^2 \beta - \operatorname{Sen}^2 \beta) - 2,62 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta \right]$$

$$0 = \left[ 1,97 (\operatorname{Cos}^2 \beta - \operatorname{Sen}^2 \beta) - 2,62 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta \right]$$

Reemplazando las identidades trigonométricas, se tiene:

$$\operatorname{Cos} (2\beta) = \operatorname{Cos}^2 \beta - \operatorname{Sen}^2 \beta$$

$$\operatorname{Sen} (2\beta) = 2 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta$$

$$\left[ 1,97 (\operatorname{Cos}^2 \beta - \operatorname{Sen}^2 \beta) - 2,62 \operatorname{Sen} \beta \operatorname{Cos} \beta \right] = 0$$

$$1,97 \operatorname{Cos} (2\beta) - 2,62 \frac{\operatorname{Sen} (2\beta)}{2} = 0$$

$$1,97 \operatorname{Cos} (2\beta) - 1,31 \operatorname{Sen} (2\beta) = 0$$

$$1,97 \operatorname{Cos} (2\beta) = 1,31 \operatorname{Sen} (2\beta)$$

$$1,31 \frac{\operatorname{Sen} (2\beta)}{\operatorname{Cos} (2\beta)} = 1,97$$

$$1,31 \operatorname{Tan} (2 \beta) = 1,97$$

$$\operatorname{Tan} (2 \beta) = \frac{1,97}{1,31}$$

$$2 \beta = \operatorname{ArcTan} \left( \frac{1,97}{1,31} \right)$$

$$2 \beta = 56,38^\circ$$

$$\beta = 28,19^\circ$$

Por lo que la rapidez con la que es lanzada la partícula es:

$$V_0^2 = \frac{g (1,97)^2}{2 \operatorname{Cos}^2 \beta (1,97 \operatorname{Tan} \beta + 1,31)}$$

$$v_0^2 = \frac{9,80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (1,97)^2}{2 \operatorname{Cos}^2 (28,19^\circ) (1,97 \operatorname{Tan} 28,19^\circ + 1,31)}$$

$$v_0^2 = \frac{38,03}{3,67}$$

$$v_0^2 = 10,36 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$V_0 = 3,22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Reemplazando la velocidad con la que es lanzada la partícula en la expresión de su trayectoria, se tiene:

$$Y = X \operatorname{Tan} \beta \frac{g X^2}{2 v_0^2 \operatorname{Cos}^2 \beta}$$

$$Y = X \operatorname{Tan} 28,19^\circ \frac{9,80 X^2}{2 \cdot 10,3 \operatorname{Cos}^2 28,19^\circ}$$

$$Y = 0,54 X - 0,61 X^2$$

La variación de la variable Y respecto a la variable X es:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{d}{dX} (0,54 X - 0,61 X^2)$$

$$\frac{dY}{dX} = 0,54 - 0,61 \cdot 2 X$$

$$\frac{dY}{dX} = 0,54 - 1,22 X$$

En el punto la componente de posición a lo largo del eje X es  $X_C=15$ , por lo que el valor de la variación de la variable Y respecto a la variable X es:

$$\frac{dY}{dX} = 0,54 - 1,22 \cdot 1,5$$

$$\frac{dY}{dX} = -1,29$$

La dirección del eje tangente de la velocidad es la variación de la variable Y respecto a la variable X y es:

$$\text{Tan } \theta = \frac{dY}{dX}$$

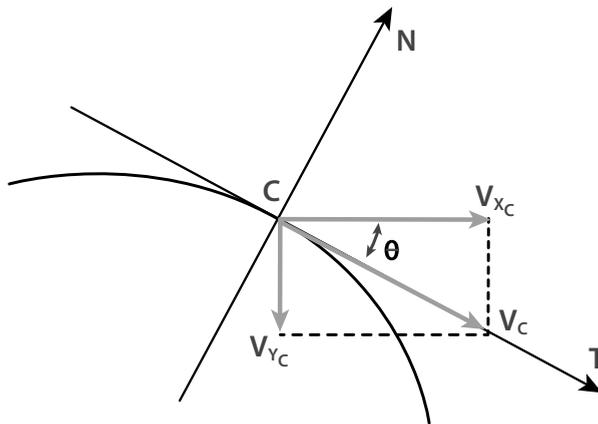
$$\text{Tan } \theta = -1,29$$

$$\theta = \text{ArcTan } -1,29$$

$$\theta = -52,21^\circ$$

La velocidad de la partícula en el punto C puede verse en la figura 5.

**Figura 5. Velocidad de la partícula en el punto C**



Fuente: elaboración propia.

$$V_{XC} = V_C \text{ Cos } \theta$$

La componente de la velocidad a lo largo del eje X es constante, por lo que:

$$V_X = V_{0X}$$

$$V_{0X} = V_{XC}$$

$$V_{0X} = V_0 \text{ Cos } \beta$$

$$V_{0x} = 3,22 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{Cos } 28,19^\circ$$

$$V_{0x} = 2,84 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La rapidez de la partícula en el punto C es:

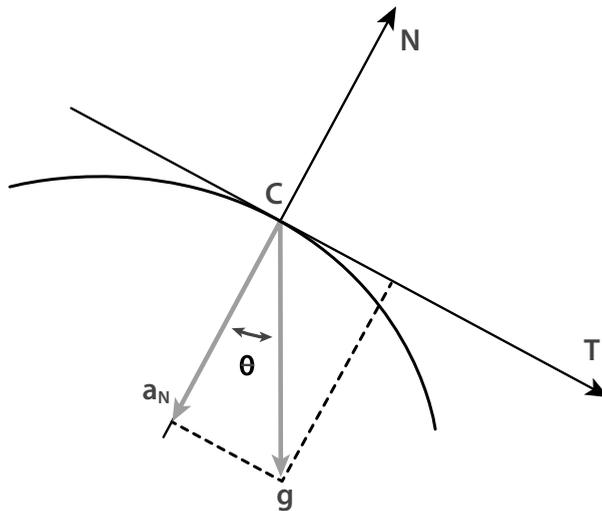
$$V_C = \frac{V_{x_C}}{\text{Cos } \theta}$$

$$V_C = \frac{2,84 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{Cos } 52,21^\circ}$$

$$V_C = 4,64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La aceleración normal de la partícula en el punto C puede verse en la figura 6.

**Figura 6. Aceleración de la partícula en el punto C**



Fuente: elaboración propia.

$$a_N = g \text{ Cos } \theta$$

$$a_N = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{Cos } 52,21^\circ$$

$$a_N = 6,01 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La expresión de la aceleración normal nos permite evaluar el radio de curvatura de la trayectoria de la partícula en el punto C de forma física.

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

Reemplazando se tiene el radio de curvatura:

$$\rho = \frac{v^2}{a_N}$$

$$\rho = \frac{\left(4,64 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\left(6,01 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}$$

$$\rho = 3,58 \text{ m}$$

El radio de curvatura en el punto C de la trayectoria es de 3,58 m.

También se puede evaluar el radio de curvatura de forma matemática utilizando la expresión:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2Y}{dX^2}\right|}$$

La primera variación de la variable Y respecto a la variable X es:

$$\frac{dY}{dX} = 0,54 - 1,22 X$$

La segunda variación de la variable Y respecto a la variable X es:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{d}{dX} (0,54 - 1,22 X)$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -1,22$$

Reemplazando la primera y segunda variación de la variable Y respecto a la variable X en la expresión del radio de curvatura, se tiene:

$$\frac{dY}{dX} = -1,29$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -1,22$$

$$\rho = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dY}{dX} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left| \frac{d^2 Y}{dX^2} \right|}$$

$$\rho_C = \frac{\left[ 1 + (-1,29)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{|-1,22|}$$

$$\rho_C = 3,58 \text{ m}$$

Encontrando el mismo valor para el radio de curvatura de la trayectoria en el punto C que se había encontrado de manera física.

### 1.3.1.1 Taller experimental: movimiento en dos dimensiones

#### Marco teórico

Los fenómenos físicos de una partícula no sólo se presentan en una única dimensión, como el movimiento rectilíneo uniforme. Existen movimientos bidimensionales como el movimiento parabólico, el cual puede sustituirse por dos movimientos independientes, un movimiento uniforme en la dirección horizontal, y un movimiento uniformemente acelerado en la dirección vertical (caída libre).

#### Objetivo general

Determinar y analizar el comportamiento de las cantidades cinemáticas en partículas que experimentan un movimiento en dos dimensiones.

#### Objetivos Específicos

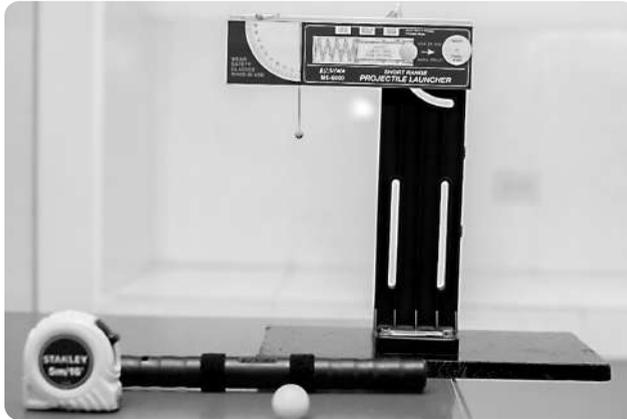
- Analizar el comportamiento de las variables alcance horizontal y alcance vertical respecto al ángulo de lanzamiento.
- Utilizar experimentalmente la ecuación de la trayectoria de un proyectil lanzado al aire con una cierta rapidez y ángulo de disparo inicial que cae bajo el efecto de la gravedad.
- Verificar experimentalmente algunas de las predicciones de los modelos, leyes y teorías de la cinemática.
- Registrar con la ayuda de cintas para la obtención de datos, cantidades como el desplazamiento.

#### Materiales

- Computador.
- Lanzador de proyectiles.
- Flexómetro.
- Hojas papel carbón.

**Procedimiento: variación del alcance con el ángulo de lanzamiento**

- Instalar el lanzador de proyectiles con el ángulo indicado.
- Realizar un lanzamiento con el fin de identificar la posición de impacto de la partícula con la superficie, para después colocar el papel carbón y registrar el alcance horizontal y vertical (véase las figuras 7 y 8).

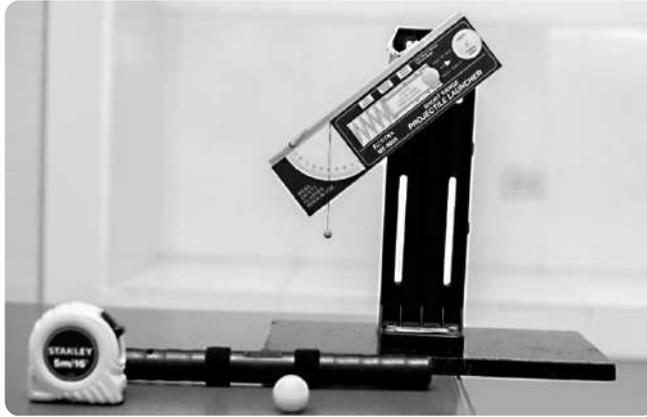
**Figura 7. Dirección del lanzador de proyectiles**

Fuente: elaboración propia.

**Figura 8. Alcance de la partícula**

Fuente: elaboración propia.

- Variar el ángulo de inclinación del lanzador y registrar el alcance horizontal en una tabla de datos (véase las figuras 9 y 10).

**Figura 9. Variación del ángulo del lanzador de proyectiles**

Fuente: elaboración propia.

**Figura 10. Variación del alcance de la partícula**

Fuente: elaboración propia.

### Análisis de datos

**Tabla 1. Alcance de la partícula**

Ángulo de inclinación (°)	0°	10°	15°	28,19°	45°	60°
Alcance (m)	1,69	1,88	1,94	1,97	1,89	1,46

Fuente: elaboración propia.

Del análisis experimental se puede evidenciar que la dirección con la que es disparada la partícula es de 28,19°, que es el mismo valor encontrado en el análisis

analítico. Además en los siguientes enlaces se muestran los aspectos más relevantes de la realización del ensayo de laboratorio:

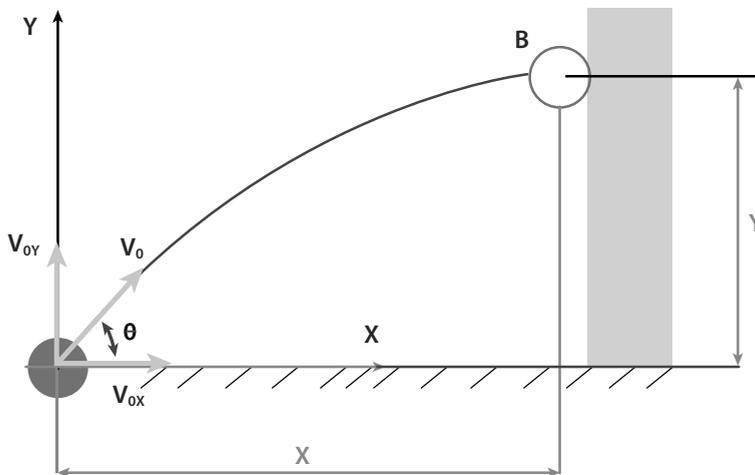
Taller experimental: movimiento en dos dimensiones: <https://youtu.be/pSvti5KEx-s>

Taller experimental: análisis de datos: [https://youtu.be/qdOH6sLT7\\_Y](https://youtu.be/qdOH6sLT7_Y).

### 1.3.2 Problema: caso 4

Una partícula se encuentra a pies de una pared donde colisiona y es lanzada con una rapidez  $V_0 = 200 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ , como se ve en la figura 11. Determinar la velocidad de la partícula cuando golpea en la pared, llegando a su altura máxima.

Figura 11. Trayectoria de la partícula



Fuente: elaboración propia.

Para encontrar la velocidad de la partícula cuando golpea a la pared es necesario determinar la velocidad con la que es lanzada y su alcance máximo.

Los ejes de coordenadas se ubican en el punto desde donde es disparada la partícula.

La componente inicial de la velocidad de la partícula a lo largo del eje X es:

$$V_{0x} = V_0 \cos \theta$$

La componente inicial de la velocidad de la partícula a lo largo del eje Y es:

$$V_{0y} = V_0 \sin \theta$$

La partícula en el eje X tiene movimiento rectilíneo uniforme donde su componente de velocidad a lo largo del eje X es constante.

$$V_X = \text{constante}$$

$$V_X = V_{0X}$$

La componente de velocidad a lo largo del eje X es la variación de la posición a lo largo del eje X respecto al tiempo.

$$V_X = \frac{dX}{dt}$$

Separando variables, se tiene:

$$dX = V_X dt$$

Integrando, se tiene:

$$\int_{X_0}^X dX = \int_{t_0}^t V_X dt$$

$$X - X_0 = V_X t$$

Ubicando los ejes coordenados donde es disparada la partícula, es decir, en el inicio del movimiento, se tiene que  $X_0=0$  y  $Y_0=0$ .

Reemplazando la posición inicial  $X_0=0$ , la posición de la partícula a lo largo del eje X es:

$$X = X_0 + V_X t$$

$$X = 0 + V_X t$$

$$X = V_X t$$

Despejando de esta ecuación la variable tiempo, se tiene:

$$t = \frac{X}{V_{0X}}$$

Reemplazando la componente de velocidad de la partícula a lo largo del eje X, se tiene:

$$t = \frac{X}{V_0 \cos \theta}$$

El movimiento de la partícula en el eje Y es uniformemente acelerado, donde

$$a_Y = -g$$

La componente de aceleración a lo largo del eje Y es la variación de la componente de velocidad a lo largo del eje Y respecto al tiempo.

$$a_Y = \frac{dV_Y}{dt}$$

Separando variables para encontrar la componente de la velocidad a lo largo del eje Y, se tiene:

$$dV_Y = a_Y dt$$

Integrando, se tiene:

$$\int_{V_{Y_0}}^{V_Y} dV_Y = \int_{t_0}^t a_Y dt$$

$$\int_{V_{Y_0}}^{V_Y} dV_Y = \int_{t_0}^t -g dt$$

$$V_Y - V_{Y_0} = -g t$$

$$V_Y = V_{Y_0} - g t$$

La componente de la velocidad en el eje Y es la variación de la posición a lo largo del eje Y respecto al tiempo.

$$V_Y = \frac{dY}{dt}$$

Separando variables, se tiene:

$$dY = V_Y dt$$

Integrando y reemplazando la componente de la velocidad en el eje Y, se tiene:

$$\int_{Y_0}^Y dY = \int_{t_0}^t V_Y dt$$

$$\int_{Y_0}^Y dY = \int_{t_0}^t (V_{Y_0} - g t) dt$$

$$Y - Y_0 = V_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Y = Y_0 + V_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Reemplazando la condición inicial  $Y_0=0$  la componente inicial de la velocidad en el eje Y y la expresión del tiempo en la posición a lo largo del eje Y se tiene:

$$V_{0Y} = V_0 \text{ Sen } \theta$$

$$t = \frac{X}{V_0 \text{ Cos } \theta}$$

$$Y = Y_0 + V_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Y = 0 + V_0 \text{ Sen } \theta \left( \frac{X}{V_0 \text{ Cos } \theta} \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{X}{V_0 \text{ Cos } \theta} \right)^2$$

$$Y = X \text{ Tan } \theta - \frac{g X^2}{2 V_0^2 \text{ Cos}^2 \theta}$$

$$Y = X \text{ Tan } \theta - \frac{g X^2}{2 V_0^2} \text{ Sec}^2 \theta$$

Para encontrar la dirección con la que es lanzada la partícula se deriva la posición a lo largo del eje Y respecto al momento en el que adquiere su máxima velocidad, que en este caso es la dirección de la velocidad en el momento en el que es lanzada la partícula, haciéndose nula.

$$\frac{dY}{d\theta} = 0$$

$$Y = X \text{ Tan } \theta - \frac{g X^2}{2 V_0^2} \text{ Sec}^2 \theta$$

$$\frac{dY}{dX} = X \text{ Sec}^2 \theta - \frac{g X^2}{2 V_0^2} 2 \text{ Sec } \theta * \text{ Sec } \theta * \text{ Tan } \theta$$

$$X \text{ Sec}^2 \theta - \frac{g X^2}{2 V_0^2} 2 \text{ Sec } \theta * \text{ Sec } \theta * \text{ Tan } \theta = 0$$

$$X \text{ Sec}^2 \theta - \frac{g X^2}{V_0^2} \text{ Sec}^2 \theta * \text{ Tan } \theta = 0$$

$$X \text{ Sec}^2 \theta \left( 1 - \frac{g X}{V_0^2} \text{ Tan } \theta \right) = 0$$

$$1 - \frac{g X}{V_0^2} \tan \theta = 0$$

$$\frac{g X}{V_0^2} \tan \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{V_0^2}{g X}$$

Reemplazando los datos iniciales, la dirección con la que es lanzada la partícula es:

$$\tan \theta = \frac{\left(200 \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right)^2}{32,20 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \cdot 400 \text{ ft}}$$

$$\tan \theta = 3,11$$

$$\theta = \text{ArcTan } 3,11$$

$$\theta = 72,15^\circ$$

La altura máxima alcanzada por la partícula es:

$$Y = X \tan \theta - \frac{g X^2}{2 V_0^2} \sec^2 \theta$$

$$Y = 400 \text{ ft} \cdot \tan 72,15^\circ - \frac{32,20 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \cdot (400 \text{ ft})^2}{2 \cdot \left(200 \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right)^2} \sec^2 72,15^\circ$$

$$Y = 1242,13 - 685,41 \text{ (ft)}$$

$$Y = 556,72 \text{ ft}$$

La velocidad de la partícula está dada por la expresión:

$$a_Y = -g$$

$$a_Y = \frac{dV_Y}{dt}$$

Multiplicando y dividiendo entre el diferencial de posición, a lo largo del eje Y para encontrar una expresión de la velocidad en función de la posición a lo largo del eje Y se tiene:

$$a_Y = \frac{dV_Y}{dt} \frac{dY}{dY}$$

Acomodando los diferenciales para encontrar ciertas relaciones, se tiene:

$$a_Y = \frac{dY}{dt} \frac{dV_Y}{dY}$$

Pero:

$$V_Y = \frac{dY}{dt}$$

Reemplazando la componente de la velocidad a lo largo del eje Y en la expresión de la aceleración, se tiene:

$$a_Y = \frac{dY}{dt} \frac{dV_Y}{dY}$$

$$a_Y = V_Y \frac{dV_Y}{dY}$$

Separando variables, se tiene:

$$a_Y dY = V_Y dV_Y$$

Reemplazando el valor de la componente de la aceleración a lo largo del eje Y e integrando, se tiene:

$$\int_{V_{0Y}}^{V_Y} V_Y dV_Y = \int_{Y_0}^Y -g dY$$

$$\frac{V_Y^2 - V_{0Y}^2}{2} = -g(Y - Y_0)$$

$$V_Y^2 = V_{0Y}^2 - 2g(Y - Y_0)$$

Para encontrar la velocidad de la partícula cuando colisiona contra la pared, es necesario determinar las componentes finales de velocidad de la partícula a lo largo de los ejes X y Y.

La componente de velocidad de la partícula a lo largo del eje X es constante.

$$V_X = \text{constante}$$

$$V_X = V_{0X}$$

$$V_{0X} = V_0 \cos \theta$$

Reemplazando la velocidad con la que es lanzada la partícula y su dirección, la componente de su velocidad a lo largo del eje X en el momento de la colisión es:

$$V_{0X} = 200 \frac{\text{ft}}{\text{s}} * \text{Cos } 72,15^\circ$$

$$V_{0X} = 61,31 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

$$V_{BX} = 61,31 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

La componente inicial de velocidad de la partícula a lo largo del eje Y es:

$$V_{0Y} = V_0 \text{ Sen } \theta$$

$$V_{0Y} = 200 \frac{\text{ft}}{\text{s}} * \text{Sen } 72,15^\circ$$

$$V_{0Y} = 190,37 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

La componente de velocidad de la partícula a lo largo del eje Y en el momento de la colisión, es:

$$V_Y^2 = V_{0Y}^2 - 2g(Y - Y_0)$$

Reemplazando la componente inicial de velocidad de la partícula a lo largo del eje Y y la altura máxima alcanzada por esta, se tiene:

$$V_{0Y} = 190,37 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

$$Y = 556,72 \text{ ft}$$

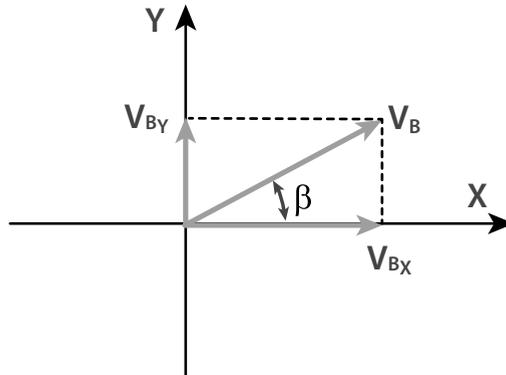
$$V_Y^2 = V_{0Y}^2 - 2g(Y - Y_0)$$

$$V_{BY}^2 = \left(190,37 \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right)^2 - 2 * 32,20 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} * (556,72 \text{ ft} - 0)$$

$$V_{BY}^2 = 387,97 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$V_{BY} = 19,70 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

La velocidad de la partícula en el momento de la colisión puede verse en la figura 12.

**Figura 12. Velocidad de la partícula en el punto B**

Fuente: elaboración propia.

$$V_B = \sqrt{V_{Bx}^2 + V_{By}^2}$$

$$V_B = \sqrt{\left(61,31 \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right)^2 + \left(19,70 \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right)^2}$$

$$V_B = 64,40 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

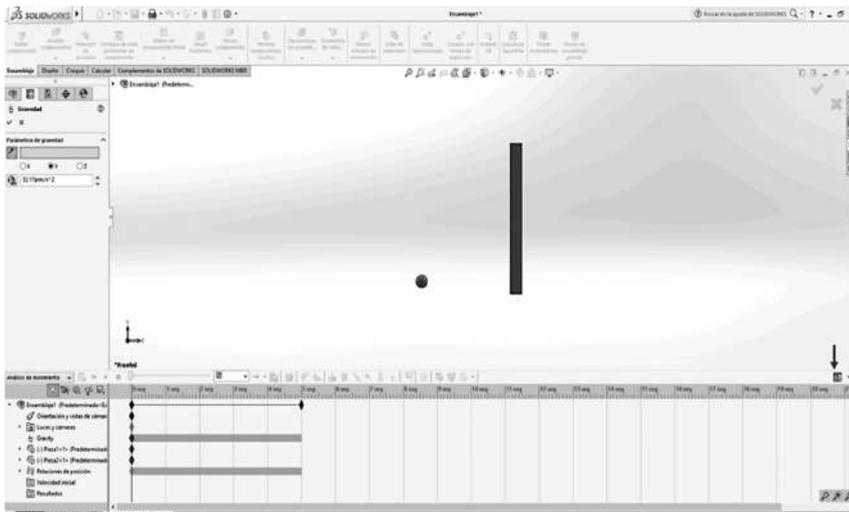
### 1.3.2.1 Simulación: movimiento en dos dimensiones

Para efectos de la simulación se utilizó el *software Solidworks Education Edition*, versión académica, adquirida por la Universidad Francisco de Paula Santander.

#### Procedimiento de la simulación

Se dibuja una esfera de 50 pies de diámetro y una pared de 600 pies de alto, 50 pies de ancho y 100 pies de profundidad. Luego se ubica la esfera a 400 pies de la base de la pared (véase la figura 13). Posteriormente se da inicio al estudio de movimiento, aplicando la constante gravitacional.

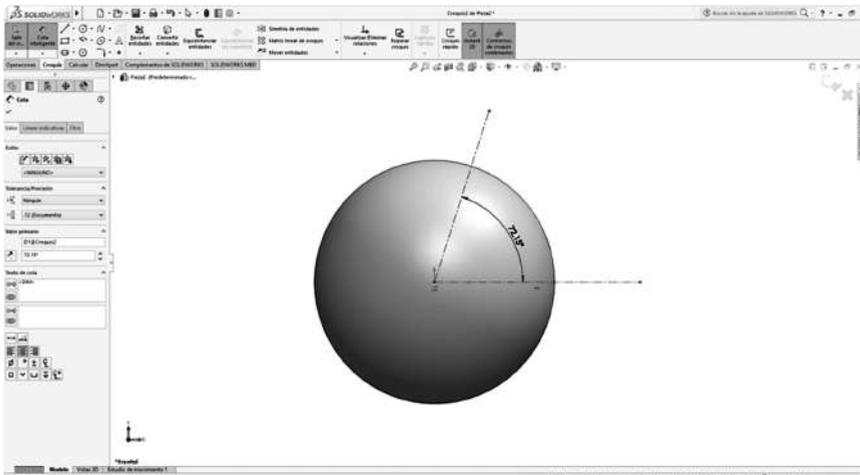
**Figura 13. Ubicación de la partícula y la pared**



Fuente: elaboración propia usando el software *Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

Para la dirección de la velocidad inicial de  $72,15^\circ$  se crea un croquis con líneas constructivas como se observa en la figura 14.

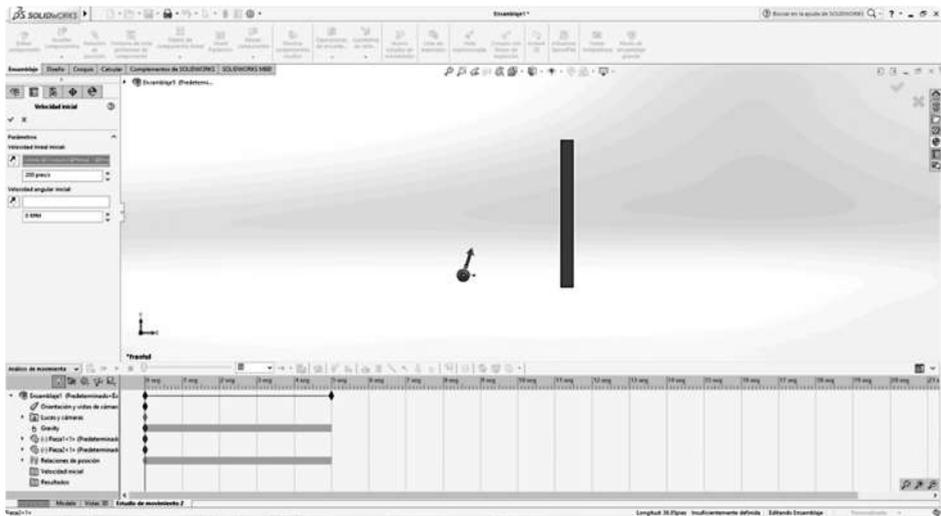
**Figura 14. Croquis con líneas constructivas para la dirección de la velocidad inicial de la partícula**



Fuente: elaboración propia usando el software *Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

Luego se asigna la magnitud a la velocidad inicial de la partícula de  $200 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ , como se observa en la figura 15, luego se pulsa aceptar y se calcula el estudio de movimiento.

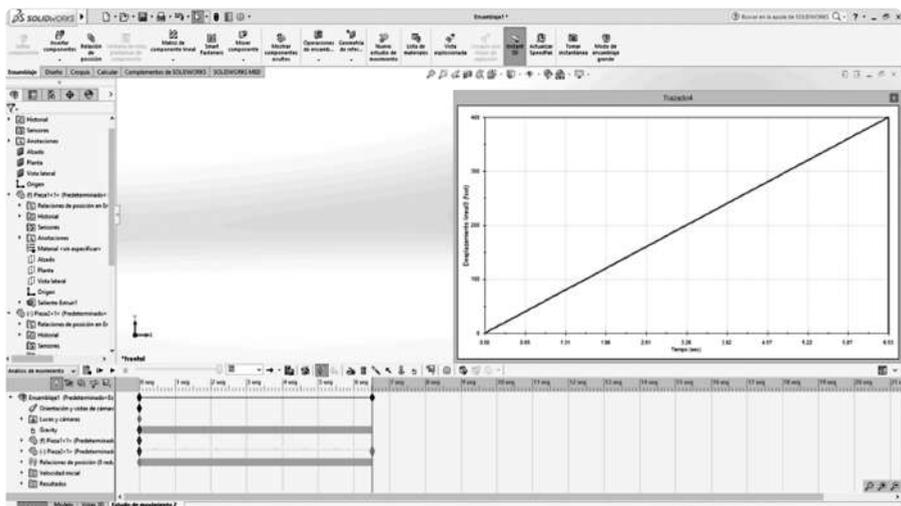
**Figura 15. Asignación de la magnitud de la velocidad inicial de la partícula**



Fuente: elaboración propia usando el *software Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

Se corrobora que el impacto de la partícula con la pared es el correcto, como se observa en la figura 16.

**Figura 16. Impacto de la partícula con la pared**

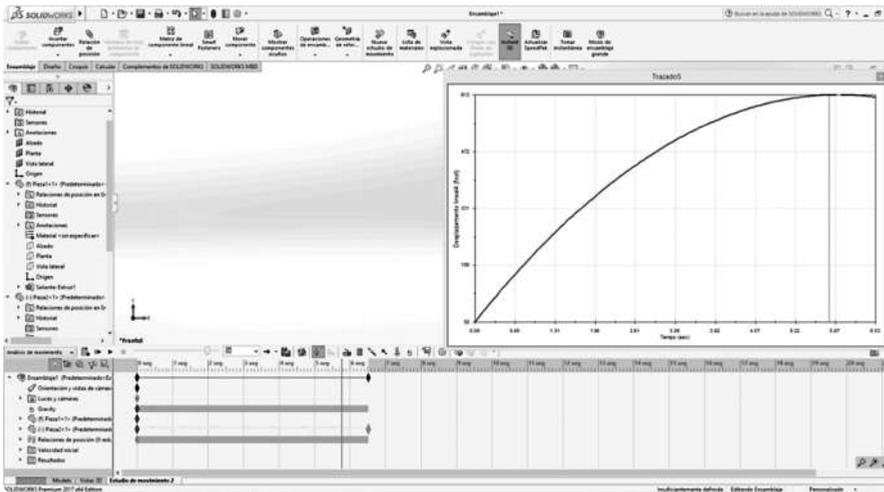


Fuente: elaboración propia usando el *software Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

### Análisis de resultados

Para determinar la altura del impacto de la partícula contra la pared se procede a calcular el desplazamiento de esta en la dirección del eje Y, como se observa en la figura 17. Este desplazamiento coincide con la solución analítica de 556,72 ft.

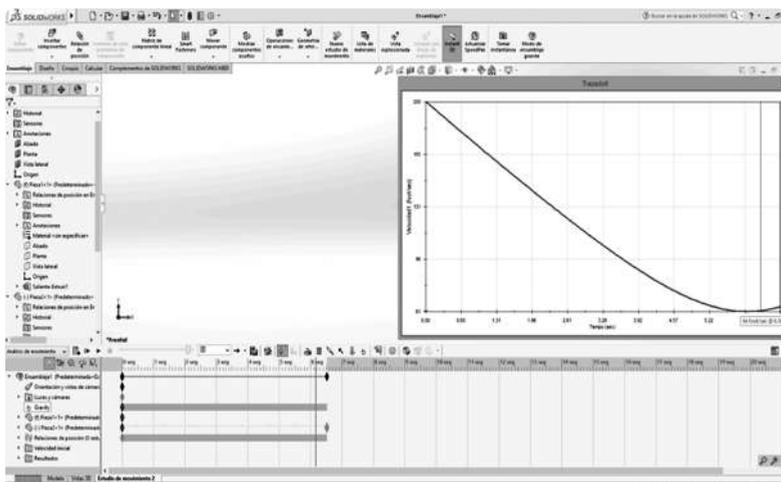
**Figura 17. Desplazamiento de la partícula a lo largo del eje Y**



Fuente: elaboración propia usando el software *Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

Para determinar la velocidad de impacto de la partícula se evaluó el cambio de velocidad a lo largo del tiempo en su trayectoria (véase la figura 18). Su velocidad en el punto B es de 64 ft/s, valor que coincide con el resultado del estudio analítico.

**Figura 18. Velocidad de la partícula en el punto B**



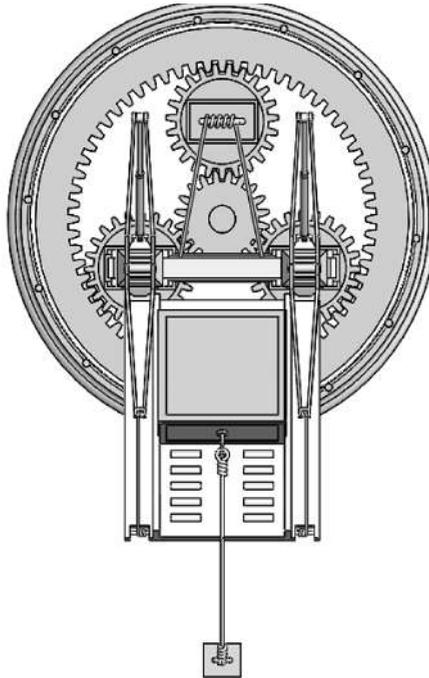
Fuente: elaboración propia usando el software *Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

## 1.4 Movimiento de una partícula: componentes tangenciales y normales

### 1.4.1 Problema: caso 5

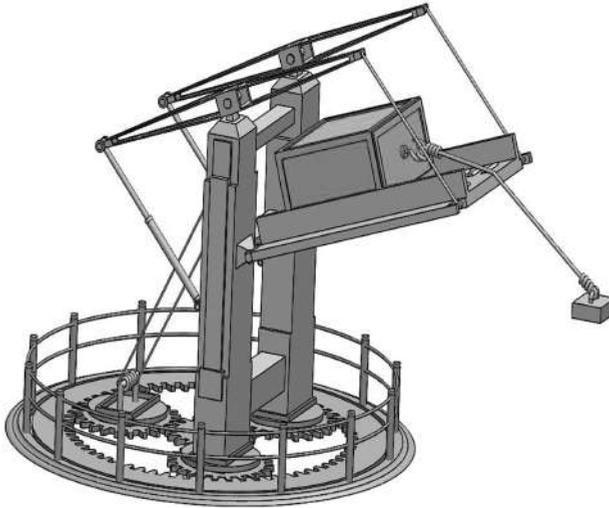
El sistema de engrane planetario se encarga de hacer girar las columnas a las que está unido, así como a una plataforma de longitud, donde se encuentra alojada una corredera, como se aprecia en la figura 19.

Figura 19. Sistema de engrane planetario



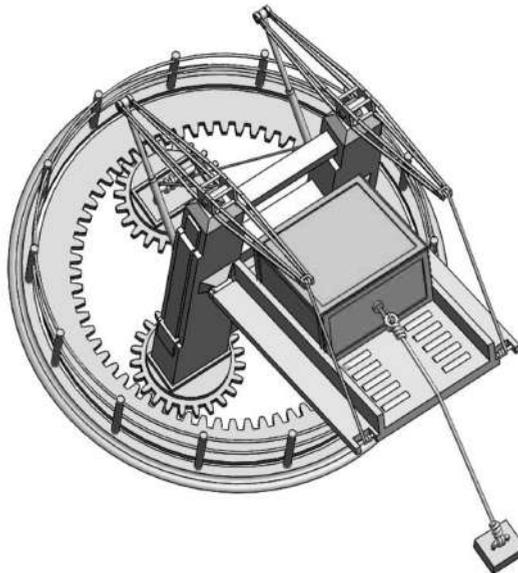
Fuente: elaboración propia.

El sistema de engrane planetario gira en sentido contrario a las manecillas del reloj a razón de  $4 \text{ rad/s}$ . La corredera C de masa  $m$ , se encuentra unida a una cuerda inextensible de  $375 \text{ mm}$  de longitud que siempre se mantiene tensa y está sujeta en el punto D, como se ve en la figura 20.

**Figura 20. Esquema general**

Fuente: elaboración propia.

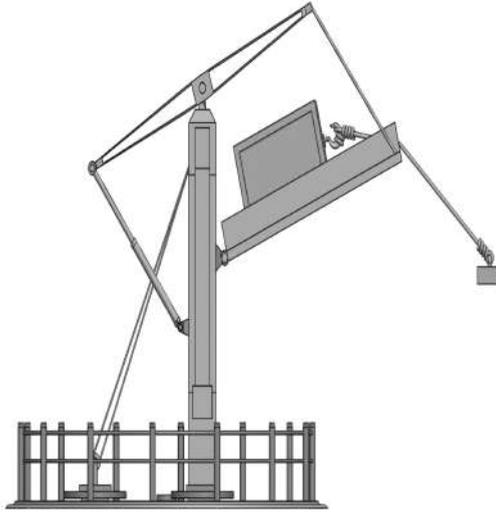
Cuando la plataforma está horizontal, la corredera se desplaza hasta la unión con las columnas, como se ve en la figura 21.

**Figura 21. Posición de la corredera en su punto más bajo en la plataforma**

Fuente: elaboración propia.

Determinar el módulo de la aceleración de la corredera. En la figura 22 se muestra la posición de la corredera en la plataforma.

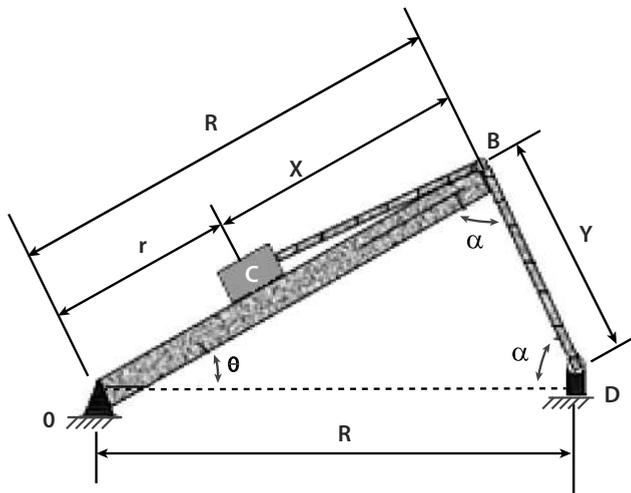
**Figura 22. Posición de la corredera**



Fuente: elaboración propia.

Así, se obtiene la expresión de la posición de la corredera en función de la inclinación de la plataforma. Para ello se establece la variable desde las columnas hasta la corredera como  $r$  (véase la figura 23).

**Figura 23. Idealización de la posición de la corredera**



Fuente: elaboración propia.

El valor R del triángulo escaleno, de lados iguales OD y OB, indica que los ángulos opuestos a estos lados son iguales, por lo que:

$$\theta + \alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$\theta + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{180^\circ - \theta}{2}$$

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

Aplicando ley de senos al triángulo escaleno OBD se tiene:

$$\frac{R}{\text{Sen } \alpha} = \frac{Y}{\text{Sen } \theta}$$

$$R \text{ Sen } \theta = Y \text{ Sen } \alpha$$

Reemplazando la expresión encontrada para la dirección  $\alpha$ , se tiene:

$$R \text{ Sen } \theta = Y \text{ Sen } \left( 90^\circ - \frac{\theta}{2} \right)$$

Reemplazando la identidad trigonométrica, se tiene:

$$\text{Sen}(A-B) = \text{Sen } A \text{ Cos } B - \text{Cos } B \text{ Sen } A$$

$$R \text{ Sen } \theta = Y \text{ Sen } \left( 90^\circ - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$R \text{ Sen } \theta = Y \left[ \text{Sen } 90^\circ \text{ Cos } \left( \frac{\theta}{2} \right) - \text{Cos } 90^\circ \text{ Sen } \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$R \text{ Sen } \theta = Y * \text{Sen } 90^\circ \text{ Cos } \left( \frac{\theta}{2} \right) - Y * \text{Cos } 90^\circ \text{ Sen } \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$R \text{ Sen } \theta = Y \text{ Cos } \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Utilizando la identidad trigonométrica, se tiene:

$$\text{Sen } (2A) = 2 \text{ Sen } A \text{ Cos } A$$

Haciendo  $A = \frac{\theta}{2}$ , se tiene:

$$\text{Sen } \left( 2 * \frac{\theta}{2} \right) = 2 \text{ Sen } \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{ Cos } \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\text{Sen } \theta = 2 \text{ Sen } \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{ Cos } \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Reemplazando en la ecuación, se tiene:

$$R \operatorname{Sen} \theta = Y \operatorname{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$R \left[ 2 \operatorname{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \operatorname{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] = Y \operatorname{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$Y = \frac{2 R \operatorname{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \operatorname{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right)}{\operatorname{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$Y = 2 R \operatorname{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

La longitud de la plataforma es el cateto OCB del triángulo OBD en el que se tiene:

$$r + X = R$$

En el triángulo OBD se puede expresar la longitud de la cuerda DBC cuyo valor es R, como:

$$Y + X = \overline{DBC}$$

$$Y + X = R$$

Eliminando la variable X en estas dos ecuaciones, utilizando el método de sustitución, se tiene:

$$r + X = R$$

$$X = R - r$$

Reemplazando en la otra ecuación se tiene:

$$Y + X = R$$

$$Y + (R - r) = R$$

$$r = Y$$

Como:

$$Y = 2 R \operatorname{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$r = 2 R \operatorname{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Otra forma de encontrar la posición de la corredera a lo largo del eje radial es aplicando la ley de cosenos al triángulo OBD.

$$Y^2 = R^2 + R^2 - 2 R \cdot R \cos \theta$$

$$Y^2 = 2 R^2 - 2 R^2 \cos \theta$$

$$Y^2 = 2 R^2 (1 - \cos \theta)$$

Utilizando la identidad trigonométrica.

$$\text{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

Elevando al cuadrado la identidad trigonométrica, se tiene:

$$\text{Sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$1 - \cos \theta = 2 \text{Sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Remplazando en la expresión de posición, se tiene:

$$Y^2 = 2 R^2 (1 - \cos \theta)$$

$$Y^2 = 2 R^2 \left[ 2 \text{Sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$Y^2 = 4 R^2 \text{Sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Sacando raíz cuadrada, se tiene:

$$Y = 2 R \text{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Pero como:

$$Y = r$$

Entonces:

$$r = 2 R \text{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Que es la misma expresión que se encontró utilizando la ley de senos.

La componente radial de la velocidad está definida por la variación radial respecto al tiempo.

$$V_r = \frac{dr}{dt}$$

$$V_r = \dot{r}$$

Derivando la expresión de posición radial de la corredera respecto al tiempo, se tiene:

$$r = 2 R \operatorname{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ 2 R \operatorname{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$\dot{r} = 2 R \operatorname{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right) * \frac{1}{2} * \frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{r} = R \operatorname{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right) * \frac{d\theta}{dt}$$

La velocidad angular es la variación angular respecto al tiempo, por lo que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\dot{r} = R \operatorname{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right) * \dot{\theta}$$

$$\dot{r} = R \dot{\theta} \operatorname{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

La segunda derivada del vector posición es:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt}$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Derivando la expresión de la componente radial de la corredera respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{d}{dt} (\dot{r}) = \frac{d}{dt} \left[ R \dot{\theta} \operatorname{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

Como la velocidad angular de la plataforma es constante, la aceleración de la misma es nula.

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= -R \dot{\theta} \operatorname{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) * \frac{1}{2} * \frac{d\theta}{dt} \\ \ddot{r} &= -\frac{1}{2} R \ddot{\theta} \operatorname{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) * \dot{\theta} \\ \ddot{r} &= -\frac{R \dot{\theta}^2}{2} \operatorname{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

Reemplazando la posición de la plataforma dada  $\theta=30^\circ$ , la posición radial de la corredera es:

$$\begin{aligned}r &= 2 R \operatorname{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ r &= 2 * 0,175 \text{ m} * \operatorname{Sen}\left(\frac{30^\circ}{2}\right) \\ r &= 0,19 \text{ m}\end{aligned}$$

Reemplazando la posición de la plataforma dada  $\theta=30^\circ$ , la primera variación de la posición radial respecto al tiempo es:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= R \dot{\theta} \operatorname{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \dot{r} &= 0,375 \text{ m} * 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} * \operatorname{Cos}\left(\frac{30^\circ}{2}\right) \\ \dot{r} &= 1,45 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Reemplazando la posición de la plataforma dada la segunda variación de la posición radial respecto al tiempo es:

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= -\frac{R \dot{\theta}^2}{2} \operatorname{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \ddot{r} &= -\frac{0,375 \text{ m} * \left(4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2}{2} \operatorname{Sen}\left(\frac{30^\circ}{2}\right) \\ \ddot{r} &= -0,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\end{aligned}$$

La velocidad de la plataforma es:

$$\begin{aligned}\vec{V} &= V_r \hat{e}_r + V_\theta \hat{e}_\theta \\ \vec{V} &= \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta\end{aligned}$$

Reemplazando se tiene:

$$\bar{V}=1,45 \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{e}_r+0,19 \text{ m} *4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \hat{e}_\theta$$

$$\bar{V}=1,45 \hat{e}_r+0,76 \hat{e}_\theta \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

La magnitud de la velocidad de la corredora es:

$$V=\sqrt{V_r^2+V_\theta^2}$$

$$V=\sqrt{\left(1,45 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2+\left(0,76 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}$$

$$V=1,64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La dirección de la velocidad de la corredora es:

$$\text{Tan } \beta=\frac{V_\theta}{V_r}$$

$$\text{Tan } \beta=\frac{0,76 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1,45 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

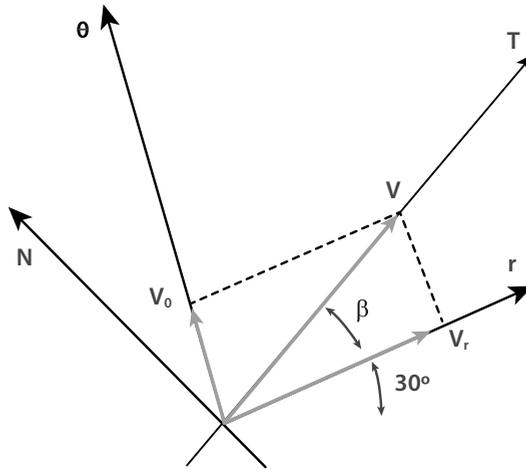
$$\beta=28,19^\circ$$

La dirección del eje tangente, respecto a la horizontal, es:

$$\theta+\beta=30^\circ+28,19^\circ$$

$$\theta=58,19^\circ$$

Las componentes radial y transversal de la velocidad de la corredora se observan en la figura 24.

**Figura 24. Componentes radial y transversal de velocidad de la corredora**

Fuente: elaboración propia.

Las componentes de la aceleración de la corredora son:

$$\bar{a} = a_r \hat{e}_r + a_\theta \hat{e}_\theta$$

$$\bar{a} = [\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2] \hat{e}_r + [r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}] \hat{e}_\theta$$

Reemplazando los valores encontrados, se tiene:

$$\bar{a} = \left( -0,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 0,19 \text{ m} * 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \hat{e}_r + \left( 0 + 2 * 1,45 \frac{\text{m}}{\text{s}} * 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \hat{e}_\theta$$

$$\bar{a} = -3,88 \hat{e}_r + 11,59 \hat{e}_\theta \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

La magnitud de la aceleración de la corredora es:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

$$a = \sqrt{\left( -3,88 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)^2 + \left( 11,59 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)^2}$$

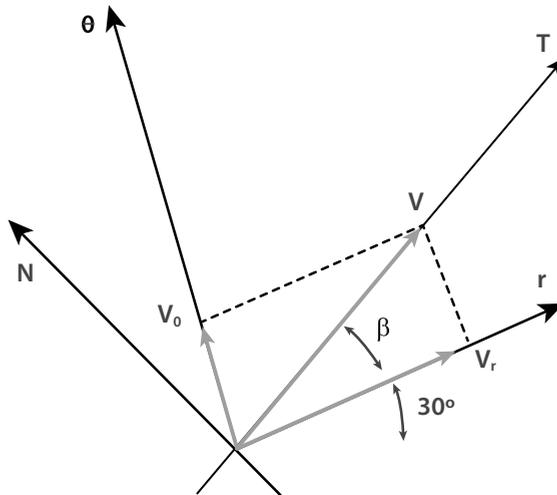
$$a = 12,23 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La dirección de la aceleración de la corredora es:

$$\begin{aligned}\tan \gamma &= \frac{a_{\theta}}{a_r} \\ \tan \gamma &= \frac{11,59 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{3,88 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ \gamma &= 71,49^\circ\end{aligned}$$

Las componentes radial y transversal de la aceleración de la corredera se observan en la figura 25.

**Figura 25. Componentes rectangulares de aceleración de la corredera**



Fuente: elaboración propia.

La magnitud de la aceleración es de  $12,23 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

## 1.5 Movimiento en coordenadas cilíndricas

### 1.5.1 Problema: caso 6

Una partícula se mueve con velocidad constante en una trayectoria dada por la expresión  $r(\theta) = \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ,  $Z(t) = 2\theta$  y  $\theta(t) = t$ . Encontrar la expresión del vector posición, de la velocidad y de la aceleración para una posición 0.

El vector de posición de la partícula en coordenadas cilíndricas es:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r + z \hat{k}$$

La velocidad de la partícula está dada por:

$$V(t) = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{k}$$

La componente radial de la velocidad está definida por la variación radial respecto al tiempo.

$$V_r = \frac{dr}{dt}$$

$$V_r = \dot{r}$$

La componente de la velocidad a lo largo del eje Z está definida por la variación de posición respecto al tiempo.

$$V_Z = \frac{dz}{dt}$$

$$V_Z = \dot{z}$$

Derivando la expresión de posición radial de la partícula respecto al tiempo, se tiene:

$$r = \text{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \text{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$\dot{r} = \text{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right) * \frac{1}{2} * \frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{2} * \text{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right) * \frac{d\theta}{dt}$$

La velocidad angular es la variación angular respecto al tiempo, por lo que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{2} * \text{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right) * \dot{\theta}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{2} * \dot{\theta} * \text{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

La segunda derivada del vector posición radial es:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt}$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Derivando la expresión de la componente radial de la partícula respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{d}{dt} (\dot{r}) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} * \dot{\theta} * \text{Cos} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

Como la velocidad angular es constante, la aceleración de la misma es nula.

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{1}{2} * \dot{\theta} * \left[ -\text{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] * \frac{1}{2} * \frac{d\theta}{dt}$$

$$\ddot{r} = -\frac{1}{4} * \dot{\theta} * \text{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) * \dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = -\frac{1}{4} * \dot{\theta}^2 * \text{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Derivando la expresión de posición de la partícula a lo largo del eje Z respecto al tiempo, se tiene:

$$Z(t) = 2\theta$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{d}{dt} [2\theta]$$

$$\dot{z} = 2 * \frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{z} = 2 * \dot{\theta}$$

La segunda derivada del vector posición, a lo largo del eje Z es:

$$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt}$$

$$\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Derivando la expresión del vector posición, a lo largo del eje Z respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{d}{dt} (\dot{z}) = \frac{d}{dt} [2 * \dot{\theta}]$$

Como la velocidad angular es constante, la aceleración de la misma es nula.

$$\frac{dz}{dt} = 2 * \frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{z} = 2 * \dot{\theta}$$

$$\ddot{z} = 0$$

La expresión del vector posición de la partícula es:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r + z \hat{k}$$

$$\vec{r} = \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{e}_r + 2 \theta \hat{k}$$

La expresión del vector velocidad de la partícula es:

$$V(t) = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{k}$$

$$V(t) = \frac{1}{2} * \dot{\theta} * \text{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{e}_r + \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) * \dot{\theta} \hat{e}_\theta + 2 * \dot{\theta} \hat{k}$$

$$V(t) = \frac{1}{2} * \dot{\theta} * \text{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{e}_r + \dot{\theta} * \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{e}_\theta + 2 * \dot{\theta} \hat{k}$$

La expresión del vector aceleración de la partícula es:

$$a(t) = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta + \ddot{z} \hat{k}$$

$$a(t) = \left[ -\frac{1}{4} * \dot{\theta}^2 * \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) * \dot{\theta}^2 \right] \hat{e}_r + \left[ \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) * 0 + 2 * \frac{1}{2} * \dot{\theta} * \text{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) * \dot{\theta} \right] \hat{e}_\theta + 0 \hat{k}$$

$$a(t) = \left[ -\frac{1}{4} * \dot{\theta}^2 * \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \dot{\theta}^2 * \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \hat{e}_r + \left[ \dot{\theta}^2 * \text{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \hat{e}_\theta$$

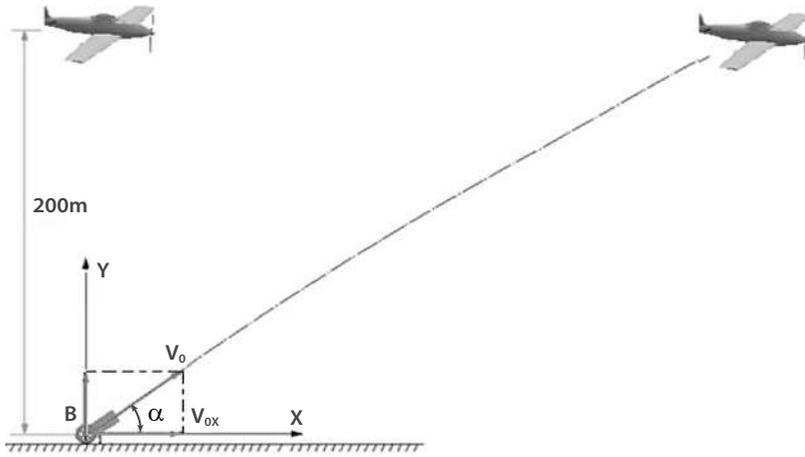
## 1.6 Movimiento relativo de partículas

### 1.6.1 Problema: caso 7

Un avión avanza con una velocidad constante de  $450 \frac{m}{s}$  a lo largo del eje X, parando, en determinando momento, por encima de un cañón antiaéreo que es disparado. El proyectil avanza hacia el avión a una velocidad de  $1500 \frac{m}{s}$ , como se muestra en la figura 26. Determinar:

- a) La velocidad y la aceleración relativa del proyectil respecto al avión en el momento del impacto.

Figura 26. Trayectorias de las partículas



Fuente: elaboración propia.

La velocidad relativa del proyectil respecto al avión es:

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

La dirección en la velocidad del avión es a lo largo del eje X, por lo que la componente de velocidad es:

$$V_A = 450 \hat{i} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

Para que la colisión exista, la componente inicial del proyectil a lo largo del eje X debe ser igual a la velocidad del avión, esto es:

$$V_{B_0X} = V_A$$

La componente inicial del proyectil a lo largo del eje X es:

$$V_X = V_{B_0X}$$

$$V_{B_0X} = V_{B_0} \cos \alpha$$

Igualando las velocidades para que exista la colisión, se tiene:

$$V_{B_0} \cos \alpha = V_A$$

$$\cos \alpha = \frac{V_A}{V_{B_0}}$$

$$\cos \alpha = \frac{450 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\,500 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$\alpha = 72,10^\circ$$

La componente de la velocidad inicial del proyectil a lo largo del eje Y es:

$$V_{B_0Y} = V_{B_0} \text{ Sen } \alpha$$

$$V_{B_0Y} = 1\,500 \frac{\text{m}}{\text{s}} * \text{Sen } 72,10^\circ$$

$$V_{B_0Y} = 1\,427,38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad del proyectil en el momento del impacto es:

$$\vec{V}_B = V_{B_X} \hat{i} + V_{B_Y} \hat{j}$$

La distancia vertical desde el lanzamiento del proyectil hasta el instante del impacto es de 2000 m.

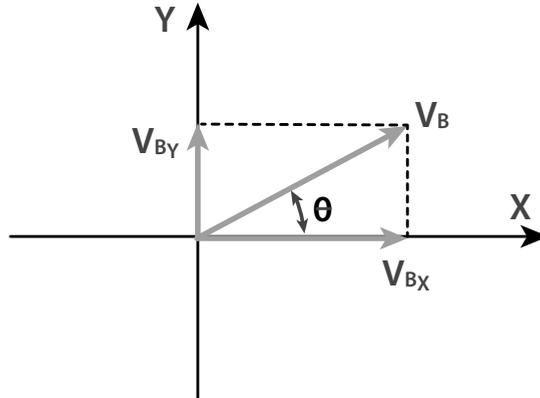
El movimiento del proyectil B es un movimiento uniformemente acelerado y la componente de la velocidad del proyectil a lo largo del eje Y en el momento del impacto es:

$$V_{B_Y}^2 = V_{B_0Y}^2 - 2 g Y$$

$$V_{B_Y}^2 = \left(1\,427,38 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 2 * 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 2\,000 \text{ m}$$

$$V_{B,Y} = 1\,413,56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad del proyectil en el momento del impacto puede verse en la figura 27.

**Figura 27. Velocidad del proyectil en el momento del impacto**

Fuente: elaboración propia.

La velocidad del proyectil en el momento del impacto es:

$$\bar{V}_B = 461,11 \hat{i} + 1\,413,56 \hat{j} \left( \frac{m}{s} \right)$$

La velocidad del avión es:  $\bar{V}_A = 461,11 \hat{i} \left( \frac{m}{s} \right)$

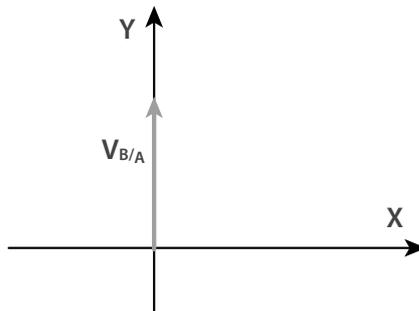
La velocidad relativa del proyectil respecto al avión es:

$$\bar{V}_{B/A} = \bar{V}_B - \bar{V}_A$$

$$\bar{V}_{B/A} = (461,11 \hat{i}) - (461,11 \hat{i} + 1\,413,56 \hat{j})$$

$$\bar{V}_{B/A} = 1\,413,56 \hat{j} \left( \frac{m}{s} \right)$$

La velocidad relativa del proyectil respecto al avión puede verse en la figura 28.

**Figura 28. Velocidad relativa del proyectil respecto al avión**

Fuente: elaboración propia.

Como el avión tiene velocidad constante, su aceleración es nula.

$$a_A = 0$$

Como el movimiento del proyectil B es un movimiento uniformemente acelerado, la aceleración del proyectil es la aceleración de la gravedad.

$$\bar{a}_B = -9,81 \hat{j} \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

La aceleración relativa del proyectil respecto al avión es:

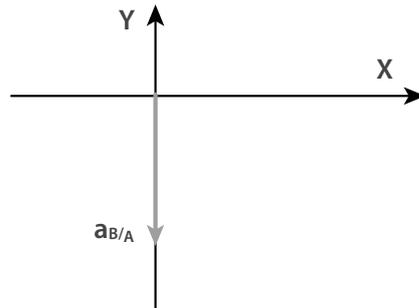
$$\bar{a}_{B/A} = \bar{a}_B - \bar{a}_A$$

$$\bar{a}_{B/A} = -9,81 \hat{j} - 0$$

$$\bar{a}_{B/A} = -9,81 \hat{j} \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

La aceleración relativa del proyectil respecto al avión puede verse en la figura 29.

**Figura 29. Aceleración relativa del proyectil respecto al avión**



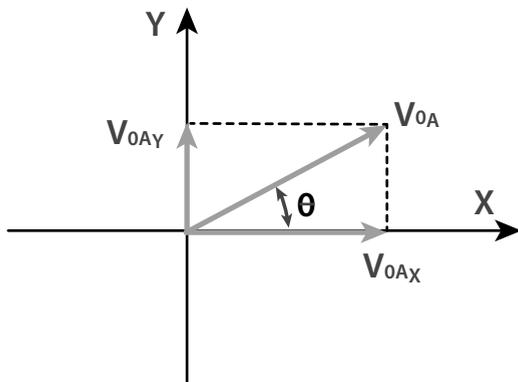
Fuente: elaboración propia.

La aceleración relativa de respecto a A es de  $9,81 m/s^2$ , dirigida hacia el eje negativo Y.

### 1.6.2 Problema: caso 8

Las partículas A y B son disparadas al mismo tiempo con igual velocidad:  $10 m/s$  e inclinación horizontal de  $53,13^\circ$  y  $36,86^\circ$  respectivamente.

Determinar la posición, velocidad y aceleración relativa de la partícula respecto a la partícula después de que transcurran del disparo. Las componentes rectangulares iniciales de velocidad de la partícula pueden verse en la figura 30.

**Figura 30. Componentes rectangulares iniciales de velocidad de la partícula A**

Fuente: elaboración propia.

La componente inicial de velocidad de la partícula A a lo largo del eje X es:

$$V_{0X_A} = V_{0A} \cos \theta_A$$

$$V_{0X_A} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} * \cos 53,13^\circ$$

$$V_{0X_A} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La componente inicial de velocidad de la partícula A a lo largo del eje Y es:

$$V_{0Y_A} = V_{0A} \sin \theta_A$$

$$V_{0Y_A} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} * \sin 53,13^\circ$$

$$V_{0Y_A} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Los ejes de coordenadas se ubican en el inicio del movimiento de las partículas, por lo que  $X_{0A} = 0$  y  $Y_{0A} = 0$ .

La posición de la partícula A, a lo largo del eje X, cuando han transcurrido 3s, es:

$$X_A = X_{0A} + V_{XA} t$$

$$X_A = 0 + 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} * 3 \text{ s}$$

$$X_A = 18 \text{ m}$$

La posición de la partícula A a lo largo del eje Y, cuando han transcurrido 3s, es:

$$Y_A = Y_{0A} + V_{0Y_A} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Y_A = 0 + 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} * 3 \text{ s} - \frac{1}{2} * 9,80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * (3 \text{ s})^2$$

$$Y_A = -20,14 \text{ m}$$

La componente final de la velocidad de la partícula A a lo largo del eje Y es:

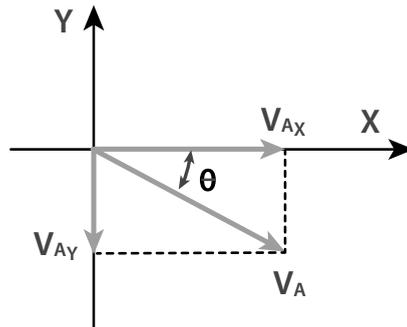
$$V_{Y_A} = V_{0Y_A} - g t$$

$$V_{Y_A} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 3 \text{ s}$$

$$V_{Y_A} = 21,43 \hat{j} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

La velocidad de la partícula cuando han transcurrido 3s puede verse en la figura 31.

**Figura 31. Velocidad de la partícula A cuando han transcurrido 3s**



Fuente: elaboración propia.

La posición final de la partícula A es:

$$\vec{r}_A = 18 \hat{i} - 20,14 \hat{j} \text{ (m)}$$

La velocidad final de la partícula A es:

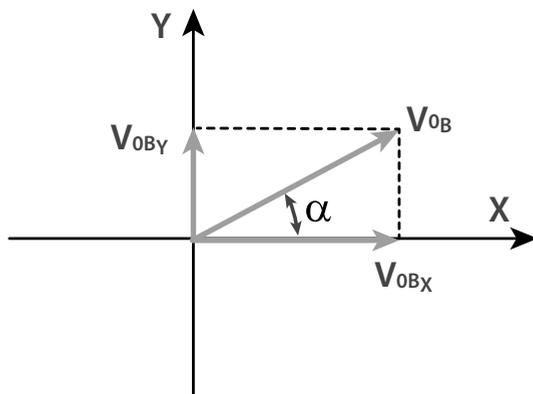
$$\vec{v}_A = 18 \hat{i} - 20,14 \hat{j} \text{ (m)}$$

Como el movimiento de la partícula A es un movimiento uniformemente acelerado, la aceleración de la partícula A es la aceleración de la gravedad.

$$\vec{a}_A = -9,81 \hat{j} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

Las componentes rectangulares iniciales de velocidad de la partícula pueden verse en la figura 32.

**Figura 32. Componentes rectangulares iniciales de velocidad de la partícula B**



Fuente: elaboración propia.

La componente inicial de velocidad de la partícula a lo largo del eje X es:

$$V_{0X_B} = V_{0B} \cos \alpha_B$$

$$V_{0X_B} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} * \cos 36,86^\circ$$

$$V_{0X_A} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La componente inicial de velocidad de la partícula B a lo largo del eje Y es:

$$V_{0Y_B} = V_{0B} \text{Sen } \theta_B$$

$$V_{0Y_B} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} * \text{Sen } 36,86^\circ$$

$$V_{0Y_B} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Como los ejes de coordenadas se ubicaron en el inicio del movimiento de las partículas,  $X_{0B} = 0$  y  $Y_{0B} = 0$ .

La posición de la partícula a lo largo del eje X, cuando han transcurrido 3s, es:

$$X_B = X_{0B} + V_{XB} t$$

$$X_B = 0 + 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} * 3 \text{ s}$$

$$X_A = 24 \text{ m}$$

La posición de la partícula B a lo largo del eje Y, cuando han transcurrido 3s, es:

$$Y_B = Y_{0B} + V_{0Y_B} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$Y_B = 0 + 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} * 3 \text{ s} - \frac{1}{2} * 9,80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * (3 \text{ s})^2$$

$$Y_B = -20,14 \text{ m}$$

La componente final de la velocidad de la partícula B a lo largo del eje Y es:

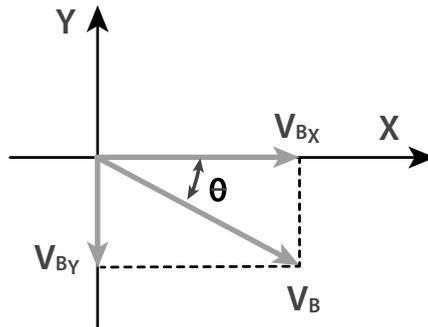
$$V_{Y_B} = V_{0Y_B} - g t$$

$$V_{Y_B} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 3 \text{ s}$$

$$V_{Y_A} = -23,40 \hat{j} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

La velocidad de la partícula B cuando han transcurrido 3s puede verse en la figura 33.

**Figura 33. Velocidad de la partícula B cuando han transcurrido 3 s**



Fuente: elaboración propia.

La posición final de la partícula B es:

$$\vec{r}_B = 24 \hat{i} - 26,14 \hat{j} \text{ (m)}$$

La velocidad final de la partícula B es:

$$\vec{V}_B = 8 \hat{i} - 23,40 \hat{j} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

Como el movimiento de la partícula B es un movimiento uniformemente acelerado, la aceleración de la partícula B es la aceleración de la gravedad.

$$\bar{a}_B = -9,81 \hat{j} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

La posición final de la partícula A respecto a la partícula B es:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{A/B} &= \bar{r}_A - \bar{r}_B \\ \bar{r}_{A/B} &= (18 \hat{i} - 20,14 \hat{j}) - (24 \hat{i} - 26,14 \hat{j}) \\ \bar{r}_{A/B} &= -6 \hat{i} + 6 \hat{j} \text{ (m)} \end{aligned}$$

La velocidad final de la partícula A respecto a la partícula B es:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{A/B} &= \bar{v}_A - \bar{v}_B \\ \bar{v}_{A/B} &= (6 \hat{i} - 21,43 \hat{j}) - (8 \hat{i} - 23,40 \hat{j}) \\ \bar{v}_{A/B} &= -2 \hat{i} + 1,97 \hat{j} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \end{aligned}$$

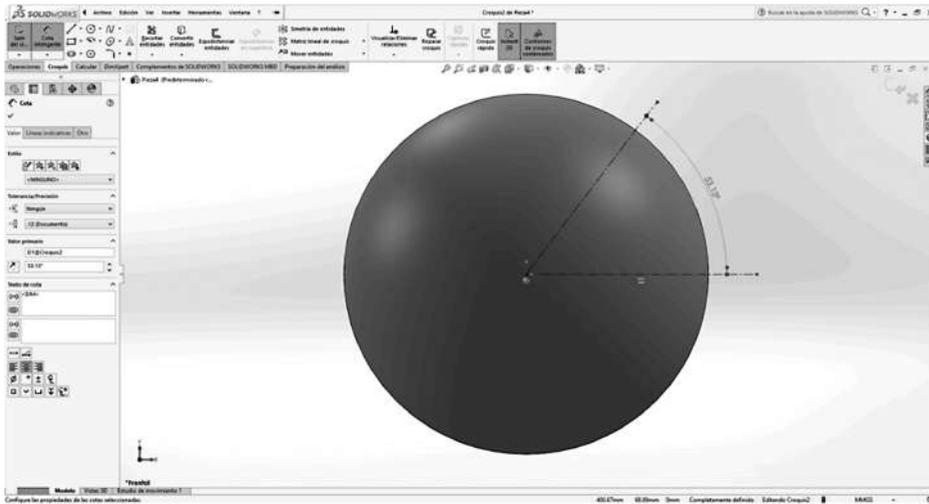
La aceleración final de la partícula A respecto a la partícula B es:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{A/B} &= \bar{a}_A - \bar{a}_B \\ \bar{a}_{A/B} &= (-9,81 \hat{j}) - (-9,81 \hat{j}) \\ \bar{a}_{A/B} &= 0 \end{aligned}$$

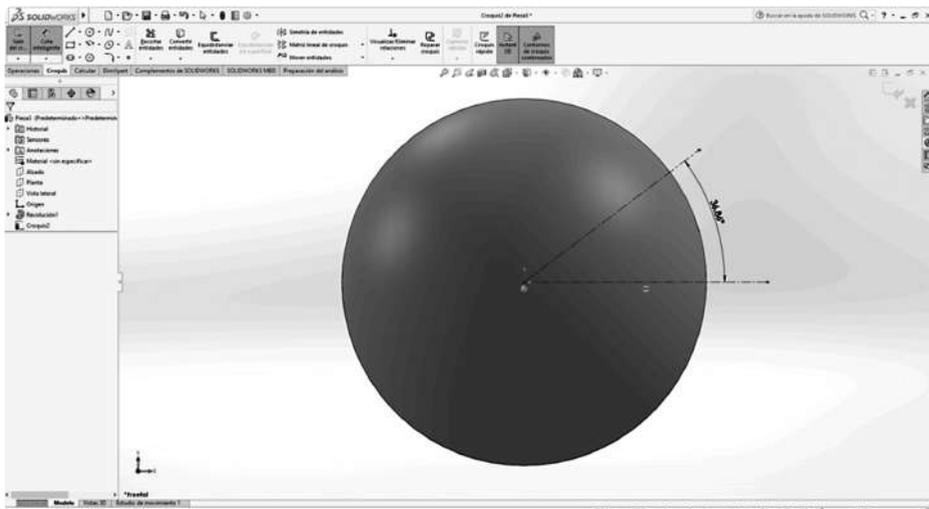
### 1.6.2.1 Simulación: movimiento relativo

#### Procedimiento de simulación

Se procede a dibujar dos esferas de diámetro 50 cm cada una. Para asignarle la dirección de la velocidad inicial a cada una se crea un croquis con líneas constructivas. Para la partícula A se asigna un ángulo de  $53,13^\circ$  con la horizontal (véase la figura 34) y para la partícula B se le asigna un ángulo de  $36,86^\circ$  con la horizontal (véase la figura 35).

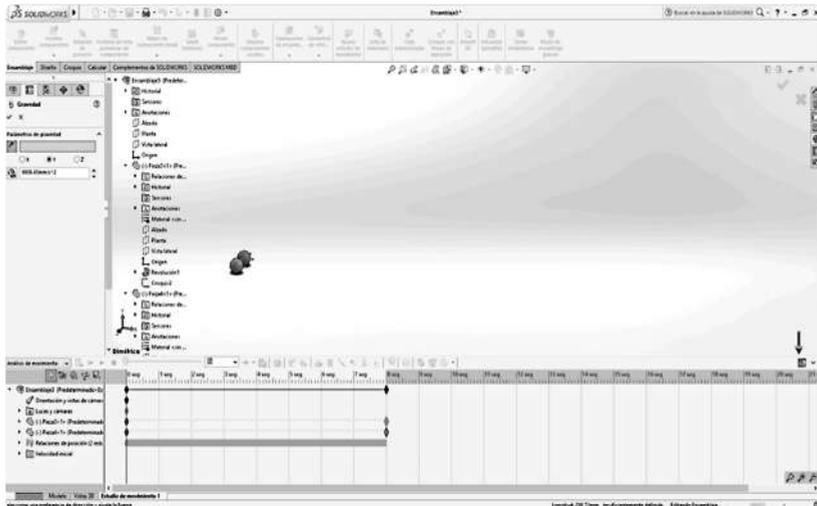
**Figura 34. Línea constructiva para la dirección de la partícula A**

Fuente: elaboración propia usando el *software Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

**Figura 35. Línea constructiva para la dirección de la partícula B**

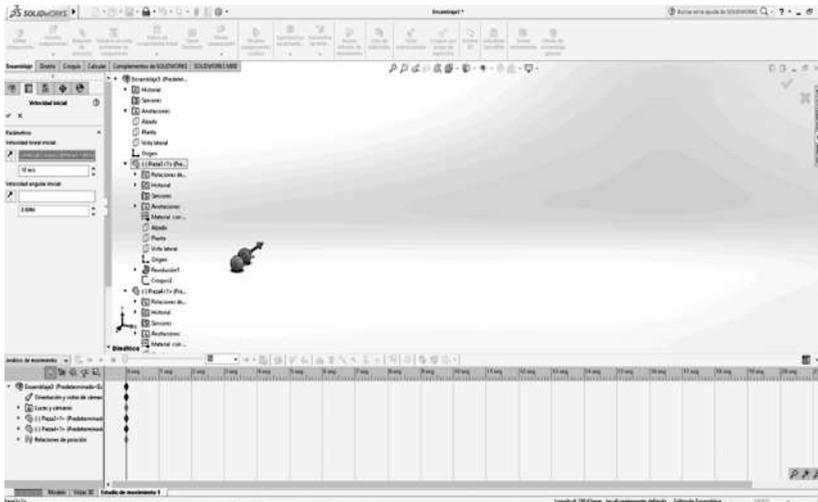
Fuente: elaboración propia usando el *software Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

Una vez creadas las esferas se inicia el estudio de movimiento aplicando la constante gravitacional como se ve en la figura 36.

**Figura 36. Aplicación de la constante gravitacional**

Fuente: elaboración propia usando el software *Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

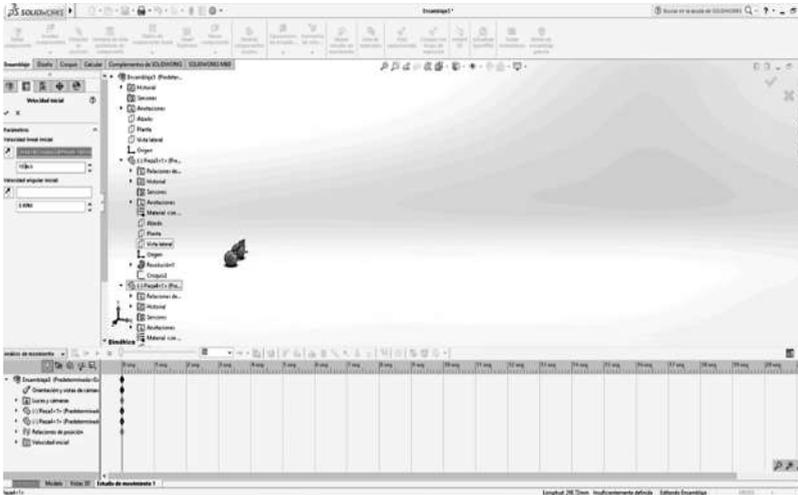
Luego se asigna la magnitud de la velocidad inicial a la partícula A, que es de 10 m/s de acuerdo a la dirección establecida anteriormente en el croquis constructivo como se ve en la figura 37.

**Figura 37. Aplicación de la velocidad inicial para la partícula A**

Fuente: elaboración propia usando el software *Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

De igual manera se asigna la magnitud de la velocidad inicial a la partícula B, que es de 10 m/s de acuerdo a la dirección establecida anteriormente en el croquis constructivo como se ve en la figura 38.

**Figura 38. Aplicación de la velocidad inicial para las partículas**

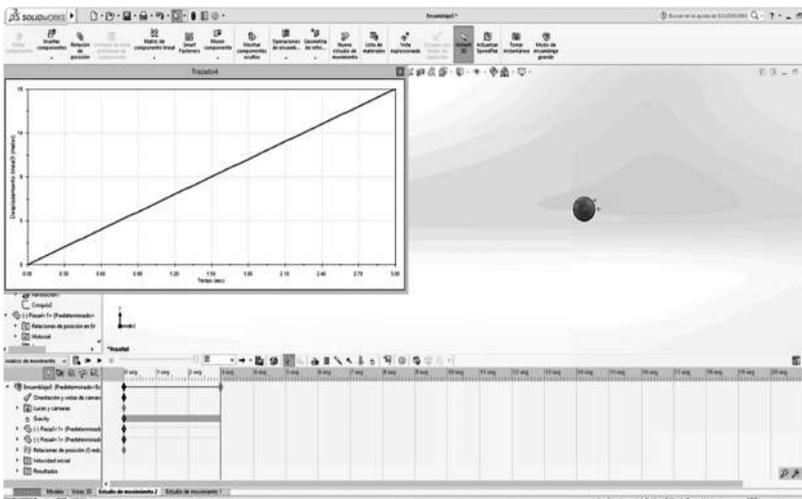


Fuente: elaboración propia usando el software *Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

### Análisis de resultados

Se procede a analizar el estudio de movimiento, obteniendo el desplazamiento de la partícula A de 18 m, coincidiendo con los resultados analíticos (véase la figura 39).

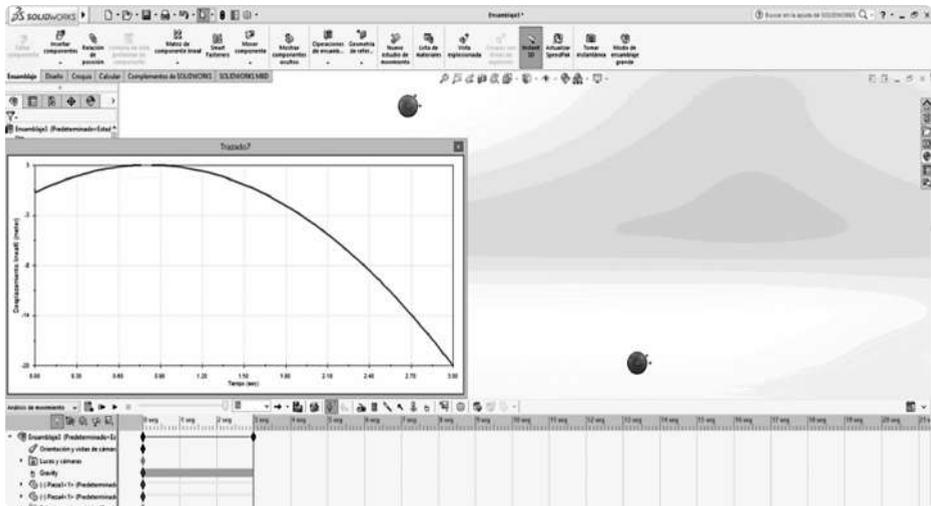
**Figura 39. Desplazamiento de la partícula A a lo largo del eje X**



Fuente: elaboración propia usando el software *Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

Para conocer la posición de la partícula A a lo largo del eje Y, se evalúa la trayectoria a lo largo de este eje, obteniendo como resultado que la posición de la partícula es de  $-20,14$  m (véase la figura 40).

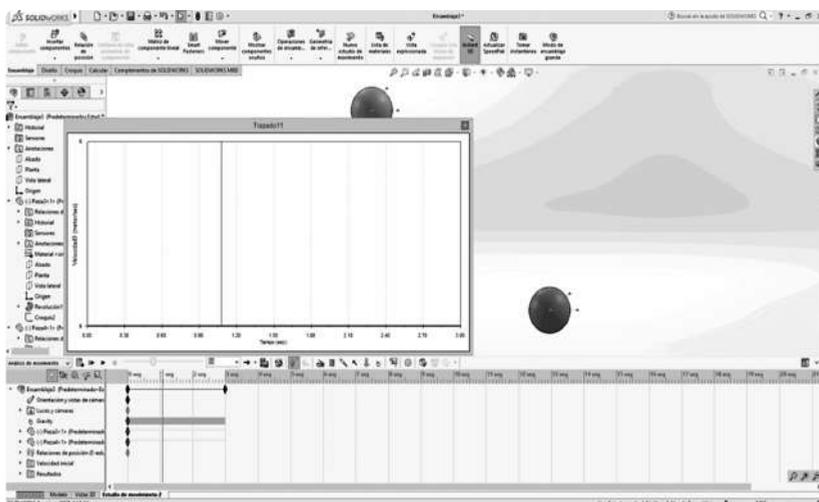
**Figura 40. Desplazamiento de la partícula A a lo largo del eje Y**



Fuente: elaboración propia usando el *software Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

Para determinar la velocidad final de la partícula A se evalúan las componentes de la velocidad en cada uno de los ejes X y Y, obteniendo la velocidad final de la partícula de  $8$  m/s, como se ve en la figura 41.

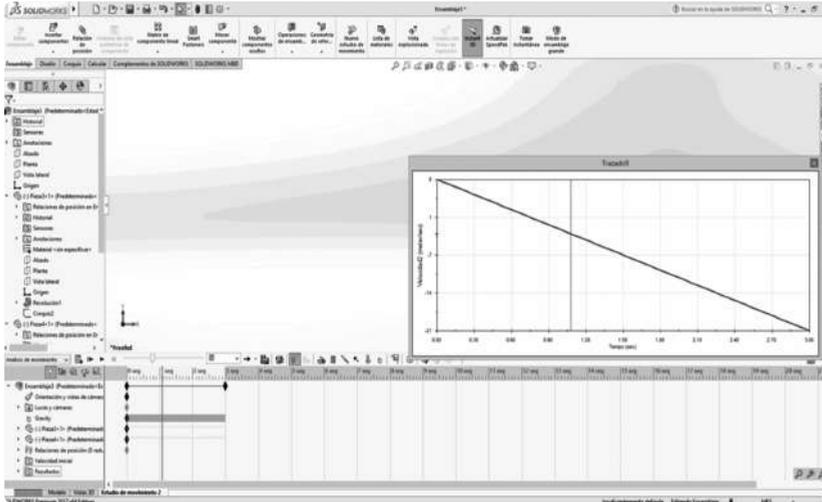
**Figura 41. Velocidad final de la partícula A**



Fuente: elaboración propia usando el *software Solidworks Education Edition*, suscripción versión educativa.

La componente de la velocidad final de la partícula A, a lo largo del eje Y, es de -21,43 m/s, así como las de la velocidad final de la partícula son  $8 \hat{i} - 21,43 \hat{j} \left( \frac{m}{s} \right)$ , valores que coinciden con los resultados analíticos que se encontraron previamente (véase la figura 42).

**Figura 42. Componentes de la velocidad final de la partícula A**



Fuente: elaboración propia usando el software Solidworks Education Edition, suscripción versión educativa.

## CAPÍTULO 2

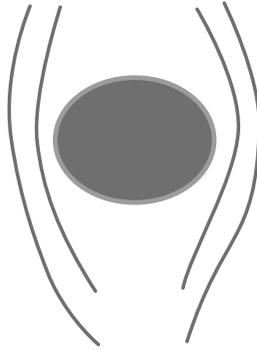
# CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA: FUERZA Y ACELERACIÓN

La cinética estudia la relación existente entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, su masa y su movimiento. Se utiliza para predecir el movimiento ocasionado por fuerzas dadas o para determinar las que se requieren para producir un movimiento específico.

### **2.1 Ecuación del movimiento: coordenadas rectangulares**

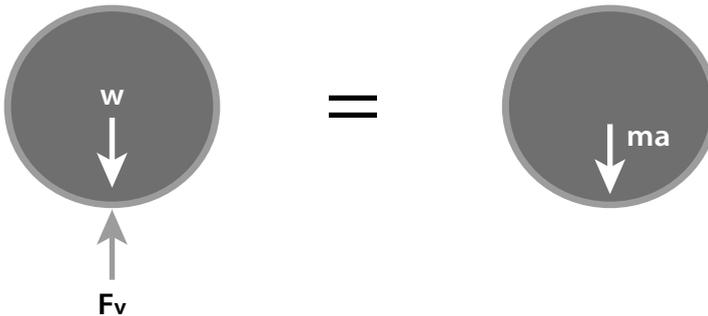
#### ***2.1.1 Problema: caso 9***

Una partícula de masa  $m$  cae, partiendo del reposo (véase la figura 43). Por efectos de oposición al movimiento se le ejerce una fuerza dada por  $F_v = CV$ . Encontrar una expresión de la velocidad en función del tiempo.

**Figura 43. Esquema general**

Fuente: elaboración propia.

Se aplica la segunda ley de Newton a la partícula como se ve en la figura 44.

**Figura 44. Segunda ley de Newton a la partícula**

Fuente: elaboración propia.

$$+\downarrow (\Sigma \bar{F})_{\text{externas e internas}} = (\Sigma \bar{F})_{\text{inerciales}}$$

$$W - F_V = m a$$

Reemplazando la expresión de la oposición del movimiento a la partícula, la aceleración de la partícula es:

$$m g - C V = m a$$

$$a = \frac{m g - C V}{m}$$

$$a = g - \frac{C}{m} V$$

La aceleración es la variación de la velocidad  $V$  respecto al tiempo.

$$a = \frac{dV}{dt}$$

Reemplazando la expresión de la aceleración encontrada, se tiene:

$$g - \frac{C}{m} V = \frac{dV}{dt}$$

Separando variables, se tiene:

$$dt = \frac{dV}{g - \frac{C}{m} V}$$

$$dt = \frac{dV}{\frac{g m - C V}{m}}$$

$$dt = \frac{m}{g m - C V} dV$$

Integrando la ecuación y reemplazando los límites de integración se tiene:

$$\int_0^t dt = \int_0^V \frac{m}{g m - C V} dV$$

Resolviendo la integral, se tiene:

$$t = -\frac{m}{C} \ln(V-0)$$

$$t = -\frac{m}{C} \ln V$$

Despejando la velocidad, se tiene:

$$V = e^{-\frac{tC}{m}}$$

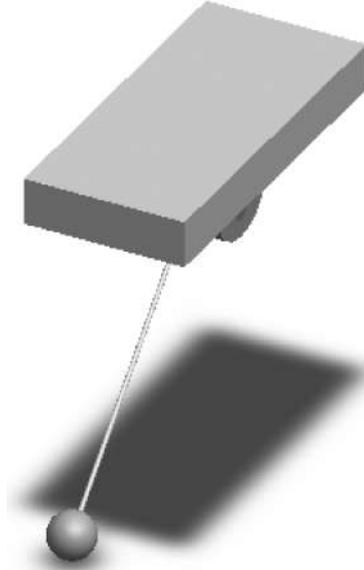
## 2.2 Ecuación del movimiento: coordenadas tangenciales y normales

### 2.2.1 Problema: caso 10

Una esfera de masa  $m$  está suspendida de un cable inextensible de longitud  $L$  como se ve en la figura 45. Si la esfera parte del reposo en  $\theta=0^\circ$ , determinar el valor de

la inclinación  $\theta$ , para la cual el cable se romperá. La tensión máxima no debe ser mayor a  $3/2$  del peso de la esfera.

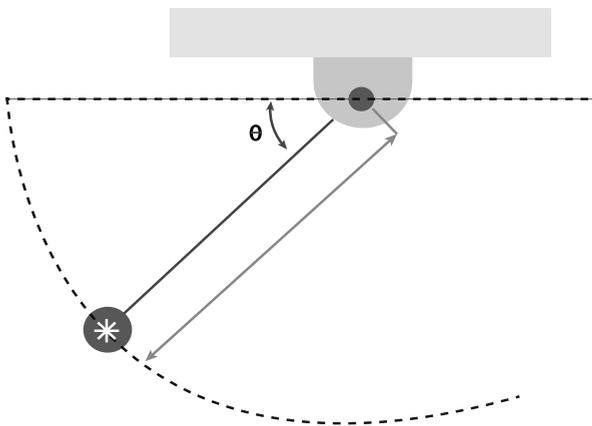
**Figura 45. Esquema general**



Fuente: elaboración propia.

En la figura 46 se observa la trayectoria de la esfera.

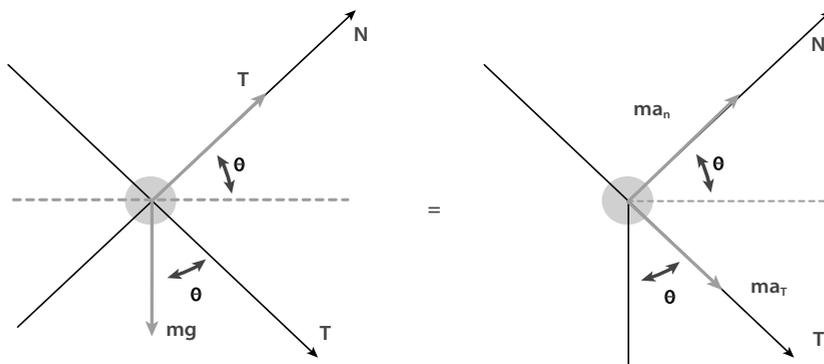
**Figura 46. Trayectoria de la esfera**



Fuente: elaboración propia.

Se le aplica la segunda ley de Newton a la esfera en una posición cualquiera (véase la figura 47).

**Figura 47. Segunda ley de Newton a la esfera**



Fuente: elaboración propia.

Aplicando la segunda ley de Newton a lo largo del eje tangencial, se tiene:

$$+ \sum (\bar{F})_{\text{externas e internas}} = (\sum \bar{F})_{\text{inerciales}}$$

$$- m g \cos \theta = - m a_T$$

$$a_T = g \cos \theta$$

La aceleración tangencial es la razón de cambio de la rapidez respecto al tiempo.

$$a_T = \frac{dV}{dt}$$

Multiplicando y dividiendo al mismo tiempo entre el desplazamiento y la posición angular, para encontrar una relación entre la aceleración angular en función de la rapidez y la posición angular, se tiene:

$$a_T = \frac{dV}{dt} \frac{ds}{ds} \frac{d\theta}{d\theta}$$

Organizando el miembro derecho de la aceleración tangencial, se tiene:

$$a_T = \frac{dV}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt}$$

Como la esfera describe una trayectoria circular, se tiene:

$$ds = \rho d\theta$$

Despejando, se tiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

La variación de la posición respecto al tiempo es la rapidez.

$$V = \frac{ds}{dt}$$

Reemplazando, se tiene:

$$a_T = \frac{dV}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$a_T = \frac{dV}{d\theta} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot V$$

$$a_T = \frac{V}{\rho} \frac{dV}{d\theta}$$

Reemplazando la expresión de la aceleración tangencial obtenida de la segunda ley de Newton a lo largo del eje tangencial, se tiene:

$$a_T = g \cos \theta$$

$$a_T = \frac{V}{\rho} \frac{dV}{d\theta}$$

$$g \cos \theta = \frac{V}{\rho} \frac{dV}{d\theta}$$

Separando variables, se tiene:

$$g \rho \cos \theta d\theta = V dV$$

Integrando y teniendo en cuenta la condición inicial de que la esfera inicia su movimiento cuando la posición angular es nula, la expresión de la rapidez es:

$$\int_0^\theta g \rho \cos \theta d\theta = \int_0^V V dV$$

$$g \rho \operatorname{Sen} \theta = \frac{V^2}{2}$$

$$V^2 = 2 g \rho \operatorname{Sen} \theta$$

Aplicando la segunda ley de Newton a lo largo del eje normal, se tiene:

$$+ \mathcal{N} (\Sigma \bar{F})_{\text{externas e internas}} = (\Sigma \bar{F})_{\text{inerciales}}$$

$$T - m g \operatorname{Sen} \theta = m a_N$$

La magnitud de la aceleración normal es:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

Reemplazando la expresión de la aceleración normal en la segunda ley de Newton, a lo largo del eje normal, teniendo en cuenta que la longitud del cable es  $L$  se tiene:

$$T - m g \text{ Sen } \theta = m a_N$$

$$T = m g \text{ Sen } \theta + m \frac{v^2}{L}$$

Reemplazando la expresión de la rapidez obtenida de la segunda ley de Newton a lo largo del eje tangencial se tiene:

$$v^2 = 2 g \rho \text{ Sen } \theta$$

$$T = m g \text{ Sen } \theta + m \frac{v^2}{L}$$

$$T = m g \text{ Sen } \theta + m \frac{2 g L \text{ Sen } \theta}{L}$$

$$T = m g \text{ Sen } \theta + 2 m g \text{ Sen } \theta$$

$$T = 3 m g \text{ Sen } \theta$$

Reemplazando la condición del momento en el que el cable se romperá  $T_{\text{máximo}} = \frac{3}{2} W$ , para encontrar la posición angular cuando esto ocurra, se tiene:

$$T = 3 m g \text{ Sen } \theta$$

$$\frac{3}{2} m g = 3 m g \text{ Sen } \theta$$

$$\frac{3}{2} = 3 \text{ Sen } \theta$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \text{ArcSen } \frac{1}{2}$$

$$\theta = 30^\circ$$

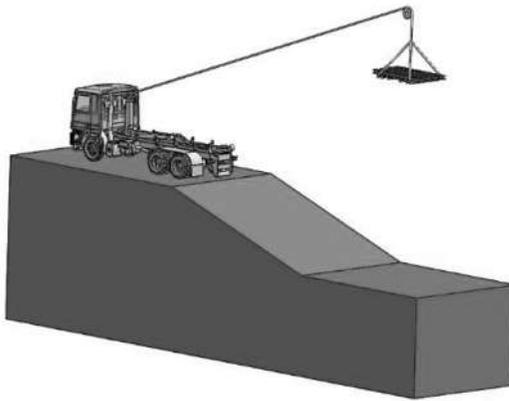
El cable se romperá cuando el cable se encuentra en una posición angular de .

## 2.3 Movimiento dependiente de partículas

### 2.3.1 Problema: caso 11

Se utiliza un tráiler para levantar una carga de masa por medio de una cuerda, como se muestra en la figura 48. Si el tráiler se desplaza hacia la derecha con una rapidez constante, encontrar una expresión para la velocidad, la aceleración de la masa a izar y la tensión en la cuerda en función de las posiciones de la masa a izar y del tráiler.

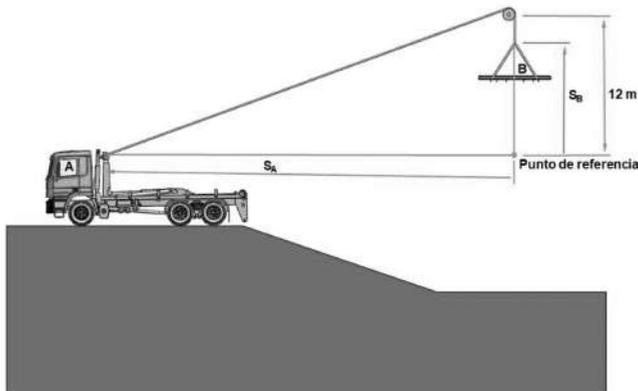
Figura 48. Esquema general



Fuente: elaboración propia.

Se ubica un punto de referencia por debajo de la carga a izar en la intersección con el plano horizontal de la cabina del trailer para definir las posiciones del trailer A y la carga a izar B, así:

Figura 49. Posición de las partículas



Fuente: elaboración propia.

Se encuentra la relación de las posiciones de las partículas A y B para derivar una y dos veces respecto al tiempo y encontrar la relación de velocidad y aceleración de estas

La longitud de la cuerda en función de las posiciones de las partículas A y B es:

$$(12-S_B)+\sqrt{S_A^2+12^2}=L$$

Derivando la expresión de la longitud de la cuerda para encontrar la relación de las velocidades de las partículas, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[ (12-S_B)+\sqrt{S_A^2+12^2} \right] &= \frac{d}{dt} (L) \\ \frac{d}{dt} (12)+\frac{d}{dt} (-S_B)+\frac{d}{dt} \left( \sqrt{S_A^2+12^2} \right) &= \frac{d}{dt} (L) \\ 0-\frac{dS_B}{dt}+\frac{1}{2} (S_A^2+12^2)^{-\frac{1}{2}*2} S_A \frac{dS_A}{dt} &= 0\end{aligned}$$

La variación de la posición de la partícula respecto al tiempo es la velocidad.

$$V=\frac{dS}{dt}$$

Reemplazando en la expresión de posición, la velocidad de la masa a izar es:

$$\begin{aligned}-V_B+\frac{1}{2} (S_A^2+12^2)^{-\frac{1}{2}*2} 2S_A * V_A &= 0 \\ -V_B+S_A * V_A * (S_A^2+12^2)^{-\frac{1}{2}} &= 0 \\ V_B &= S_A * V_A * (S_A^2+12^2)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Derivando la expresión de las velocidades para encontrar la relación entre las aceleraciones de las partículas, se tiene:

$$\begin{aligned}-V_B+S_A * V_A * (S_A^2+12^2)^{-\frac{1}{2}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ -V_B+S_A * V_A * (S_A^2+12^2)^{-\frac{1}{2}} \right] &= \frac{d}{dt} (0) \\ \frac{d}{dt} (-V_B)+\frac{d}{dt} \left[ S_A * V_A * (S_A^2+12^2)^{-\frac{1}{2}} \right] &= \frac{d}{dt} (0) \\ -\frac{dV_B}{dt}+\frac{dS_A}{dt} * \left[ V_A * (S_A^2+12^2)^{-\frac{1}{2}} \right] + \frac{dV_A}{dt} * \left[ S_A * (S_A^2+12^2)^{-\frac{1}{2}} \right] &+ \left[ -\frac{1}{2} * (S_A^2+12^2)^{-\frac{3}{2}*2} S_A * \frac{dS_A}{dt} \right] * (S_A * V_A) = 0\end{aligned}$$

La variación de la velocidad de la partícula respecto al tiempo es la aceleración.

$$a = \frac{dV}{dt}$$

Reemplazando en la expresión de velocidad se tiene:

$$-a_B + V_A \left[ V_A (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} \right] + a_A \left[ S_A (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} \right] + \left[ -\frac{1}{2} (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2} - 2} S_A \cdot V_A \right] (S_A \cdot V_A) = 0$$

$$-a_B + V_A \left[ V_A (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} \right] + a_A \left[ S_A (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} \right] + \left[ -S_A \cdot V_A (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} \right] (S_A \cdot V_A) = 0$$

$$-a_B + V_A^2 (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} + a_A \cdot S_A (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} - S_A^2 \cdot V_A^2 (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$a_B = V_A^2 (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} + a_A \cdot S_A (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} - S_A^2 \cdot V_A^2 (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_B = \frac{V_A^2}{(S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a_A \cdot S_A}{(S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}} - S_A^2 \cdot V_A^2 (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}$$

Debido a que el tráiler se mueve con velocidad constante, su aceleración es nula.

$$a_A = 0$$

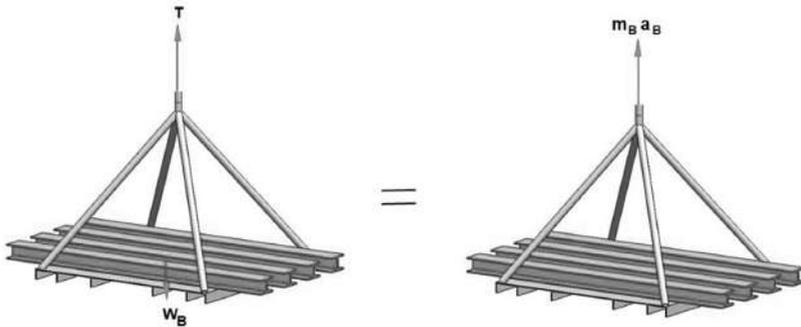
Reemplazando la aceleración del tráiler en la expresión de la aclaración, la masa a izar es:

$$a_B = \frac{V_A^2}{(S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{0 \cdot S_A}{(S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}} - S_A^2 \cdot V_A^2 (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_B = \frac{V_A^2}{(S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}} + 0 - S_A^2 \cdot V_A^2 (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_B = \frac{V_A^2}{(S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}} - S_A^2 \cdot V_A^2 (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}$$

Se aplica la segunda ley de Newton a la carga a izar B, como se ve en la figura 50.

**Figura 50. Segunda ley de Newton de la carga a izar**

Fuente: elaboración propia.

$$+\uparrow (\Sigma \bar{F})_{\text{externas e internas}} = (\Sigma \bar{F})_{\text{inerciales}}$$

$$T - W_B = m_B a_B$$

$$T - m_B g = m_B a_B$$

$$T = m_B a_B + m_B g$$

Reemplazando la aceleración de la masa a izar, la tensión en la cuerda es:

$$T = m_B \left[ \frac{V_A^2}{(S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}} - S_A^2 \cdot V_A^2 \cdot (S_A^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}} \right] + m_B g$$





## BIBLIOGRAFÍA

Beer, F., Johnston, R., Mazurek, D. y Eisenberg, E. (2010). *Mecánica Vectorial para ingenieros*. Mc Graw Hill.

Gill, M. (1997). *Ingeniería Mecánica*. Grupo Editorial Iberoamericana.

Hibbeler, R. (1995). *Ingeniería Mecánica Dinámica*. Prentice Hall.

Meriam, J. y Kraige, L. (1998). *Ingeniería mecánica: Dinámica*. Reverté.

Riley, W. y Sturges, L. (1996). *Ingeniería mecánica: Dinámica*. Reverté.

Este libro fue compuesto en caracteres Minion  
a 11 puntos, impreso sobre papel Bond de 75  
gramos y encuadernado con el método hot melt,  
en diciembre del 2020, en Bogotá, Colombia.

# CINEMÁTICA Y CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA

## PROBLEMAS RESUELTOS

El libro permite la enseñanza de la dinámica al aplicar una serie de principios fundamentales que desarrollan la capacidad de análisis e interpretación de cualquier problema de forma lógica y sencilla. Se estudia la geometría del movimiento, la relación que existe entre las fuerzas que actúan en el cuerpo y el movimiento resultante.

Se explica la cinemática y cinética de partículas analizando los movimientos uniformemente acelerados y curvilíneos utilizando componentes rectangulares, tangente normal y cilíndrica, además, el movimiento simultáneo de varias partículas y la aplicación de la segunda ley de Newton.

Los ejercicios son situaciones reales y se presentan de forma tridimensional, por lo cual su solución se hace detalladamente.

El libro está dirigido a los estudiantes de programas académicos que en su formación requieran el estudio de los principios fundamentales de la dinámica.

## Incluye

- ▶ Apropriación de los principios fundamentales de la dinámica por medio de análisis vectorial.
- ▶ Representación sencilla de problemas en situaciones reales que captan los fenómenos de la naturaleza.
- ▶ Ejercicios en tres dimensiones que proporcionan comprensión espacial.
- ▶ La dificultad de los ejercicios es creciente y la solución se presenta simple y detallada.

### Gustavo Guerrero Gómez

Ingeniero Mecánico, especialista en Práctica Docente de la Universidad Francisco de Paula Santander, Magíster en Sistemas Energéticos Avanzados de la Universidad de Santander, Bucaramanga. Autor de *¿Cómo influyen las malas prácticas en la calidad de los productos cerámicos?*, *Eficiencia energética en hornos de producción de materiales cerámicos y balance energético* y *Simulación de un horno para arcillas de tiro invertido*.

### Nelson Afanador García

Ingeniero Civil y Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de la Salle, Magíster en Ingeniería Civil con énfasis en estructuras de la Universidad de los Andes y Doctor en Estructuras de la Universidad de Brasilia. Desde 2003 trabaja en el departamento de Ingeniería civil de la Universidad Francisco de Paula Santander.

### Christian Nolasco Serna

Matemático de la Universidad Nacional de Colombia, Magíster y Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Autor de varios trabajos de ecuaciones diferenciales parciales y de computación.



Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Ocaña - Colombia  
Vigilada Mineducación



GIFEAH

ISBN 978-958-503-037-4



e-ISBN 978-958-503-038-1