



# ESFUERZO Y DEFORMACIÓN CON APLICACIONES

Tipos de esfuerzo - deformación por carga

**Gustavo Guerrero Gomez, Nelson Afanador Garcia  
Romel Jesus Gallardo Amaya**



Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Vigilada Mineducación





# **ESFUERZO Y DEFORMACIÓN CON APLICACIONES**

Gustavo Guerrero Gómez  
Nelson Afanador García  
Romel Jesús Gallardo Amaya

Guerrero Gómez, Gustavo

Esfuerzo y deformación con aplicaciones : tipos de esfuerzo - deformación por carga / Gustavo Guerrero Gómez, Nelson Afanador García, Romel Jesús Gallardo Amaya. -- 1a ed. -- San José de Cúcuta : Universidad Francisco de Paula Santander, 2022.  
104 p. – (Ingeniería y afines. Mecánica de sólidos)

Contiene datos curriculares de los autores. -- Contiene glosario. -- Contiene bibliografía.

ISBN 978-958-503-336-8 -- 978-958-503-337-5 (e-book)

1. Esfuerzos y deformaciones 2. Análisis estructural (Ingeniería) 3. Ladrillos - Ensayos I. Afanador García, Nelson II. Gallardo Amaya, Romel Jesús III Título IV. Serie

CDD: 624.176 ed. 23

CO-BoBN- a1090550

---



**Área:** Ingeniería y afines

**Subárea:** Mecánica de sólidos



**Universidad Francisco  
de Paula Santander**

Vigilada Mineducación

© Gustavo Guerrero Gómez, Nelson

© Afanador García

© Romel Jesús Gallardo Amaya

©Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Avenida Gran Colombia  
No. 12E-96, Barrio Colsag  
San José de Cúcuta - Colombia  
Teléfono: 607 577 6655

► Ecoe Ediciones S.A.S.  
info@ecoeediciones.com  
www.ecoeediciones.com  
Carrera 19 # 63C 32, Tel.: 919 80 02  
Bogotá, Colombia

**Primera edición:** Bogotá, abril del 2022

**ISBN:** 978-958-503-336-8

**e-ISBN:** 978-958-503-337-5

Directora editorial: Claudia Garay Castro  
Coordinadora editorial: Paula Bermúdez B.  
Corrección de estilo: Paula Rueda  
Diagramación: Alicia Parra  
Carátula: Wilson Marulanda  
Impresión: Carvajal Soluciones de  
Comunicación S.A.S.  
Carrera 69 #15-24

*Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio  
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.*

*Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados*

# AGRADECIMIENTOS

*A mi madre María Elena Gómez de Guerrero y a mi padre Gustavo Guerrero Farelo.*

*A mis hermanos Iván Guerrero Gómez y Mario Guerrero Gómez.*

*A la Universidad Francisco de Paula Santander Seccional Ocaña.*

*A Dios.*

Gustavo Guerrero Gómez

*A la Universidad Francisco de Paula Santander Seccional Ocaña  
por su constante apoyo.*

Nelson Afanador García

*A Dios.*

*A mi familia.*

*A la Universidad Francisco de Paula Santander Seccional Ocaña.*

Romel Jesús Gallardo Amaya



# CONTENIDO

<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	XV
<b>PRÓLOGO</b> .....	XVII
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	XIX
<b>CAPÍTULO 1. PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES</b> .....	1
1.1. Módulo de elasticidad .....	1
1.2. Esfuerzo.....	2
1.3. Deformación unitaria.....	2
1.4. Caso de estudio 1 .....	2
<b>CAPÍTULO 2. DEFORMACIÓN DE ELEMENTOS SOMETIDOS</b>	
<b>A CARGA AXIAL</b> .....	11
2.1. Caso de estudio 2.....	13
2.2. Caso de estudio 3.....	30

<b>CAPÍTULO 3. ESFUERZOS EN ELEMENTOS ELÁSTICOS CARGADOS</b>	
<b>AXIALMENTE</b> .....	41
3.1. Distribución de esfuerzos en elementos elásticos cargados axialmente. ....	41
3.2. Esfuerzos en secciones inclinadas de elementos elásticos cargados axialmente .....	43
3.3. Caso de estudio 4 .....	45
3.4. Esfuerzo admisible.....	48
3.5. Caso de estudio 5 .....	48
<b>CAPÍTULO 4. CONDICIÓN CINEMÁTICA O CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD</b> .....	55
4.1. Caso de estudio 6.....	55
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	79
<b>ANEXOS</b> .....	81
Anexo 1. Datos ensayo de compresion en ladrillos macizos .....	83
Anexo 2. Diagrama fuerza vs tiempo en las muestras .....	88
Anexo 3. Fuerza vs deformación en las muestras.....	91
Anexo 4. Esfuerzo vs deformación en las muestras .....	96
<b>EPÍLOGO</b> .....	101
<b>GLOSARIO</b> .....	102

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Proceso de secado de las muestras en el horno mufla.....	4
Figura 2. Proceso de enfriamiento de las muestras.....	4
Figura 3. Refrentado de las muestras .....	5
Figura 4. Compresión de las muestras.....	5
Figura 5. Diagrama esfuerzo deformación para la muestra 1.....	6
Figura 6. Diagrama esfuerzo deformación para la muestra 2.....	7
Figura 7. Diagrama esfuerzo deformación para la muestra 3.....	7
Figura 8. Diagrama esfuerzo deformación para la muestra 4.....	8
Figura 9. Diagrama esfuerzo deformación para la muestra 5.....	8
Figura 10. Resistencia a la compresión en las muestras.....	9
Figura 11. Esquema general de la estructura .....	13
Figura 12. Configuración de la estructura.....	14
Figura 13. Diagrama de cuerpo libre del nudo A .....	15
Figura 14. Diagrama de cuerpo libre del nudo B.....	17
Figura 15. Diagrama de cuerpo libre del nudo G .....	20
Figura 16. Diagrama de cuerpo libre del nudo C .....	21
Figura 17. Diagrama de cuerpo libre del nudo E.....	23
Figura 18. Diagrama de cuerpo libre la masa suspendida I.....	25

Figura 19. Diagrama de cuerpo libre del nudo I.....	26
Figura 20. Diagrama de cuerpo libre la masa suspendida H .....	27
Figura 21. Diagrama de cuerpo libre del nudo H.....	28
Figura 22. Diagrama de cuerpo libre del elemento elástico con cargas externas.....	31
Figura 23. Secciones que realizar a los segmentos del elemento elástico ....	31
Figura 24. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 1-1 .....	32
Figura 25. Diagrama de cuerpo libre del elemento elástico .....	33
Figura 26. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 1-1 .....	34
Figura 27. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 2-2 .....	35
Figura 28. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 2-2 .....	36
Figura 29. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 3-3.....	37
Figura 30. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 3-3 .....	38
Figura 31. Fuerzas axiales en la barra.....	41
Figura 32. Sección a realizar en la barra .....	42
Figura 33. Distribución de esfuerzo normal .....	42
Figura 34. Sección inclinada a realizar en la barra .....	43
Figura 35. Diagrama de cuerpo libre de la barra al realizar un corte para un ángulo en sentido manecillas del reloj .....	43
Figura 36. Componentes de la fuerza interna .....	44
Figura 37. Esfuerzos en un plano inclinado .....	44
Figura 38. Aplicación de fuerza axial en la barra.....	45
Figura 39. Diagrama de cuerpo libre de la barra al realizar un corte para un ángulo de 45° manecillas del reloj .....	46
Figura 40. Componentes de la fuerza interna .....	46
Figura 41. Esfuerzos en el plano inclinado.....	47
Figura 42. Geometría de la estructura .....	48
Figura 43. Configuración y aplicación de fuerzas en la estructura .....	49
Figura 44. Diagrama de cuerpo libre de la estructura con cargas externas e internas .....	49
Figura 45. Análisis estático del nudo E.....	50

Figura 46. Método de secciones en la estructura.....	51
Figura 47. Sistema indeterminado.....	55
Figura 48. Diagrama de cuerpo libre del elemento elástico con cargas externas 56	
Figura 49. Diagrama de cuerpo libre del elemento elástico con cargas externas e internas .....	56
Figura 50. Principio de superposición aplicado al elemento elástico .....	57
Figura 51. Principio de superposición aplicado al elemento elástico .....	58
Figura 52. Secciones a realizar a los subsistemas del elemento elástico .....	59
Figura 53. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 1-1 al subsistema I.....	60
Figura 54. Diagrama de cuerpo libre del subsistema I.....	60
Figura 55. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 1-1 del subsistema I .....	61
Figura 56. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 2-2 del subsistema I .....	62
Figura 57. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 2-2 del subsistema I .....	63
Figura 58. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 3-3 del subsistema I .....	64
Figura 59. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 3-3 del subsistema I .....	64
Figura 60. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 4-4 del subsistema II.....	66
Figura 61. Diagrama del cuerpo libre del subsistema II.....	67
Figura 62. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 4-4 del subsistema II.....	68
Figura 63. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 5-5 .....	69
Figura 64. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 5-5 del subsistema II.....	70
Figura 65. Diagrama de cuerpo libre del elemento elástico .....	72
Figura 66. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del segmento AD .....	72
Figura 67. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del segmento AD .....	73
Figura 68. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del segmento DB.....	74

Figura 69. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del segmento DB.....	75
Figura 70. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del segmento BC.....	76
Figura 71. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del segmento BC.....	76
Figura 72. Muestra 1 .....	83
Figura 73. Muestra 2.....	84
Figura 74. Muestra 3.....	85
Figura 75. Muestra 4.....	86
Figura 76. Muestra 5.....	87
Figura 77. Diagrama de fuerza - tiempo para la muestra 1.....	88
Figura 78. Diagrama de fuerza - tiempo para la muestra 2.....	88
Figura 79. Diagrama de fuerza - tiempo para la muestra 3.....	89
Figura 80. Diagrama de fuerza - tiempo para la muestra 4.....	89
Figura 81. Diagrama de fuerza - tiempo para la muestra 5.....	90

# ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.	Dimensiones de las muestras de ladrillo.....	3
Tabla 2.	Resultados ensayo resistencia a la compresión en las muestras de ladrillera La Palma.....	9
Tabla 3.	Fuerzas en las barras.....	29
Tabla 4.	Muestras de fuerza vs deformación.....	91
Tabla 5.	Muestras de deformación vs esfuerzo.....	96



# LISTA DE SÍMBOLOS

- A: Área
- b: Ancho
- C: Centroide
- d: Diámetro
- E: Módulo de elasticidad
- $f_{cp}$ : Resistencia a la compresión
- F: Fuerza
- FS: Factor de seguridad
- g: Aceleración de la gravedad
- G: Módulo de rigidez, centro de gravedad
- h: Altura
- H: Fuerza
- i, j, k: Vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados
- I: Momento de inercia
- L: Longitud
- m: Masa
- M: Momento flector
- O: Origen de coordenadas

P: Fuerza

r: Radio

R: Fuerza resultante; vector resultante

t: Espesor

V: Fuerza cortante

w: Carga por unidad de longitud

W: Peso; carga

x, y, z: Coordenadas rectangulares, distancia, desplazamientos

$\delta$ : Deformación; desplazamiento

$\theta$ : Pendiente

$\sigma$ : Esfuerzo



# PRÓLOGO

El libro hace énfasis en aplicaciones, solución de problemas y diseño de barras estructurales y de sistemas determinados e indeterminados, buscando proporcionar a los estudiantes de ingeniería los principios y conceptos de resistencia de materiales, tales como: esfuerzo, deformación, propiedades mecánicas, desplazamientos y análisis de sistemas estáticamente indeterminados.

Los problemas modelo que se solucionan se presentan de manera lógica y se acompañan de diagramas de cuerpo libre para determinar las fuerzas internas o externas aplicadas al elemento elástico, que conducirán a una mayor interpretación. Antes de darle solución a los problemas se da un pequeño repaso a algunos temas de asignaturas anteriores, como álgebra, cálculo y estática.

Los problemas se han organizado en orden ascendente de dificultad y algunos presentan situaciones reales de la práctica de la ingeniería, que estimulan el interés por parte del estudiante, partiendo de una descripción física para que puedan realizar un modelo o una representación simbólica, desarrollando en los estudiantes capacidades de abstracción, habilidades de representación y comprensión de los principios de resistencia de materiales.



# INTRODUCCIÓN

El propósito del libro es brindar los conocimientos para que el estudiante analice, diseñe y determine los esfuerzos y deformaciones que se presentan en estructuras, marcos y máquinas bajo la acción de cargas.

En el primer capítulo se analizan unas muestras de ladrillos macizos fabricados en la ladrillera La Palma, ubicada en el municipio de Ocaña, Norte de Santander, a las cuales se les realiza un ensayo de compresión según lo establece la Norma Técnica Colombiana (NTC) 4017/2005, noviembre 30, 2015, *Métodos para muestreo y ensayos de unidades de mampostería y otros productos de arcilla*, Colombia., con el objeto de determinar la resistencia a la compresión y establecer una comparación con la normatividad colombiana existente.

En el segundo capítulo se define el esfuerzo normal y la deformación por carga aplicada en el centro de la sección transversal de un elemento elástico.

En el capítulo tres se analiza una sección de un elemento elástico, formando un ángulo con un plano normal bajo la aplicación de dos fuerzas axiales, en el que actuarán dos componentes de fuerza perpendicular y paralela al plano de corte, los cuales producirán un esfuerzo normal y un esfuerzo cortante y el uso del factor de seguridad para el cálculo de la carga permisible en un elemento elástico de una estructura.

En el último capítulo se analizarán situaciones indeterminadas y para ello se tuvo en cuenta la condición cinemática o condición de compatibilidad, aplicando el principio de superposición al elemento elástico indeterminado.

## CAPÍTULO 1

# PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES

La resistencia de materiales “estudia las relaciones entre las cargas externas aplicadas a un cuerpo deformable y la intensidad de las fuerzas internas que actúan dentro del cuerpo” (Hibbeler, 2010, p. 2).

En el diseño de estructuras, marcos y máquinas es necesario conocer cómo es el comportamiento mecánico de los materiales cuando se someten a cargas, y para ello es necesario someter los elementos elásticos a ensayos de laboratorio, por lo que se utiliza una máquina universal donde se realizan ensayos de tensión, compresión y flexión a las probetas con el fin de determinar las propiedades de los materiales de los que están hechas estas. “El espécimen de prueba se instala entre dos sujetadores grandes de la máquina y a continuación se carga” (Gere, 1998, p. 11), produciendo un alargamiento. Dichos resultados se representan en una gráfica denominada ‘esfuerzo vs deformación unitaria’, donde la abscisa representa la deformación y la ordenada representa el esfuerzo.

Los materiales dúctiles se deforman a medida que aumenta la carga que se aplica en ellos, al inicio su deformación varía linealmente y luego sufren grandes deformaciones hasta llegar a la resistencia a la fractura.

### 1.1. Módulo de elasticidad

El esfuerzo  $\sigma$  es directamente proporcional a la deformación  $\epsilon$ , y puede escribirse:

$$\sigma = E \epsilon$$

El módulo de elasticidad o módulo de Young, E, tiene unidades de esfuerzo.

## 1.2. Esfuerzo

La fuerza por unidad de área se llama esfuerzo y su magnitud se encuentra al realizar el cociente entre la carga y el área que resiste la carga.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

El esfuerzo  $\sigma$  se expresa en  $\frac{N}{m^2}$ . Esta unidad se denomina ‘pascal’ (Pa). Sin embargo, el pascal es una unidad muy pequeña. Deben emplearse múltiplos de esta unidad.

$$1\text{kPa} = 10^3\text{Pa} = 10^3 \frac{N}{m^2}$$

$$1\text{MPa} = 10^6\text{Pa} = 10^6 \frac{N}{m^2}$$

$$1\text{GPa} = 10^9\text{Pa} = 10^9 \frac{N}{m^2}$$

Las unidades en Estados Unidos se presentan en libras por pulgada cuadrada (psi).

## 1.3. Deformación unitaria

“El valor de la deformación unitaria es el cociente del alargamiento o deformación total y la longitud en la que se ha producido” (Pytel y Singer, 1994, p. 28).

En el diagrama ‘esfuerzo vs deformación unitaria’, la primera parte es una línea recta; en este punto el esfuerzo se denomina límite proporcional y “a medida que se incrementa continuamente la carga sobre la muestra, se llega a un punto que se conoce como límite elástico” (Mott, 1996, p. 49).

## 1.4. Caso de estudio 1

A unas muestras de ladrillo común fabricadas en la ladrillera La Palma ubicada en el municipio de Ocaña, Norte de Santander, se les realiza un ensayo de compresión a temperatura ambiente. Determinar la resistencia a la compresión de las muestras.

Debido a la no uniformidad en las dimensiones de las muestras se tomaron tres mediciones a las dimensiones de las muestras. Véase la Tabla 1.

Tabla 1. Dimensiones de las muestras de ladrillo

Muestra No.	Ancho (cm)	Largo (cm)	Alto (cm)
1	10,70	18,50	6,50
	10,60	18,70	6,50
	10,70	18,60	6,50
<b>Promedio</b>	<b>10,66</b>	<b>18,60</b>	<b>6,50</b>
2	10,80	20,00	6,20
	11	19,80	5,80
	11	20	6
<b>Promedio</b>	<b>10,93</b>	<b>19,93</b>	<b>6</b>
3	10,80	20,00	6,20
	11	19,80	5,8
	11	20	6
<b>Promedio</b>	<b>10,93</b>	<b>19,93</b>	<b>6</b>
4	10,80	19,80	6,50
	10,70	19,50	6,70
	11	19,50	6,50
<b>Promedio</b>	<b>10,83</b>	<b>19,60</b>	<b>6,56</b>
5	10	19,70	6,50
	9,8	19,50	6,30
	9,5	20	6,10
<b>Promedio</b>	<b>9,70</b>	<b>19,73</b>	6,30

Fuente: elaboración propia.

Para el estudio se seleccionaron y prepararon cinco muestras de ladrillos según lo establece la NTC-4017/2005, noviembre 30 de 2005, *Métodos para muestreo y ensayos de unidades de mampostería y otros productos de arcilla*, con el objeto de determinar la resistencia a la compresión y establecer una comparación con la normatividad colombiana existente.

Para el ensayo de compresión se utilizó una máquina universal de ensayos tipo Pinzuar PU-100 y el *software* estadístico *Statgraphics*. El ensayo consistió en llevar las muestras hasta la falla y registrar la carga de rotura para determinar el esfuerzo de compresión máximo.

La preparación de las muestras inicia con el secado de estas en un horno mufla durante 24 horas a una temperatura entre 110 °C y 115 °C (véase la Figura 1), hasta que en dos pesajes sucesivos a las muestras a intervalos de dos horas no se presente una pérdida de masa superior al 0,20 % del último peso.

**Figura 1. Proceso de secado de las muestras en el horno mufla**



Fuente: elaboración propia.

Después del proceso de secado de las muestras, estas se introducen durante cuatro horas en una cámara de enfriamiento que contiene agua a una temperatura de  $24 \pm 8$  °C y humedad entre el 30 % y 70 %. Véase la Figura 2.

**Figura 2. Proceso de enfriamiento de las muestras**



Fuente: elaboración propia.

Después de enfriadas las muestras se procede a refrentar o alizar las superficies de las caras opuestas de las muestras con yeso de secado (ver la Figura 3) para homogeneizarlas y poder lograr uniformidad al aplicar la carga aplicada por la máquina universal.

**Figura 3. Refrentado de las muestras**

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, se llevan las muestras a la máquina universal con capacidad de 1000 KN, y se les va aplicando carga en el área de contacto con una velocidad 0,50 MPa/s, hasta llevarlas a la falla. Véase la Figura 4.

**Figura 4. Figura 4. Compresión de las muestras**

Fuente: elaboración propia.

Para cada una de las muestras ensayadas, la máquina universal suministra la gráfica de fuerza aplicada a la muestra vs tiempo (véase el Anexo 1 y 2). En la que registra el valor de la carga máxima de rotura, además registra para cada fuerza aplicada la deformación correspondiente, (véase el Anexo 3).

Para la determinación de la resistencia a la compresión en cada muestra, se utilizó la siguiente expresión:

$$f'_{cp} = \frac{W}{A}$$

Donde:

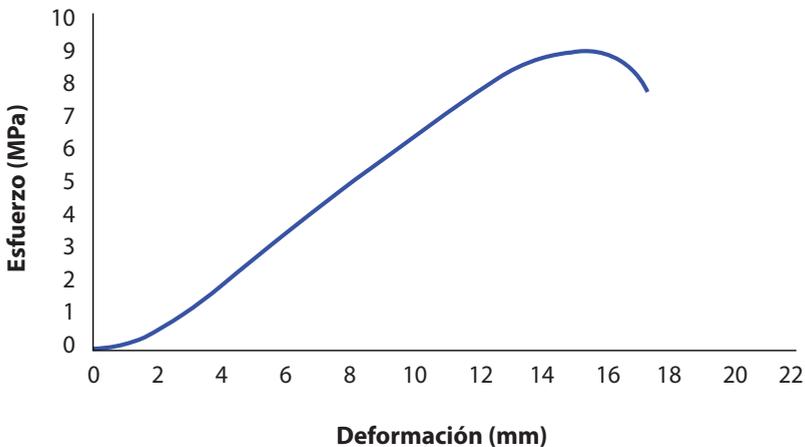
$f'_{cp}$  = Resistencia de la muestra a la compresión en (MPa).

W = Carga máxima de rotura en (N).

A = Promedio del área entre las superficies superior e inferior de la muestra en (mm<sup>2</sup>).

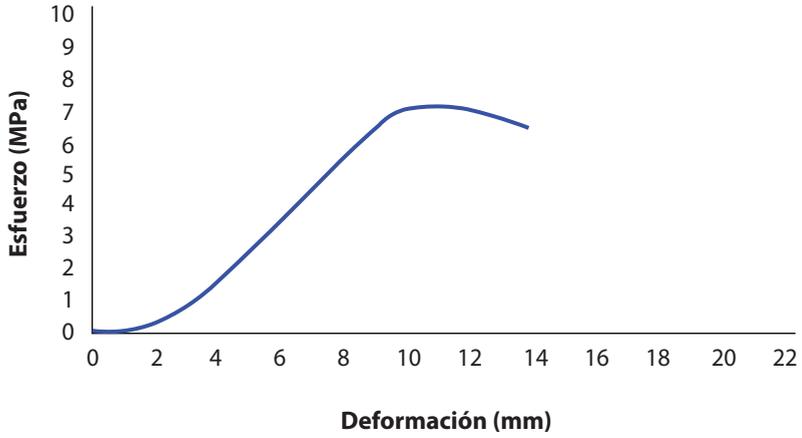
Los resultados obtenidos en el ensayo resistencia a la compresión para cada una de las muestras se observan en el Anexo 3 y en las figuras 5, 6, 7, 8 y 9.

**Figura 5. Diagrama esfuerzo deformación para la muestra 1**



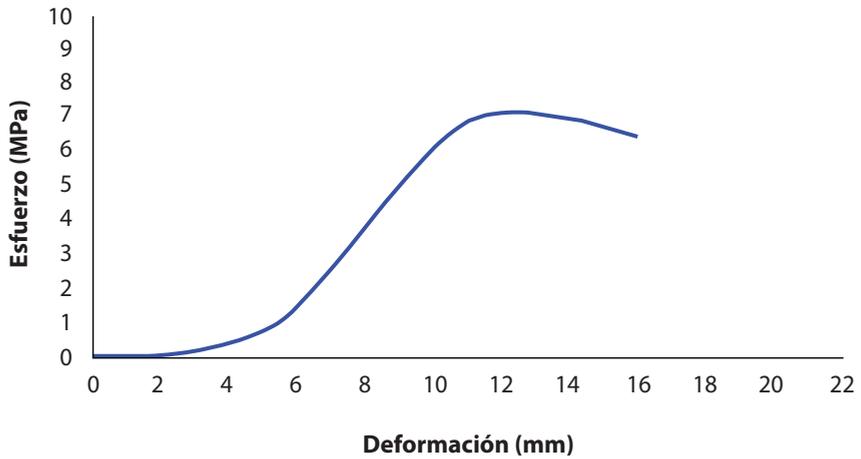
Fuente: elaboración propia.

**Figura 6. Diagrama esfuerzo deformación para la muestra 2**

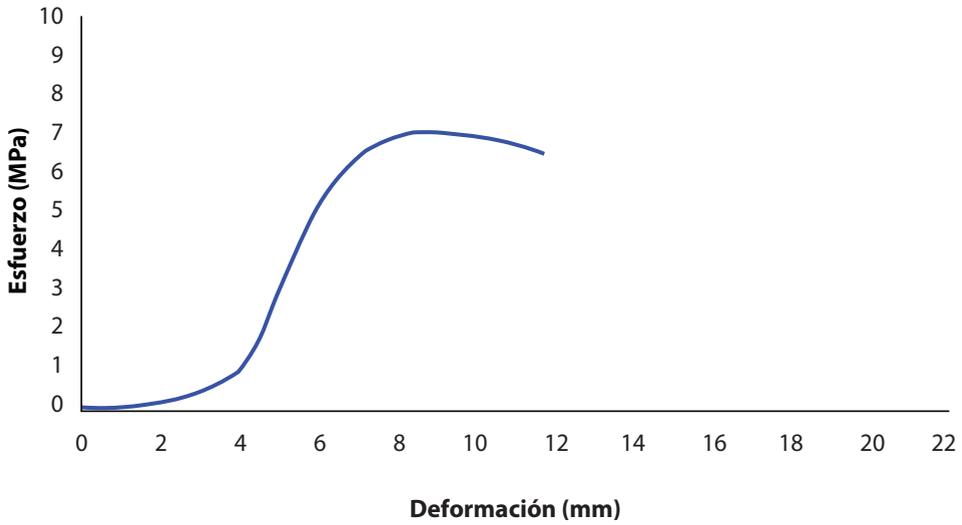


Fuente: elaboración propia.

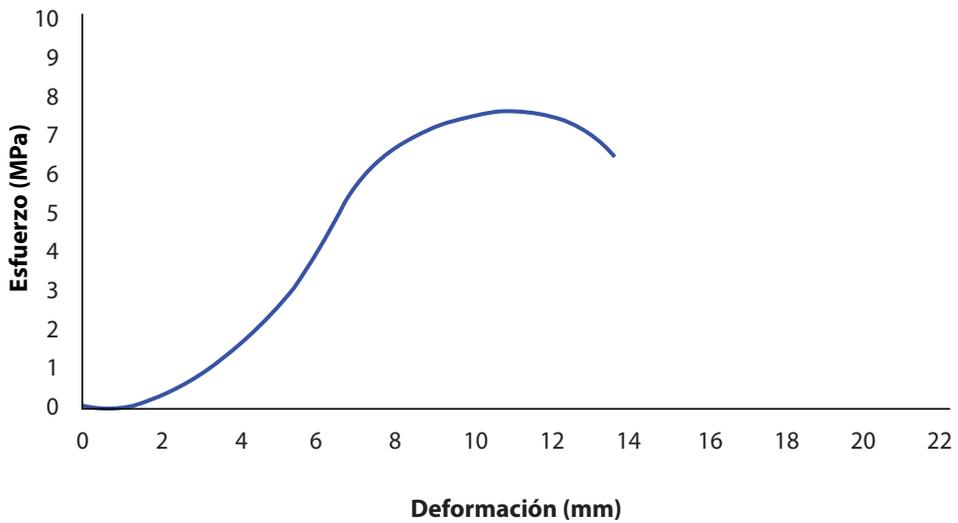
**Figura 7. Diagrama esfuerzo deformación para la muestra 3**



Fuente: elaboración propia.

**Figura 8. Diagrama esfuerzo deformación para la muestra 4**

Fuente: elaboración propia.

**Figura 9. Diagrama esfuerzo deformación para la muestra 5**

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 2 se muestra el área, la carga máxima, la resistencia a la compresión en las muestras, y la resistencia promedio de las cinco muestras.

**Tabla 2. Resultados ensayo resistencia a la compresión en las muestras de ladrillera La Palma**

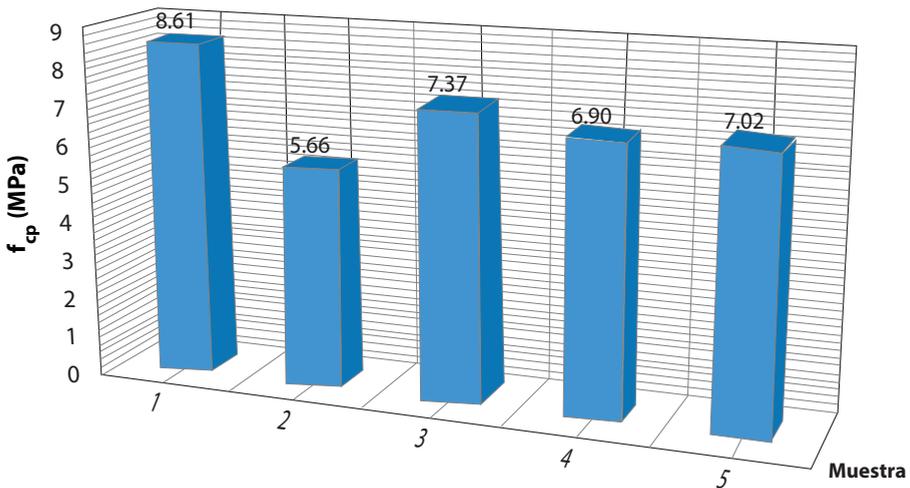
LADRILLERA	MUESTRA No.	ÁREA A (m <sup>2</sup> )	CARGA MÁXIMA W (N)	RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN f <sub>cp</sub> (MPa)	RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN PROMEDIO f <sub>cp</sub> (MPa)
La Palma	1	0,0198	170,57	8,61	7,11
	2	0,0218	123,38	5,66	
	3	0,0218	160,60	7,37	
	4	0,0212	146,21	6,90	
	5	0,0191	133,99	7,02	

Fuente: elaboración propia.

La resistencia a la compresión en las muestras se muestra en la Figura 10.

**Figura 10. Resistencia a la compresión en las muestras**

**Ensayo ladrillera La Palma**



Fuente: elaboración propia.

La resistencia a la compresión en las muestras de ladrillo macizo, tiene una variación en la resistencia que oscila entre 5,66 MPa a 8,61 MPa y un valor promedio de 7,11 MPa inferior a lo establecido por la norma, que es un valor igual a 14 MPa y su restricción de usar solo el 80 % de esta resistencia, es decir, 11,2 MPa, lo que indica el alto grado de vulnerabilidad a la compresión en muros de ladrillo macizo usado principalmente en viviendas construidas mediante el sistema de resistencia sísmica de mampostería confinada.

Los ladrillos de mampostería no estructural producidos en la ladrillera La Palma para este análisis no cumplen los requisitos establecidos en la NTC 4205/2000, octubre 25 del 2000, *Unidades de mampostería de arcilla cocida, ladrillos y bloques cerámicos las resistencias establecidas para Colombia.*

## CAPÍTULO 2

# DEFORMACIÓN DE ELEMENTOS SOMETIDOS A CARGA AXIAL

Se debe considerar una varilla homogénea de longitud  $L$  y sección transversal uniforme de área  $A$  sujeta a una carga axial centrada  $P$ . Si el esfuerzo axial resultante  $\sigma = \frac{P}{A}$  no excede el límite de proporcionalidad del material, se aplica la ley de Hooke y se encuentra:

$$\sigma = E \epsilon$$

Es necesario recordar que “la deformación o alargamiento unitario se calcula en función de la fatiga y del módulo de elasticidad del material” (Timoshenko, 1957, p. 4).

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Reemplazando el esfuerzo normal se tiene:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

La deformación o alargamiento unitario  $\epsilon$  es:

$$\epsilon = \frac{P}{AE}$$

La deformación o alargamiento unitario  $\epsilon$  se definió como:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

La deformación por carga es:

$$\delta = \epsilon L$$

Al sustituir la expresión de la deformación o alargamiento unitario en la expresión de la deformación por carga, se encuentra:

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

La ecuación de la deformación por carga se usará si el elemento elástico es isotrópico y tiene una sección transversal uniforme. Si la varilla está cargada en otros puntos o si consta de varios segmentos con distintas secciones transversales, debe dividirse en partes que satisfagan de manera individual.

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

En el caso de un elemento elástico de sección transversal variable la deformación unitaria  $\epsilon$  depende de la posición y se define como:

$$\epsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

Despejando el diferencial de deformación total por carga  $d\delta$  y sustituyendo la deformación unitaria, la deformación de un elemento de longitud  $dx$  es:

$$d\delta = \epsilon dx$$

$$d\delta = \frac{P dx}{AE}$$

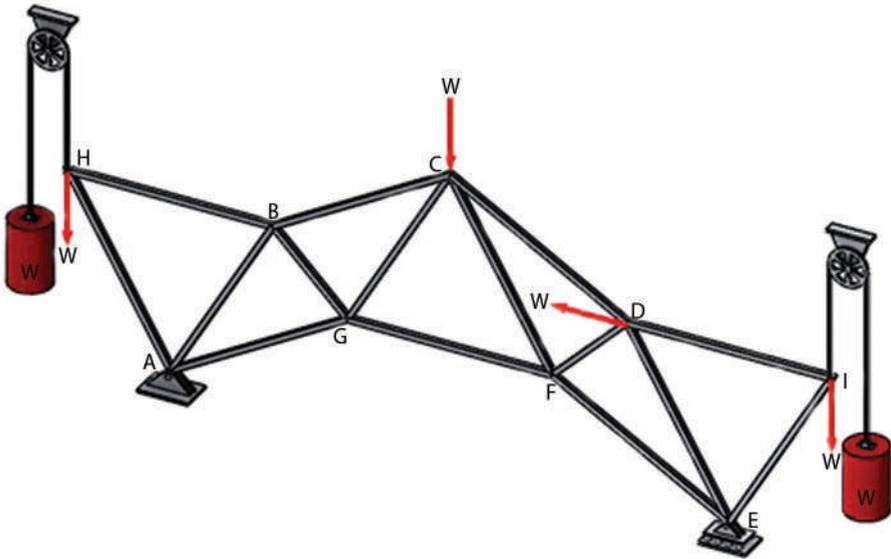
La deformación total por carga  $\delta$  del elemento elástico se obtiene al integrar la expresión:

$$\delta = \int_0^L \frac{P dx}{AE}$$

## 2.1. Caso de estudio 2

Para encontrar los esfuerzos en todas las barras de la armadura, en términos de  $W$  y el valor de la carga  $W$  aplicada a la estructura, véase la Figura 11. Todas las barras tienen una longitud  $L$ , un área de  $0,20 \text{ pulg}^2$ , un esfuerzo máximo compresivo de  $15 \text{ ksi}$  y un esfuerzo máximo tensionante de  $10 \text{ ksi}$ .

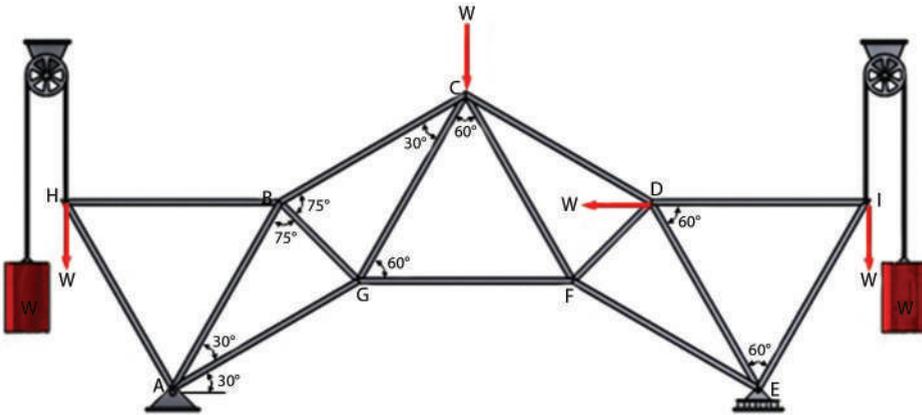
Figura 11. Esquema general de la estructura



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 12 se muestra que la estructura geoméricamente, y como se encuentra cargada, se halla contenida en un plano.

Figura 12. Configuración de la estructura



Fuente: elaboración propia.

Las reacciones de la estructura se determinan utilizando las ecuaciones de equilibrio.

Al aplicar la ecuación de equilibrio de momentos para la estructura se tiene:

$$\begin{aligned}
 +\curvearrowright \Sigma M_A &= 0 \\
 -(W) * (L \cos 30^\circ + L \cos 60^\circ) + (W) * (L \operatorname{sen} 60^\circ) + (E_Y) \\
 &* (L \cos 30^\circ + L + L \cos 30^\circ) = 0 \\
 -\frac{\sqrt{3}}{2}WL - \frac{1}{2}WL + \frac{\sqrt{3}}{2}WL + \frac{\sqrt{3}}{2}LE_Y + LE_Y + \frac{\sqrt{3}}{2}LE_Y &= 0 \\
 WL \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = LE_Y \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 \frac{1}{2}W &= E_Y(\sqrt{3} + 1) \\
 E_Y &= \frac{\frac{1}{2}W}{(\sqrt{3} + 1)} \\
 E_Y &= 0,18W
 \end{aligned}$$

El signo positivo de la fuerza vertical que le ejerce el rodillo E a la estructura indica que el sentido asumido para ella es correcto.

Si se utiliza la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales para la estructura a lo largo del eje x, se encuentra:

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_X &= 0 \\ A_X - W &= 0 \\ A_X &= W \end{aligned}$$

Se emplea la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales para la estructura a lo largo del eje Y.

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\ A_Y - W + E_Y &= 0 \end{aligned}$$

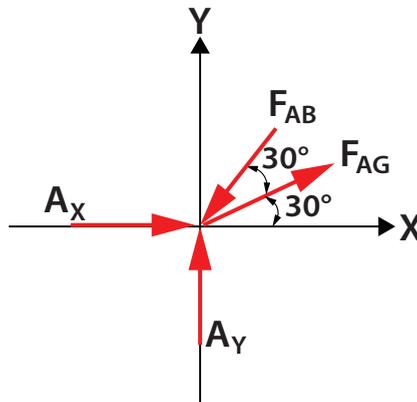
Se sustituye la componente de fuerza vertical que le ejerce el rodillo E a la estructura y se logra:

$$\begin{aligned} A_Y - W + 0,18W &= 0 \\ A_Y &= 0,82W \end{aligned}$$

Para determinar las fuerzas internas en cada barra se realiza un análisis estático a cada nudo de la estructura.

Se realiza el análisis estático del nudo A y en la Figura 13 pueden verse las fuerzas que actúan en el nudo A.

**Figura 13. Diagrama de cuerpo libre del nudo A**



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del nudo A, y al usar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje x, se tiene:

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_X &= 0 \\ W + F_{AG} \cos 30^\circ - F_{AB} \cos 60^\circ &= 0 \end{aligned}$$

Del diagrama de cuerpo libre del nudo A, y al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se encuentra:

$$+\uparrow \Sigma F_Y = 0$$

$$A_Y + F_{AG} \text{ sen } 30^\circ - F_{AB} \text{ sen } 60^\circ = 0$$

Se sustituye el componente de fuerza vertical que le ejerce la articulación A a la estructura y se logra:

$$0,82W + F_{AG} \text{ sen } 30^\circ - F_{AB} \text{ sen } 60^\circ = 0$$

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales al aplicar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X e Y, con incógnitas  $F_{AG}$  y  $F_{AB}$ , se usa el método de sustitución de términos.

De la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X, se expresa la fuerza en la barra  $F_{AB}$  en términos de la fuerza en la barra  $F_{AG}$ .

$$W + F_{AG} \cos 30^\circ - F_{AB} \cos 60^\circ = 0$$

$$F_{AB} \cos 60^\circ = W + F_{AG} \cos 30^\circ$$

$$F_{AB} = \frac{W + F_{AG} \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}$$

Al reemplazar la expresión de la fuerza en la barra  $F_{AB}$  en términos de la fuerza en la barra  $F_{AG}$ , en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se obtiene:

$$0,82W + F_{AG} \text{ sen } 30^\circ - F_{AB} \text{ sen } 60^\circ = 0$$

$$0,82W + F_{AG} \text{ sen } 30^\circ - \left( \frac{W + F_{AG} \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} \right) \text{ sen } 60^\circ = 0$$

$$0,82W + F_{AG} \text{ sen } 30^\circ - \frac{W \text{ sen } 60^\circ}{\cos 60^\circ} - \frac{F_{AG} \cos 30^\circ \text{ sen } 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 0$$

$$0,82W + \frac{1}{2} F_{AG} - \frac{W \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{F_{AG} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 0$$

$$0,82W + \frac{F_{AG}}{2} - \sqrt{3} W - \frac{3F_{AG}}{2} = 0$$

$$\frac{F_{AG}}{2} - \frac{3F_{AG}}{2} = \sqrt{3} W - 0,82W$$

$$-F_{AG} = \sqrt{3} W - 0,82W$$

$$F_{AG} = -0,92W$$

El signo negativo para la fuerza en la barra  $F_{AG}$  indica que el sentido asumido en tensión para ella no es correcto, por lo que la barra se encuentra sometida a compresión.

$$F_{AG} = 0,92W \text{ (C)}$$

Reemplazando la fuerza en la barra  $F_{AG}$  en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X, se tiene:

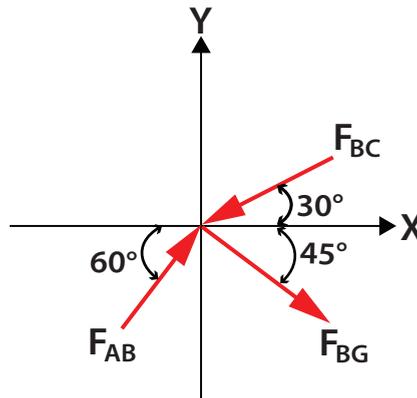
$$\begin{aligned} W + F_{AG} \cos 30^\circ - F_{AB} \cos 60^\circ &= 0 \\ W + (-0,92W) \cos 30^\circ - F_{AB} \cos 60^\circ &= 0 \\ W - 0,92W \cos 30^\circ - F_{AB} \cos 60^\circ &= 0 \\ F_{AB} \cos 60^\circ &= W - 0,92W \cos 30^\circ \\ F_{AB} &= \frac{W - 0,92W \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} \\ F_{AB} &= \frac{W - 0,92W \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \\ F_{AB} &= 2W - 1,59W \\ F_{AB} &= 0,41W \end{aligned}$$

El signo positivo para la fuerza en la barra  $F_{AB}$  indica que el sentido asumido en compresión para ella es correcto.

$$F_{AB} = 0,41 W \text{ (C)}$$

Se realiza el análisis estático del nudo B y en la Figura 14 pueden verse las fuerzas que actúan en el nudo B.

**Figura 14. Diagrama de cuerpo libre del nudo B**



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del nudo B, y si se utiliza la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X, se tiene:

$$\rightarrow \sum F_X = 0$$

$$F_{AB} \cos 60^\circ + F_{BG} \cos 45^\circ - F_{BC} \cos 30^\circ = 0$$

Al reemplazar la fuerza interna en la barra  $F_{AB}$  en la ecuación de fuerzas a lo largo del eje X, se encuentra:

$$0,41W \cos 60^\circ + F_{BG} \cos 45^\circ - F_{BC} \cos 30^\circ = 0$$

Del diagrama de cuerpo libre del nudo B y al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se tiene:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$F_{AB} \sin 60^\circ - F_{BG} \sin 45^\circ - F_{BC} \sin 30^\circ = 0$$

Al reemplazar la fuerza interna en la barra  $F_{AB}$  en la ecuación de fuerzas a lo largo del eje Y, se logra:

$$0,41W \sin 60^\circ - F_{BG} \sin 45^\circ - F_{BC} \sin 30^\circ = 0 \quad (4)$$

Se hace uso del método de sustitución de términos para dar solución al sistema de ecuaciones lineales al aplicar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X e Y, con incógnitas  $F_{BG}$  y  $F_{BC}$ .

De la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X se expresa la fuerza en la barra  $F_{BG}$  en términos de la fuerza en la barra  $F_{BC}$ .

$$0,41W \cos 60^\circ + F_{BG} \cos 45^\circ - F_{BC} \cos 30^\circ = 0$$

$$F_{BG} \cos 45^\circ = F_{BC} \cos 30^\circ - 0,41W \cos 60^\circ$$

$$F_{BG} = \frac{F_{BC} \cos 30^\circ - 0,41W \cos 60^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$F_{BG} = \frac{F_{BC} \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,41W \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$F_{BG} = \frac{\sqrt{3}F_{BC}}{\sqrt{2}} - 0,29W$$

$$F_{BG} = \frac{\sqrt{6}F_{BC}}{2} - 0,29W$$

Si se sustituye la expresión de la fuerza en la barra  $F_{BG}$  en términos de la fuerza en la barra  $F_{BC}$ , en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se logra:

$$0,41W \operatorname{sen} 60^\circ - F_{BG} \operatorname{sen} 45^\circ - F_{BC} \operatorname{sen} 30^\circ = 0$$

$$0,41W \operatorname{sen} 60^\circ - \left( \frac{\sqrt{6}F_{BC}}{2} - 0,29W \right) \operatorname{sen} 45^\circ - F_{BC} \operatorname{sen} 30^\circ = 0$$

$$0,41W \frac{\sqrt{3}}{2} - \left( \frac{\sqrt{6}F_{BC}}{2} - 0,29W \right) \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{F_{BC}}{2} = 0$$

$$0,36W - \frac{\sqrt{3}F_{BC}}{2} + 0,21W - \frac{F_{BC}}{2} = 0$$

$$1,37F_{BC} = 0,57W$$

$$F_{BC} = \frac{0,57W}{1,37}$$

$$F_{BC} = 0,42W$$

El signo positivo para la fuerza en la barra  $F_{BC}$  indica que el sentido asumido en compresión para ella es correcto.

$$F_{BC} = 0,42W \text{ (C)}$$

Reemplazando la fuerza en la barra  $F_{BC}$  en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X, se tiene:

$$0,41W \cos 60^\circ + F_{BG} \cos 45^\circ - F_{BC} \cos 30^\circ = 0$$

$$0,41W \cos 60^\circ + F_{BG} \cos 45^\circ - 0,42W \cos 30^\circ = 0$$

$$0,41W \frac{1}{2} + F_{BG} \frac{\sqrt{2}}{2} - 0,42W \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$0,21W + \frac{\sqrt{2}F_{BG}}{2} - 0,36W = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}F_{BG}}{2} = 0,15W$$

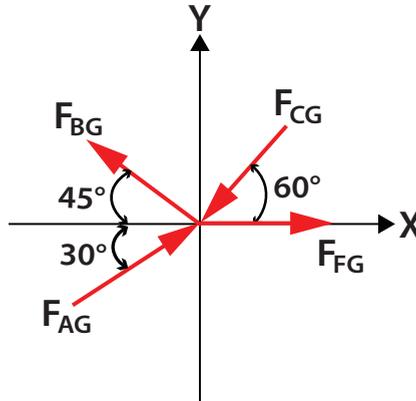
$$F_{BG} = \frac{0,15W}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$F_{BG} = 0,22W \text{ (T)}$$

El signo positivo para la fuerza en la barra  $F_{BG}$  indica que el sentido asumido en tensión para ella es correcto.

Se realiza el análisis estático del nudo G y en la Figura 15 pueden verse las fuerzas que actúan en el nudo G.

Figura 15. Diagrama de cuerpo libre del nudo G



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del nudo G y, al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje x, se tiene:

$$\rightarrow \sum F_X = 0$$

$$F_{AG} \cos 30^\circ - F_{BG} \cos 45^\circ - F_{GC} \cos 60^\circ + F_{GF} = 0$$

Reemplazando las fuerzas de las barras  $F_{AG}$ ,  $F_{BG}$  y  $F_{GC}$  en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X se logra:

$$(0,92W) * \cos 30^\circ - (0,22W) * \cos 45^\circ - (0,7W) * \cos 60^\circ + F_{GF} = 0$$

$$0,80W - 0,16W - 0,35W + F_{GF} = 0$$

$$F_{GF} = 0,29W \text{ (T)}$$

El signo positivo para la fuerza en la barra  $F_{GF}$  indica que el sentido asumido en tensión para ella es correcto.

Del diagrama de cuerpo libre del nudo G, y si se usa la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se encuentra:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$F_{AG} \sin 30^\circ + F_{BG} \sin 45^\circ - F_{GC} \sin 60^\circ = 0$$

Al sustituir las fuerzas de las barras  $F_{AG}$ ,  $F_{BG}$  y  $F_{GC}$  en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y se tiene:

$$(0,92W) * \text{sen } 30^\circ + (0,22W) * \text{sen } 45^\circ - F_{GC} \text{sen } 60^\circ = 0$$

$$0,46W + 0,16W - F_{GC} \text{sen } 60^\circ = 0$$

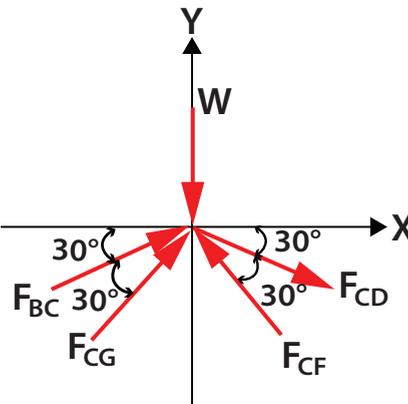
$$F_{GC} = 0,72W$$

El signo positivo para la fuerza en la barra  $F_{GF}$  indica que el sentido asumido en tensión para ella es correcto.

$$F_{GC} = 0,72W \text{ (C)}$$

Se realiza el análisis estático del nudo C y en la Figura 16 pueden verse las fuerzas que actúan en el nudo C.

**Figura 16. Diagrama de cuerpo libre del nudo C**



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del nudo C, y si se usa la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X, se tiene:

$$\rightarrow \sum F_X = 0$$

$$F_{BC} \cos 30^\circ + F_{GC} \cos 60^\circ + F_{CD} \cos 30^\circ - F_{CF} \cos 60^\circ = 0$$

Al sustituir las fuerzas de las barras  $F_{BC}$  y  $F_{GC}$  en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X se logra:

$$(0,42W) * \cos 30^\circ + (0,72W) * \cos 60^\circ + F_{CD} \cos 30^\circ - F_{CF} \cos 60^\circ = 0$$

$$0,36W + 0,36W + F_{CD} \cos 30^\circ - F_{CF} \cos 60^\circ = 0$$

$$0,72W + F_{CD} \cos 30^\circ - F_{CF} \cos 60^\circ = 0$$

Del diagrama de cuerpo libre del nudo C, y al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se encuentra:

$$+\uparrow \Sigma F_Y = 0$$

$$F_{BC} \text{ sen } 30^\circ + F_{GC} \text{ sen } 60^\circ - F_{CD} \text{ sen } 30^\circ + F_{CF} \text{ sen } 60^\circ = 0$$

Al sustituir las fuerzas de las barras  $F_{BC}$  y  $F_{GC}$  en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y se tiene:

$$(0,42W) * \text{sen } 30^\circ + (0,72W) * \text{sen } 60^\circ - F_{CD} \text{ sen } 30^\circ + F_{CF} \text{ sen } 60^\circ - W = 0$$

$$0,21W + 0,62W - F_{CD} \text{ sen } 30^\circ + F_{CF} \text{ sen } 60^\circ - W = 0$$

$$-0,17W - F_{CD} \text{ sen } 30^\circ + F_{CF} \text{ sen } 60^\circ = 0$$

Se debe hacer uso del método por sustitución de términos para dar solución al sistema de ecuaciones lineales de fuerzas a lo largo del eje X e Y con incógnitas  $F_{CD}$  y  $F_{CF}$ .

De la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X, se expresa la fuerza en la barra  $F_{CD}$  en términos de la fuerza en la barra  $F_{CF}$ .

$$0,72W + F_{CD} \cos 30^\circ - F_{CF} \cos 60^\circ = 0$$

$$F_{CD} \cos 30^\circ = F_{CF} \cos 60^\circ - 0,72W$$

$$F_{CD} = \frac{F_{CF} \cos 60^\circ - 0,72W}{\cos 30^\circ}$$

Al reemplazar la expresión de la fuerza en la barra  $F_{CD}$  en términos de la fuerza en la barra  $F_{CF}$  en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y se obtiene:

$$-0,17W - F_{CD} \text{ sen } 30^\circ + F_{CF} \text{ sen } 60^\circ = 0$$

$$-0,17W - \left( \frac{F_{CF} \cos 60^\circ - 0,72W}{\cos 30^\circ} \right) * \text{sen } 30^\circ + F_{CF} \text{ sen } 60^\circ = 0$$

$$-0,17W - \left( \frac{F_{CF} \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} - \frac{0,72W}{\cos 30^\circ} \right) * \text{sen } 30^\circ + F_{CF} \text{ sen } 60^\circ = 0$$

$$-0,17W - \frac{\sqrt{3}F_{CF}}{6} + 0,42W + \frac{\sqrt{3}F_{CF}}{6} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} F_{CF} = -0,25W$$

$$F_{CF} = -\frac{0,25W}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$F_{CF} = -0,43W$$

El signo negativo para la fuerza en la barra  $F_{CF}$  indica que el sentido asumido en compresión para ella no es correcto, por lo que la barra se encuentra sometida a tensión.

$$F_{CF} = 0,43W \text{ (T)}$$

Reemplazando la fuerza en la barra  $F_{CF}$  en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X, se tiene:

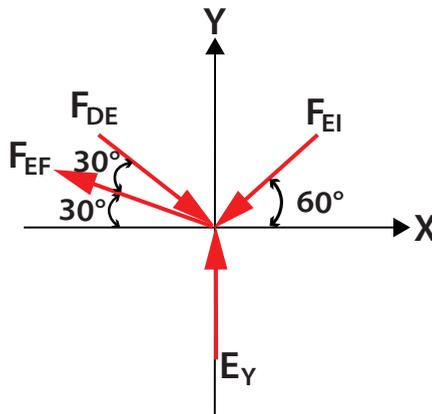
$$\begin{aligned} 0,72W + F_{CD} \cos 30^\circ - F_{CF} \cos 60^\circ &= 0 \\ 0,72W + F_{CD} \cos 30^\circ - (-0,43W) * \cos 60^\circ &= 0 \\ 0,72W + F_{CD} \cos 30^\circ + 0,22W &= 0 \\ F_{CD} \cos 30^\circ &= -0,94W \\ F_{CD} &= \frac{-0,94W}{\cos 30^\circ} \\ F_{CD} &= -1,09W \end{aligned}$$

El signo negativo para la fuerza en la barra  $F_{CD}$  indica que el sentido asumido en tensión para ella no es correcto, por lo que la barra se encuentra sometida a compresión.

$$F_{CD} = 1,09W \text{ (C)}$$

Se realiza el análisis estático del nudo E y en la Figura 17 pueden verse las fuerzas que actúan en el nudo E.

**Figura 17. Diagrama de cuerpo libre del nudo E**



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del nudo E y al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X, se tiene:

$$\begin{aligned} & \rightarrow \sum F_X = 0 \\ & -F_{FE} \cos 30^\circ + F_{DE} \cos 60^\circ = 0 \end{aligned}$$

Del diagrama de cuerpo libre del nudo E y al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se encuentra:

$$\begin{aligned} & +\uparrow \sum F_Y = 0 \\ & F_{FE} \sin 30^\circ - F_{DE} \sin 60^\circ + E_Y = 0 \end{aligned}$$

Se sustituye la componente de fuerza vertical que le ejerce el rodillo E a la estructura y se logra:

$$F_{FE} \sin 30^\circ - F_{DE} \sin 60^\circ + 0,18W = 0$$

Se hace uso del método por sustitución de términos para dar solución al sistema de ecuaciones lineales de fuerzas a lo largo del eje X e Y con incógnitas  $F_{DE}$  y  $F_{FE}$ .

De la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X se expresa la fuerza en la barra  $F_{DE}$  en términos de la fuerza en la barra  $F_{FE}$ .

$$\begin{aligned} -F_{FE} \cos 30^\circ + F_{DE} \cos 60^\circ &= 0 \\ F_{DE} \cos 60^\circ &= F_{FE} \cos 30^\circ \\ F_{DE} &= \frac{F_{FE} \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} \end{aligned}$$

Al reemplazar la expresión de la fuerza en la barra  $F_{DE}$  en términos de la fuerza en la barra  $F_{FE}$  y en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se obtiene:

$$\begin{aligned} F_{FE} \sin 30^\circ - F_{DE} \sin 60^\circ + 0,18W &= 0 \\ F_{FE} \sin 30^\circ - \left( \frac{F_{FE} \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} \right) * \sin 60^\circ + 0,18W &= 0 \\ \frac{F_{FE}}{2} - \frac{3F_{FE}}{2} + 0,18W &= 0 \\ -F_{FE} + 0,18W &= 0 \\ F_{FE} &= 0,18W \end{aligned}$$

El signo positivo para la fuerza en la barra  $F_{FE}$  indica que el sentido asumido en tensión para ella es correcto.

$$F_{FE} = 0,18W \text{ (T)}$$

Reemplazando la fuerza en la barra  $F_{FE}$  en la ecuación se tiene:

$$-F_{FE} \cos 30^\circ + F_{DE} \cos 60^\circ = 0$$

$$-(0,18W) * \cos 30^\circ + F_{DE} \cos 60^\circ = 0$$

$$-0,16W + F_{DE} \cos 60^\circ = 0$$

$$F_{DE} \cos 60^\circ = 0,16W$$

$$F_{DE} = \frac{0,16W}{\cos 60^\circ}$$

$$F_{DE} = 0,32W$$

El signo positivo para la fuerza en la barra  $F_{FE}$  indica que el sentido asumido en tensión para ella es correcto.

$$F_{DE} = 0,32W \text{ (C)}$$

Se realiza el análisis estático de la masa suspendida I y en la Figura 18 pueden verse las fuerzas que actúan la masa suspendida I.

**Figura 18. Diagrama de cuerpo libre la masa suspendida I**



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre de la masa suspendida I y al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se encuentra:

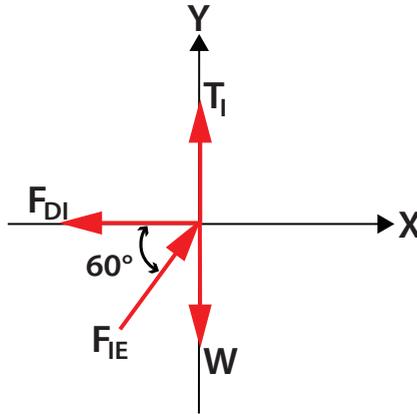
$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$T_I - W = 0$$

$$T_I = W$$

Se realiza el análisis estático del nudo I y en la Figura 19 pueden verse las fuerzas que actúan en este.

**Figura 19. Diagrama de cuerpo libre del nudo I**



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del nudo I, y al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se encuentra:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$T_I - W + F_{IE} \operatorname{sen} 60^\circ = 0$$

Al sustituir la tensión  $T_I$  en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se tiene:

$$W - W + F_{IE} \operatorname{sen} 60^\circ = 0$$

$$F_{IE} \operatorname{sen} 60^\circ = 0$$

$$F_{IE} = \frac{0}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$

$$F_{IE} = 0$$

El valor nulo en la barra  $F_{IE}$  indica que la barra no está sometida a ninguna carga.

Del diagrama de cuerpo libre del nudo I y, al usar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X, se tiene:

$$\rightarrow \sum F_X = 0$$

$$-F_{ID} + F_{IE} \operatorname{cos} 60^\circ = 0$$

Al reemplazar la expresión de la fuerza en la barra  $F_{IE}$  en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X se obtiene:

$$-F_{ID} + (0) \cos 60^\circ = 0$$

$$F_{ID} = 0$$

El valor nulo en la barra  $F_{ID}$  indica que no está sometida a ninguna carga.

Se realiza el análisis estático de la masa suspendida H y en la Figura 20 pueden verse las fuerzas que actúan la masa suspendida H.

**Figura 20. Diagrama de cuerpo libre la masa suspendida H**



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre de la masa suspendida H y al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se encuentra:

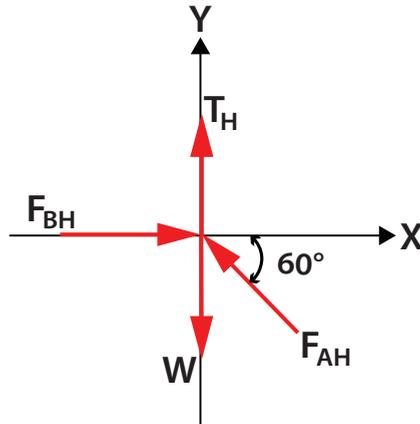
$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$T_H - W = 0$$

$$T_H = W$$

Se realiza el análisis estático del nudo H y en la Figura 21 pueden verse las fuerzas que actúan en el nudo H.

Figura 21. Diagrama de cuerpo libre del nudo H



Fuente: elaboración propia.

Del diagrama de cuerpo libre del nudo H, y al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y, se encuentra:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$T_H - W + F_{HA} \text{ sen } 60^\circ = 0$$

Al sustituir la tensión  $T_H$  en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje Y se tiene:

$$W - W + F_{HA} \text{ sen } 60^\circ = 0$$

$$F_{HA} \text{ sen } 60^\circ = 0$$

$$F_{HA} = \frac{0}{\text{sen } 60^\circ}$$

$$F_{HA} = 0$$

El valor nulo en la barra  $F_{IE}$  indica que la barra no está sometida a ninguna carga.

Del diagrama de cuerpo libre del nudo H, y al usar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje X, se tiene:

$$\rightarrow \sum F_X = 0$$

$$F_{HD} - F_{HA} \text{ cos } 60^\circ = 0$$

Al reemplazar la expresión de la fuerza en la barra  $F_{HA}$  en la ecuación se logra:

$$F_{HD} - (0) \text{ cos } 60^\circ = 0$$

$$F_{HD} = 0$$

El valor nulo en la barra  $F_{HD}$  indica que la barra no está sometida a ninguna carga.

En la Tabla 3 se muestran los valores de las fuerzas en todas las barras y el estado de carga a la que se encuentran sometidas.

**Tabla 3. Fuerzas en las barras**

Barra	Magnitud *W	Estado
AG	0,92	C
AB	0,41	C
BC	0,42	C
BG	0,22	T
GF	0,29	T
GC	0,72	C
CF	0,43	T
CD	1,09	C
FE	0,18	T
DE	0,32	C
IE	0	-
ID	0	-
HA	0	-
HD	0	-

El esfuerzo máximo admisible a tensión es:

$$\sigma_{adm,max,T} = 10 \text{ ksi}$$

Como el valor máximo a tensión en las barras se presenta en la barra CF, cuya magnitud es 0,43W, la fuerza máxima a tensión en la barra CF es:

$$\sigma_{adm,max,T} = \sigma_{CF}$$

$$\sigma_{CF} = 10 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{adm,max,T} = \frac{F_{CF}}{A_{CF}}$$

$$F_{CF} = \sigma_{adm,max,T} * A_{CF}$$

$$0,40W = \left(10 \times 10^3 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2}\right) (0,2 \text{ pulg}^2)$$

$$W = \frac{\left(10 \times 10^3 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2}\right) (0,2 \text{ pulg}^2)}{0,40}$$

$$W = 5.000 \text{ lb}$$

El esfuerzo máximo admisible a compresión es:

$$\sigma_{\text{adm,max,C}} = 15\text{ksi}$$

Como el valor máximo a compresión en las barras se presenta en la barra CD, cuya magnitud es 1,09W, la fuerza máxima a tensión en la barra CD es:

$$\sigma_{\text{adm,max,C}} = \sigma_{\text{CD}}$$

$$\sigma_{\text{CD}} = 15\text{ksi}$$

$$\sigma_{\text{adm,max,C}} = \frac{F_{\text{CD}}}{A_{\text{CD}}}$$

$$F_{\text{CD}} = \sigma_{\text{adm,max,C}} * A_{\text{CD}}$$

$$1,09W = \left(15 \times 10^3 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2}\right) (0,2 \text{pulg}^2)$$

$$W = \frac{\left(15 \times 10^3 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2}\right) (0,2 \text{pulg}^2)}{1,09}$$

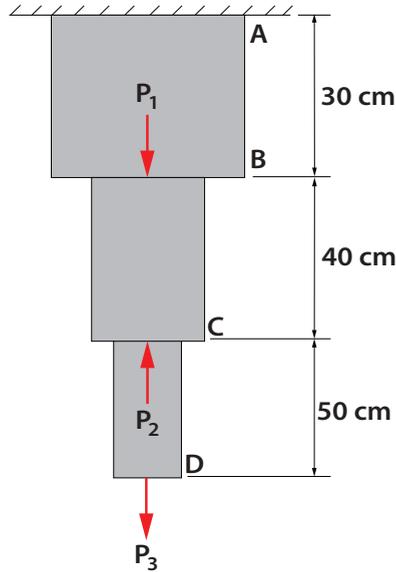
$$W = 2752,29\text{lb}$$

La carga máxima que puede soportar la estructura es 2752,29 lb.

## 2.2. Caso de estudio 3

Un elemento elástico está conformado por tres tramos y apoyado como se muestra en la Figura 22; el primer tramo AB es de acero, cuyo módulo de elasticidad es 200 GPa, longitud 30 cm y de sección transversal circular de diámetro 40 mm; el segundo BC es de aluminio, cuyo módulo de elasticidad es 100 GPa, longitud 40 cm y de sección transversal circular hueca de diámetro exterior 30 mm y diámetro interior 30 mm; y el tercer tramo CD es de un material, cuyo módulo de elasticidad es 80 GPa, longitud 50 cm y de sección transversal circular de diámetro 20 mm. Se debe determinar el desplazamiento del punto D.

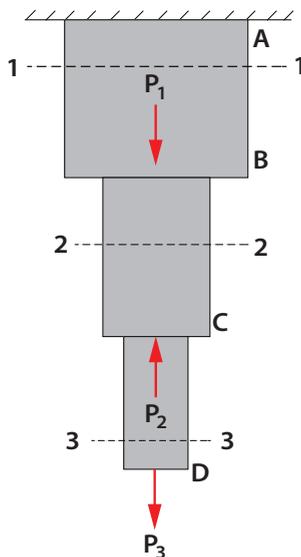
**Figura 22. Diagrama de cuerpo libre del elemento elástico con cargas externas**



Fuente: elaboración propia.

El desplazamiento del punto D respecto al extremo fijo A se encuentra por medio de la adición vectorial de los desplazamientos de todos los tramos o segmentos del elemento elástico. Para cada desplazamiento hay que encontrar la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico en cada tramo, esto se logra usando el método de las secciones, en este caso se realizarán tres secciones o cortes (véase la Figura 23).

**Figura 23. Secciones que realizar a los segmentos del elemento elástico**



Fuente: elaboración propia.

Los desplazamientos relativos de cada tramo se pueden expresar como:

$$\delta = L_f - L_i$$

El desplazamiento del punto D respecto al extremo fijo A es:

$$\delta_{D/A} = \left( L_{AB} + \delta_{B/A} + L_{BC} + \delta_{C/B} + L_{CD} + \delta_{D/C} \right) - (L_{AB} + L_{BC} + L_{CD})$$

Por lo que el desplazamiento del punto D respecto al extremo fijo A es:

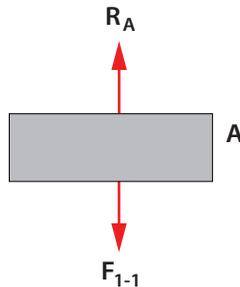
$$\left( \delta_{D/A} \right) = \left( \delta_{B/A} \right) + \left( \delta_{C/B} \right) + \left( \delta_{D/C} \right)$$

El desplazamiento del punto B respecto al extremo A es:

$$\left( \delta_{B/A} \right) = \frac{F_{1-1} L_{AB}}{E_{AB} A_{AB}}$$

La fuerza interna en la sección 1-1 puede evaluarse teniendo en cuenta la porción superior o inferior de la sección. En la Figura 24 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 1-1.

**Figura 24. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 1-1**



Fuente: elaboración propia.

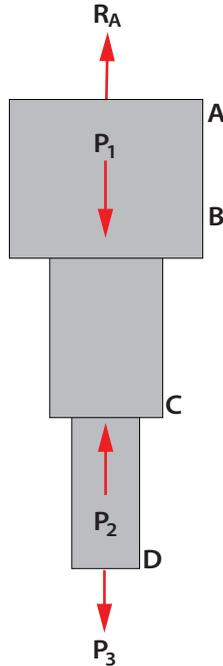
La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción superior del elemento al realizar la sección 1-1 es:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$R_A - F_{1-1} = 0$$

Para encontrar la fuerza interna en la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 1-1 es necesario determinar la reacción que le genera el apoyo A al elemento elástico, para ello se realiza un análisis estático al elemento elástico. En la Figura 25 pueden verse las fuerzas que actúan en el elemento elástico.

Figura 25. Diagrama de cuerpo libre del elemento elástico



Fuente: elaboración propia.

Al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico y reemplazando las fuerzas externas aplicadas a este, se encuentra:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$R_A - P_1 + P_2 - P_3 = 0$$

$$R_A - 2 \text{ kN} + 4 \text{ kN} - 10 \text{ kN} = 0$$

$$R_A = 8 \text{ kN}$$

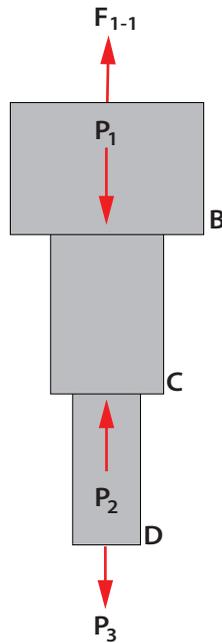
Al despejar la fuerza interna  $F_{1-1}$  en la sección 1-1 de la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción superior de este y la reacción que le genera el apoyo A al elemento elástico, se tiene:

$$F_{1-1} = R_A$$

$$F_{1-1} = 8 \text{ kN}$$

De igual forma si se utiliza la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 1-1 para encontrar la fuerza interna a lo largo del eje de este elemento en la sección 1-1 (véase la Figura 26) se tiene:

**Figura 26. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 1-1**



Fuente: elaboración propia.

Al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción inferior del elemento, al realizar la sección 1-1 y reemplazando las fuerzas externas aplicadas al elemento elástico, se encuentra:

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 F_{1-1} - P_1 + P_2 - P_3 &= 0 \\
 F_{1-1} &= P_1 - P_2 + P_3 \\
 F_{1-1} &= 2 \text{ kN} - 4 \text{ kN} + 10 \text{ kN} \\
 F_{1-1} &= 8 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

El sentido asumido para la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico de este, al realizar la sección 1-1, es correcto, por lo que dicho tramo se encuentra sometido a un alargamiento y el desplazamiento del punto B respecto al extremo A es positivo.

Al sustituir la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico al realizar la sección 1-1, la longitud, la sección transversal y el material del tramo AB, en la expresión del desplazamiento del punto B respecto al extremo A, se encuentra:

$$\left(\delta_{B/A}\right) = \frac{(8 \times 10^3 \text{ N}) * (0,30 \text{ m})}{\left(2 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) * [\pi(20 \times 10^{-3} \text{ m})^2]}$$

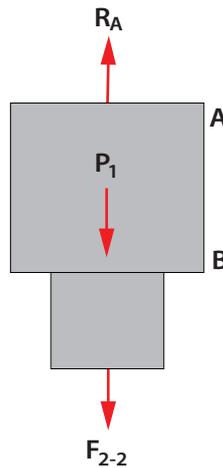
$$\left(\delta_{B/A}\right) = + 9,55 \times 10^{-6} \text{ m}$$

El desplazamiento del punto C respecto al punto B es:

$$\left(\delta_{C/B}\right) = \frac{F_{2-2} L_{BC}}{E_{BC} A_{BC}}$$

La fuerza interna en la sección 2-2 puede evaluarse teniendo en cuenta la porción superior o inferior de la sección. En la Figura 27 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 2-2.

**Figura 27. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 2-2**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción superior de este al realizar la sección 2-2 es:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$R_A - P_1 - F_{2-2} = 0$$

$$F_{2-2} = R_A + P_1$$

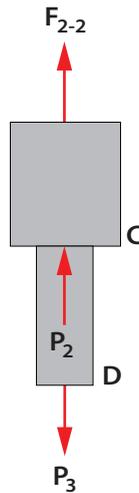
Al reemplazar la reacción que le genera el apoyo A y la fuerza externa aplicada al elemento elástico, se encuentra:

$$F_{2-2} = 8 \text{ kN} - 2 \text{ kN}$$

$$F_{2-2} = 6 \text{ kN}$$

De igual manera si se utiliza la porción inferior del elemento elástico al hacer la sección 2-2, para encontrar la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico en la sección 2-2 (véase la Figura 28) se tiene:

**Figura 28. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 2-2**



Fuente: elaboración propia.

Aplicando la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción inferior del elemento cuando se lleva a cabo la sección 2-2 y se reemplazan las fuerzas externas aplicadas a este se encuentra:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$F_{2-2} + P_2 - P_3 = 0$$

$$F_{2-2} = P_3 - P_2$$

$$F_{2-2} = 10 \text{ kN} - 4 \text{ kN}$$

$$F_{2-2} = 6 \text{ kN}$$

El sentido asumido para la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico de este, al realizar la sección 2-2, es correcto, por lo que dicho tramo se encuentra sometido a un alargamiento y el desplazamiento del punto C respecto al punto B es positivo.

Al sustituir la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico de este al realizar la sección 2-2, la longitud, la sección transversal circular hueca y el material del tramo BC en la expresión del desplazamiento del punto C respecto al punto B, se tiene:

$$\left(\delta_{C/B}\right) = \frac{(6 \times 10^3 \text{ N}) * (0,40 \text{ m})}{\left(1 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) * [\pi(15 \times 10^{-3} \text{ m} - 7,5 \times 10^{-3} \text{ m})^2]}$$

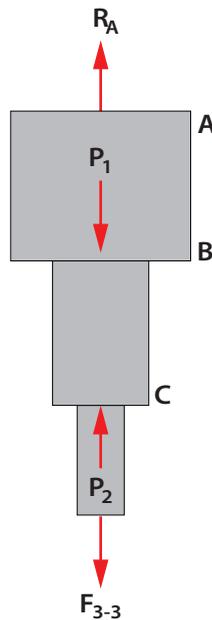
$$\left(\delta_{C/B}\right) = + 45,27 \times 10^{-6} \text{ m}$$

El desplazamiento del punto D respecto al extremo C es:

$$\left(\delta_{D/C}\right) = \frac{F_{3-3}L_{CD}}{E_{CD}A_{CD}}$$

La fuerza interna en la sección 3-3 puede evaluarse teniendo en cuenta la porción superior o inferior de la sección. En la Figura 29 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 3-3.

**Figura 29. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 3-3**



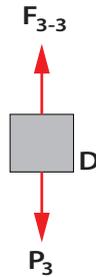
Fuente: elaboración propia.

Al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico y reemplazando la reacción que le genera el apoyo A y las fuerzas externas aplicadas al elemento elástico, se encuentra:

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 R_A - P_1 + P_2 - F_{3-3} &= 0 \\
 F_{3-3} &= R_A - P_1 + P_2 \\
 F_{3-3} &= 8 \text{ kN} - 2 \text{ kN} + 4 \text{ kN} \\
 F_{3-3} &= 10 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

De igual forma, si se utiliza la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 3-3 para encontrar la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico en la sección 3-3 (véase la Figura 30) se tiene:

**Figura 30. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 3-3**



Fuente: elaboración propia.

Al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción inferior de este, al realizar la sección 3-3 y reemplazando la fuerza externa aplicada al elemento elástico, se tiene:

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 F_{3-3} - P_3 &= 0 \\
 F_{3-3} &= P_3 \\
 F_{3-3} &= 10 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

El sentido asumido para la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico de este, al realizar la sección 3-3, es correcto, por lo que dicho tramo se encuentra sometido a un alargamiento, y el desplazamiento del punto D respecto al punto C es positivo.

Al sustituir la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico del elemento al realizar la sección 3-3, la longitud, la sección transversal y el material del tramo CD, en la expresión del desplazamiento del punto D respecto al punto CA, se encuentra:

$$\left(\delta_{D/C}\right) = \frac{(10 \times 10^3 \text{ N}) * (0,50 \text{ m})}{\left(8 \times 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) * [\pi(10 \times 10^{-3} \text{ m})^2]}$$

$$\left(\delta_{D/C}\right) = + 198,94 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Al reemplazar los desplazamientos del punto B respecto al extremo A, del punto C respecto al punto B y del punto D respecto al punto C, en la expresión del desplazamiento del punto D respecto al extremo fijo A, se tiene:

$$\left(\delta_{D/A}\right) = \left(\delta_{B/A}\right) + \left(\delta_{C/B}\right) + \left(\delta_{D/C}\right)$$

$$\left(\delta_{D/A}\right) = (+ 9,55 \times 10^{-6} \text{ m}) + (+ 45,27 \times 10^{-6} \text{ m}) + (+ 198,94 \times 10^{-6} \text{ m})$$

$$\left(\delta_{D/A}\right) = + 253,76 \times 10^{-6} \text{ m}$$



## CAPÍTULO 3

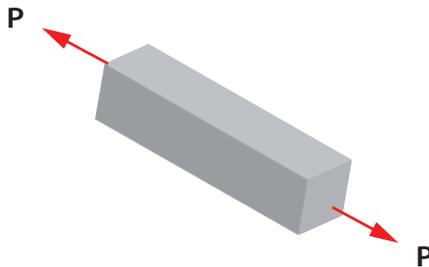
# ESFUERZOS EN ELEMENTOS ELÁSTICOS CARGADOS AXIALMENTE

Las cargas aplicadas a las secciones transversales de los elementos elásticos se aplicarán en el centroide de la sección transversal.

### 3.1. Distribución de esfuerzos en elementos elásticos cargados axialmente

Para determinar los esfuerzos internos en secciones inclinadas de barras cargadas axialmente, en la Figura 31 se muestra una barra prismática en equilibrio sometida a dos fuerzas axiales que se aplican en el centroide de la sección transversal.

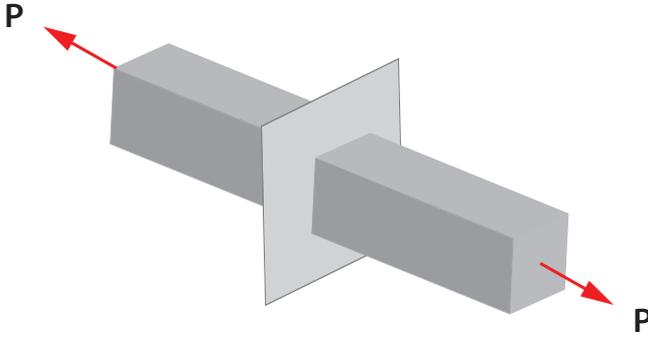
Figura 31. Fuerzas axiales en la barra



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 32 se muestra la sección o corte perpendicular en la barra a realizar, en la que la fuerza interna para los dos segmentos es la fuerza aplicada P con sentidos contrarios.

**Figura 32. Sección a realizar en la barra**

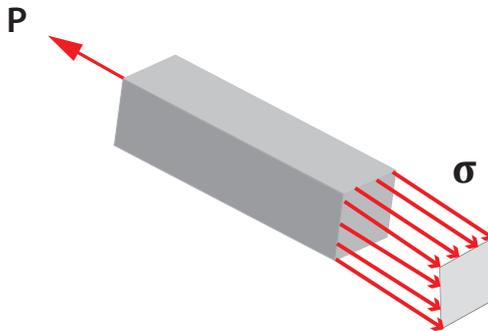


Fuente: elaboración propia.

La distribución de esfuerzo al realizar el corte perpendicular en la barra es un esfuerzo uniformemente distribuido (véase la Figura 33), que se obtiene dividiendo la magnitud P de la carga entre el área A:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

**Figura 33. Distribución de esfuerzo normal**

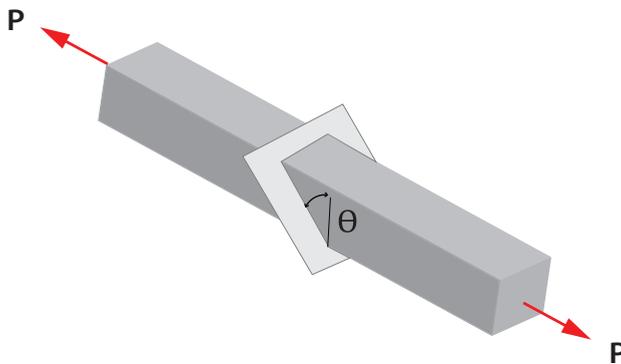


Fuente: elaboración propia.

### 3.2. Esfuerzos en secciones inclinadas de elementos elásticos cargados axialmente

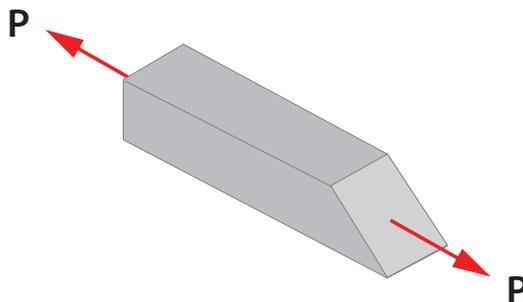
Si a la barra se le realiza un corte o sección formando un ángulo  $\theta$  con un plano normal, véase la Figura 34. Si se realiza el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la barra, “para obtener los esfuerzos convencionales, la fuerza  $P$  se reemplaza por sus componentes a lo largo de los ejes seleccionados” (Popov, 2000, p. 16). En cada porción actúa una fuerza de igual magnitud, dirección y sentido contrario a la carga externa  $P$  aplicada en la barra (véase la Figura 35) en dos componentes perpendicular y paralela al corte. Véase la Figura 36. La componente paralela al corte de magnitud  $V = P \text{ Sen } \theta$  produce un esfuerzo cortante de magnitud  $\tau = \frac{V}{A_{\theta}}$  y la componente perpendicular al corte de magnitud  $F = P \text{ cos } \theta$  produce un esfuerzo nominal de magnitud  $\sigma = \frac{F}{A_{\theta}}$ . Véase la Figura 36.

Figura 34. Sección inclinada a realizar en la barra

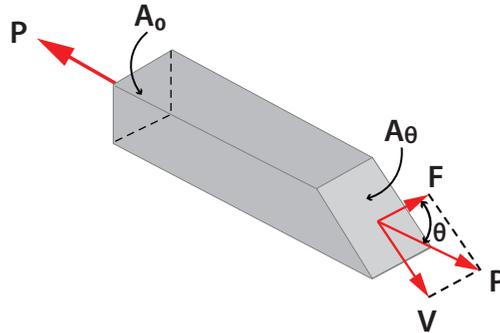


Fuente: elaboración propia.

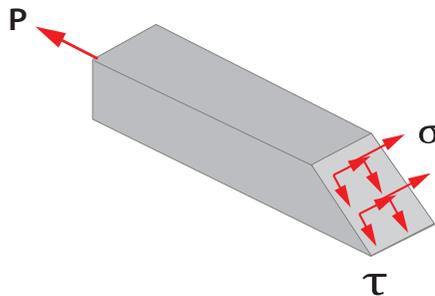
Figura 35. Diagrama de cuerpo libre de la barra al realizar un corte para un ángulo  $\theta$  en sentido manecillas del reloj



Fuente: elaboración propia.

**Figura 36. Componentes de la fuerza interna**

Fuente: elaboración propia.

**Figura 37. Esfuerzos en un plano inclinado**

Fuente: elaboración propia.

Reemplazando la sección transversal de la barra en función de la sección transversal del corte  $A_\theta = A_0 \cos \theta$  en las expresiones de los esfuerzos, se tiene:

El esfuerzo nominal perpendicular al corte es:

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta}$$

Pero la sección transversal por donde se realizó el corte es:

$$A_0 = A_\theta \cos \theta$$

$$A_\theta = \frac{A_0}{\cos \theta}$$

Reemplazando la fuerza nominal y la sección transversal, por donde se realizó el corte en la expresión del esfuerzo nominal, se tiene:

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta}$$

$$\sigma = \frac{P \cos \theta}{\frac{A_0}{\cos \theta}}$$

$$\sigma = \frac{P}{A_0} (\cos \theta)^2$$

El esfuerzo cortante paralelo al corte es:

$$\tau = \frac{V}{A_\theta}$$

Reemplazando la fuerza cortante y la sección transversal, por donde se realizó el corte en la expresión del esfuerzo nominal, se tiene:

$$\tau = \frac{V}{A_\theta}$$

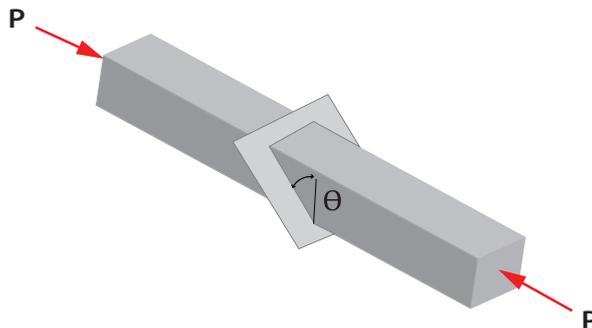
$$\tau = \frac{P \sin \theta}{\frac{A_0}{\cos \theta}}$$

$$\tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta * \cos \theta$$

### 3.3. Caso de estudio 4

En una barra de sección transversal cuadrada de 9 pulg<sup>2</sup> se aplica una carga compresiva de magnitud  $P = 135$  lb. Se deben determinar los esfuerzos normales y cortantes en las caras de un elemento girando un ángulo  $\theta = 45^\circ$  en sentido contrario al de las manecillas del reloj y respecto al eje positivo Y. Véase la Figura 38.

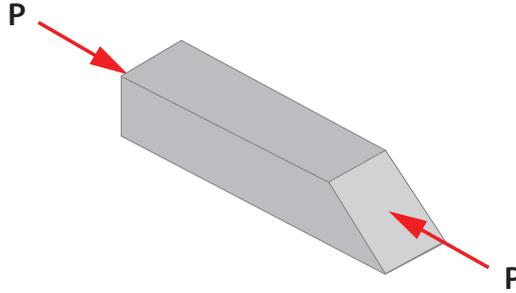
**Figura 38. Aplicación de fuerza axial en la barra**



Fuente: elaboración propia.

El corte o sección realizado a la barra un ángulo de  $45^\circ$  en sentido contrario a las manecillas del reloj y respecto al eje positivo Y, así como la fuerza interna aplicada en el plano indicado, puede verse en la Figura 39.

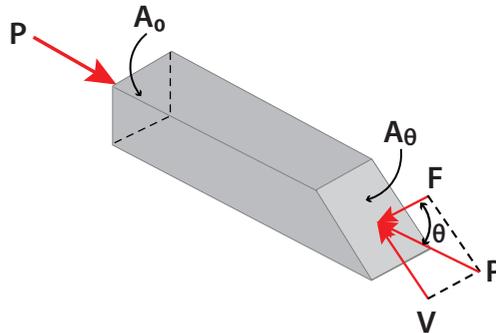
**Figura 39. Diagrama de cuerpo libre de la barra al realizar un corte para un ángulo de  $45^\circ$  manecillas del reloj**



Fuente: elaboración propia.

Las componentes de la fuerza interna compresiva  $P$  que actúa en el plano inclinado, donde la componente de fuerza axial  $F$  perpendicular al plano indicado tiene un sentido compresivo y la componente de fuerza cortante  $V$  paralela al plano indicado, pueden verse en la Figura 40.

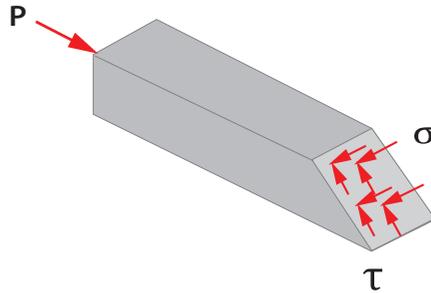
**Figura 40. Componentes de la fuerza interna**



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 41 se muestra el esfuerzo nominal compresivo que produjo la componente de la fuerza axial  $F$  y el esfuerzo cortante paralelo al plano indicado producido por la componente de fuerza cortante  $V$ .

**Figura 41. Esfuerzos en el plano inclinado**



Fuente: elaboración propia.

El esfuerzo nominal compresivo al que está sometido la barra es:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\sigma = -\frac{135 \times 10^3 \text{ lb}}{9 \text{ pulg}^2}$$

$$\sigma = -15.000 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2}$$

$$\sigma = -15.000 \text{ psi}$$

La expresión del esfuerzo nominal al que está sometido la barra para cualquier inclinación es:

$$\sigma = \frac{P}{A} (\cos \theta)^2$$

El esfuerzo nominal al que está sometido la barra para una inclinación de 45° en sentido contrario a las manecillas del reloj y respecto al eje positivo Y es:

$$\sigma = -\frac{135 \times 10^3 \text{ lb}}{9 \text{ pulg}^2} (\cos 45^\circ)^2$$

$$\sigma = -15.000 \text{ psi} * (\cos 45^\circ)^2$$

$$\sigma = -7.500 \text{ psi}$$

$$\sigma = -7,50 \text{ ksi}$$

La expresión del esfuerzo cortante al que está sometido la barra para cualquier inclinación es:

$$\tau = \frac{V}{A} \text{sen } \theta * \cos \theta$$

El esfuerzo cortante al que está sometido la barra para una inclinación de  $45^\circ$  en sentido contrario a las manecillas del reloj y respecto al eje positivo Y es:

$$\tau = \frac{135 \times 10^3 \text{ lb}}{9 \text{ pulg}^2} (\text{sen } 45^\circ * \text{cos } 45^\circ)$$

$$\tau = 7.500 \text{ psi}$$

$$\tau = 7,50 \text{ kpsi}$$

El esfuerzo cortante hace girar la barra en sentido contrario a las manecillas del reloj, por lo que este es positivo. Véase la Figura 40.

### 3.4. Esfuerzo admisible

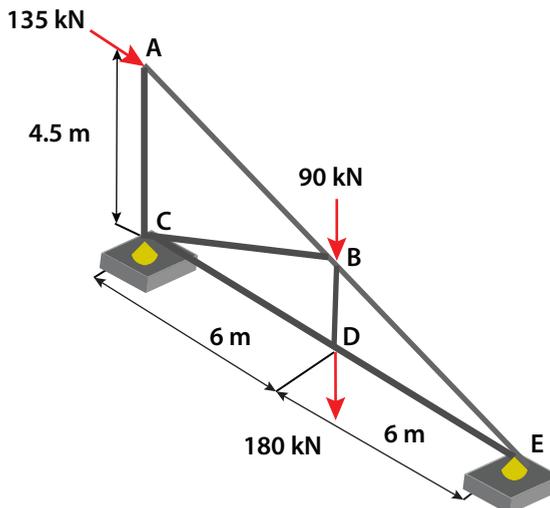
Algunas veces es “deseable diseñar un miembro para usarlo a su máxima capacidad. Para ello se aplica un factor de seguridad al máximo esfuerzo utilizable para obtener un esfuerzo de diseño admisible a de trabajo” (Fitzgerald, 2010, p. 27), que se determina por la expresión.

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{F.S}$$

### 3.5. Caso de estudio 5

Las barras BE y BC de la estructura mostrada en la Figura 42 son del mismo material. Si la carga última de la barra BE es de 1.250 kN y el diámetro de la barra BE es de  $\varnothing = 28 \text{ mm}$ , se debe determinar el factor de seguridad para la barra BE, y el diámetro de la barra BC si ambas barras tienen el mismo factor de seguridad.

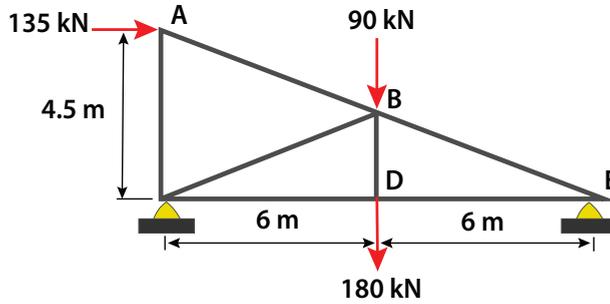
Figura 42. Geometría de la estructura



Fuente: elaboración propia.

Las barras de la estructura y las cargas externas puestas en esta se encuentran aplicadas en un plano, tal como se observa en la Figura 43.

**Figura 43. Configuración y aplicación de fuerzas en la estructura**



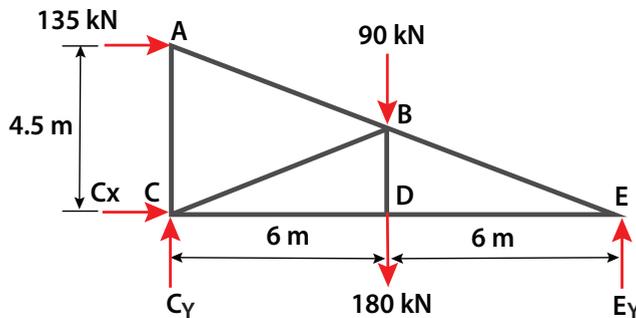
Fuente: elaboración propia.

El factor de seguridad de la barra BE es:

$$(F. S.)_{BE} = \frac{(F_U)_{BE}}{(F_{adm})_{BE}}$$

Para determinar el factor de seguridad de la barra BE es necesario realizar el análisis estático a la estructura (véase la Figura 44) en el que se determinará la componente vertical que le ejerce el apoyo de rodillo ubicado en el punto E, y luego con el análisis del nudo E se determinará la fuerza en la barra BE.

**Figura 44. Diagrama de cuerpo libre de la estructura con cargas externas e internas**



Fuente: elaboración propia.

Aplicando la ecuación de equilibrio de momentos para la estructura se tiene:

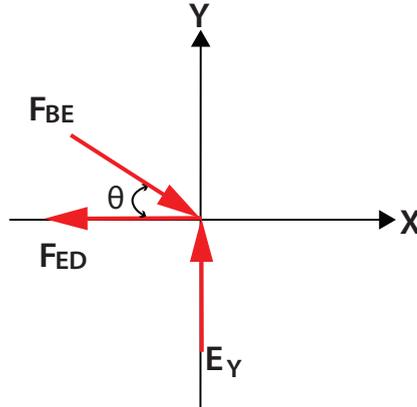
$$\begin{aligned}
 +\circlearrowleft \sum M_C &= 0 \\
 - (135 \text{ kN} * 4,50 \text{ m}) - (90 \text{ kN} + 180 \text{ kN}) * (6 \text{ m}) + (E_Y * 12 \text{ m}) &= 0 \\
 - 607,50 - 1,620 + 12E_Y &= 0
 \end{aligned}$$

$$12E_Y = 2227,5$$

$$E_Y = 185,63 \text{ Kn}$$

En la Figura 45 puede verse el análisis estático del nudo E.

**Figura 45. Análisis estático del nudo E**



Fuente: elaboración propia.

Al utilizar la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales en el nudo E, se logra:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$E_Y - F_{BE} \text{ sen } \theta = 0$$

Obteniendo la dirección de la barra del triángulo rectángulo ACE, se encuentra:

$$\tan \theta = \frac{4,5 \text{ m}}{12 \text{ m}}$$

$$\theta = 20,56^\circ$$

Si se sustituye la componente vertical, que le ejerce el apoyo de rodillo ubicado en el punto E en la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales en el nudo E, se tiene:

$$185,63 \text{ kN} - F_{BE} \text{ sen } 20,56^\circ = 0$$

$$F_{BE} = 528,58 \text{ kN}$$

Por lo que el factor de seguridad de la barra BE es:

$$(F. S.)_{BE} = \frac{(F_U)_{BE}}{(F_{adm})_{BE}}$$

$$(F. S.)_{BE} = \frac{1.250 \text{ kN}}{528,58 \text{ kN}}$$

$$(F. S.)_{BE} = 2,37$$

Para determinar el diámetro de la barra BC es necesario utilizar la condición de que ambas barras tienen el mismo factor de seguridad, por lo que:

$$(F.S.)_{BC} = (F.S.)_{BE}$$

$$\frac{(\sigma_U)_{BC}}{(\sigma_{adm})_{BC}} = \frac{(\sigma_U)_{BE}}{(\sigma_{adm})_{BE}}$$

Además, si las barras BE y BC son del mismo material, el esfuerzo último en ellas es el mismo, encontrando:

$$(\sigma_U)_{BC} = (\sigma_U)_{BE}$$

$$\sigma_U = (\sigma_U)_{BE}$$

$$\sigma_U = (\sigma_U)_{BC}$$

Al reemplazar en la ecuación del factor de seguridad se tiene:

$$\frac{(\sigma_U)_{BC}}{(\sigma_{adm})_{BC}} = \frac{(\sigma_U)_{BE}}{(\sigma_{adm})_{BE}}$$

$$\frac{\sigma_U}{(\sigma_{adm})_{BC}} = \frac{\sigma_U}{(\sigma_{adm})_{BE}}$$

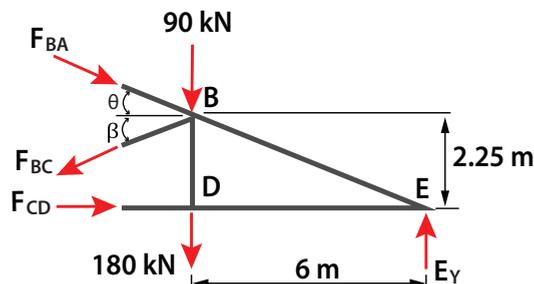
$$(\sigma_{adm})_{BC} = (\sigma_{adm})_{BE}$$

Si se expresa el esfuerzo admisible o de trabajo en función de la carga y la sección transversal, se encuentra:

$$\frac{F_{BC}}{\frac{\pi \phi_{BC}^2}{4}} = \frac{F_{BE}}{\frac{\pi \phi_{BE}^2}{4}}$$

Para determinar el diámetro en la barra BE, es necesario realizar el análisis estático al nudo B (véase la Figura 46) para evaluar la fuerza admisible o de trabajo en la barra BE.

Figura 46. Método de secciones en la estructura



Fuente: elaboración propia.

En el punto E, que es donde concurren las fuerzas desconocidas BA y CD de la porción derecha en la sección o corte realizado, se aplica la ecuación de equilibrio de momentos para anular los momentos que producen estas dos fuerzas y encontrar la fuerza interna en la barra BC, encontrando:

$$+\curvearrowright \sum M_E = 0$$

$$(90 \text{ kN} + 180 \text{ kN}) * (6 \text{ m}) + (F_{BC} \text{ sen } \beta) * (\overline{BD}) + (F_{BC} \text{ cos } \beta) * (6 \text{ m}) = 0$$

Para encontrar la distancia  $\overline{BD}$  que es la misma longitud de la barra  $\overline{BD}$ , se analiza el triángulo rectángulo DBE (véase la Figura 46).

$$\tan 20,56^\circ = \frac{\overline{BD}}{6 \text{ m}}$$

$$\overline{BD} = 2,25 \text{ m}$$

Mientras que para encontrar la dirección de la barra BC, se analiza el triángulo rectángulo DBE. Véase la Figura 46.

$$\tan \beta = \frac{6 \text{ m}}{2,25 \text{ m}}$$

$$\beta = 69,44^\circ$$

Al sustituir la longitud y la dirección de la barra  $\overline{BD}$  en la ecuación de equilibrio de momentos en la porción derecha de la sección realizada, se logra:

$$(90 \text{ kN} + 180 \text{ kN}) * (6 \text{ m}) + (F_{BC} \text{ sen } \beta) * (\overline{BD}) + (F_{BC} \text{ cos } \beta) * (6 \text{ m}) = 0$$

$$(90 \text{ kN} + 180 \text{ kN}) * (6 \text{ m}) + (F_{BC} \text{ sen } 69,44^\circ) * (2,25 \text{ m}) + (F_{BC} \text{ cos } 69,44^\circ) * (6 \text{ m}) = 0$$

$$1.620 + 2,11 F_{BC} + 2,11 F_{BC} = 0$$

$$4,22 F_{BC} = 1.620$$

$$F_{BC} = 384,41 \text{ kN}$$

El signo positivo de la fuerza interna en la barra BC indica que el sentido asumido es correcto, por lo que la barra BC trabaja a tensión.

Se cambian las fuerzas admisibles o de trabajo de las barras BE y BC, así como el diámetro de la barra BE como se ve a continuación:

$$\frac{F_{BC}}{\frac{\pi \phi_{BC}^2}{4}} = \frac{F_{BE}}{\frac{\pi \phi_{BE}^2}{4}}$$

$$\frac{384,41 \text{ kN}}{\frac{\pi \phi_{BC}^2}{4}} = \frac{528,58 \text{ kN}}{\frac{\pi (0,028 \text{ m})^2}{4}}$$

$$\frac{384,41 \text{ kN}}{\phi_{BC}^2} = \frac{528,58 \text{ kN}}{(0,028 \text{ m})^2}$$

$$528,58 \phi_{BC}^2 = 0,30$$

$$\phi_{BC} = 2,388 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\phi_{BC} = 23,88 \text{ mm}$$

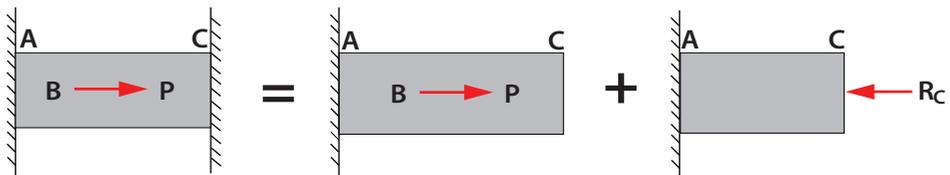


## CAPÍTULO 4

# CONDICIÓN CINEMÁTICA O CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD

“Una estructura es estáticamente indeterminada cuando está sometida por más soportes de los necesarios para mantener su equilibrio” (Beer *et al.*, 2004, p. 71), resultando más incógnitas que ecuaciones de equilibrio. Para ello se considera una de las reacciones como condición cinemática o de compatibilidad o redundante. La solución del problema se obtiene considerando en forma separada (véase la Figura 47) las deformaciones producidas por las cargas dadas y por la reacción redundante, sumando los resultados obtenidos.

Figura 47. Sistema indeterminado



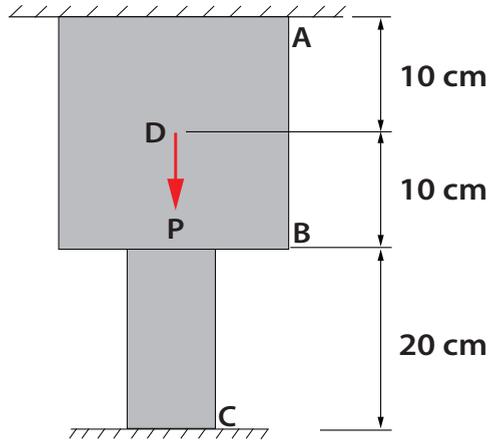
Fuente: elaboración propia.

### 4.1. Caso de estudio 6

Un elemento elástico está doblemente empotrado en sus extremos y está conformado por dos tramos; el primer tramo AB es de acero, cuyo módulo de elasticidad es 200 GPa, longitud 20 cm y de sección transversal  $A = 0,002 \text{ m}^2$ ; y el segundo BC es de aluminio, cuyo módulo de elasticidad es 100 GPa, longitud 20 cm y de sección

transversal  $A = 0,001 \text{ m}^2$ . En el punto B del primer tramo se aplica una fuerza  $P$  de magnitud  $20 \text{ kN}$ , véase la Figura 48. Se debe determinar las reacciones en los apoyos y los esfuerzos en todos los tramos del elemento elástico.

**Figura 48. Diagrama de cuerpo libre del elemento elástico con cargas externas**

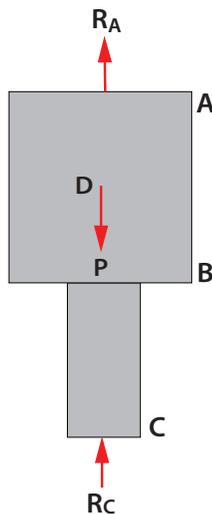


Fuente: elaboración propia.

Para determinar el esfuerzo nominal en los tramos AB y BC hay que determinar las fuerzas internas que le generan los apoyos A y C al elemento elástico, por lo que es necesario realizar un análisis estático a este.

En la Figura 49 pueden verse las fuerzas externas e internas que actúan en el elemento elástico.

**Figura 49. Diagrama de cuerpo libre del elemento elástico con cargas externas e internas**



Fuente: elaboración propia.

Aplicando la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico se tiene:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

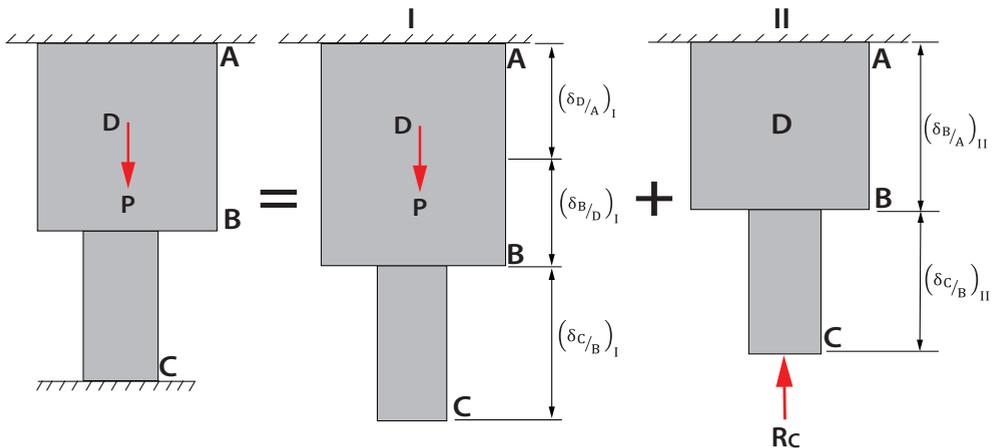
$$R_A - P + R_C = 0$$

Con la ecuación de equilibrio de fuerzas aplicada a lo largo del elemento elástico se evidenció que este se encuentra indeterminado, ya que se encuentra empotrado en ambos extremos, en el que se generan dos incógnitas  $R_A$  y  $R_C$ , que son la fuerza vertical que le genera el empotramiento en los puntos A y C y se cuenta con una ecuación de equilibrio. Para encontrar la ecuación adicional necesaria para resolver la indeterminación se requiere tener en cuenta la condición cinemática o condición de compatibilidad, para este caso se eligió como redundante la reacción que le ejerce el apoyo C al elemento elástico, resultando que el desplazamiento relativo del extremo C del elemento elástico respecto al otro extremo A es nulo. Por lo que:

$$\delta_{C/A} = 0$$

Para encontrar la ecuación de compatibilidad es necesario aplicar el principio de superposición y el elemento elástico se subdivide en dos subsistemas de carga; en el primer subsistema o subdivisión de carga se aplican las fuerzas externas aplicadas al elemento elástico; y en el segundo subsistema de carga se aplica la fuerza redundante (véase la Figura 50) y el desplazamiento resultante en el punto C se encuentra sumando el desplazamiento causado por cada subsistema de carga.

**Figura 50. Principio de superposición aplicado al elemento elástico**



Fuente: elaboración propia.

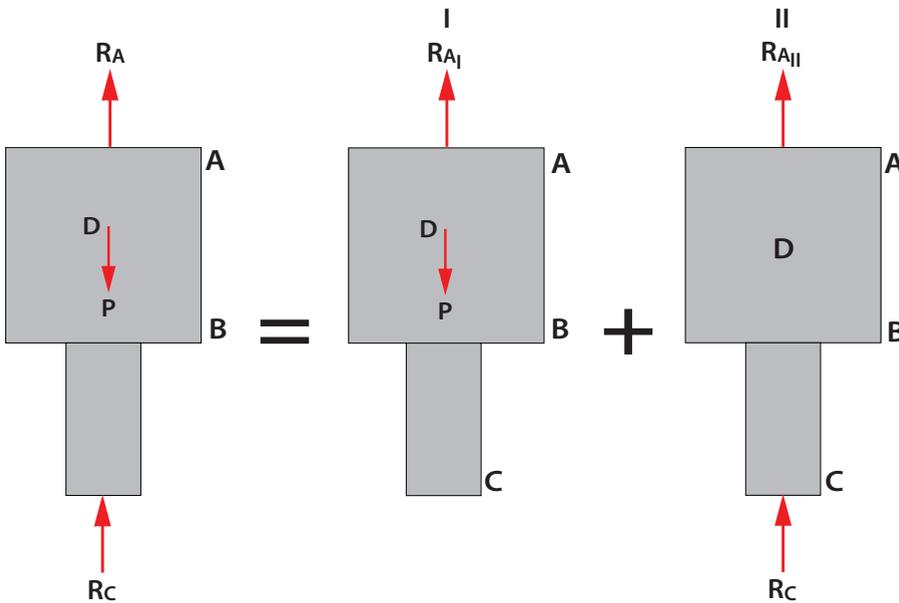
La ecuación de compatibilidad de desplazamiento relativo del extremo C del elemento elástico respecto al otro extremo A es:

$$\delta_{C/A} = 0$$

$$\delta_{C/A} = (\delta_{C/A})_I + (\delta_{C/A})_{II}$$

En la Figura 51 pueden verse las fuerzas externas e internas al aplicar el principio de superposición al elemento elástico.

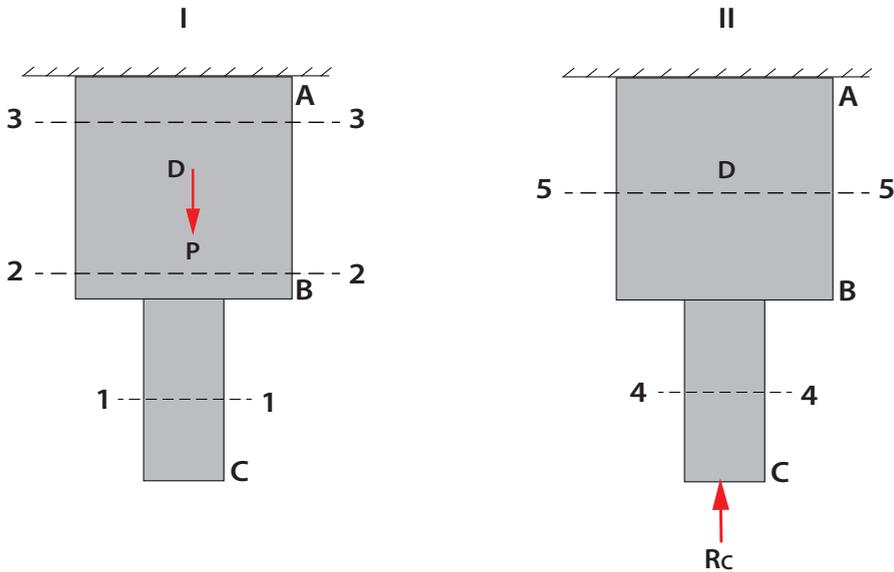
**Figura 51. Principio de superposición aplicado al elemento elástico**



Fuente: elaboración propia.

Para encontrar la fuerza interna axial en cada subsistema del elemento elástico se usa el método de las secciones: en cada segmento de los subsistemas I y II se realiza una sección y en el tramo AB del subsistema I se realiza una sección antes y después de aplicar la fuerza externa P aplicada en el punto D (véase la Figura 52) y se utiliza la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del tramo del elemento elástico.

**Figura 52. Secciones a realizar a los subsistemas del elemento elástico**



Fuente: elaboración propia.

Cada término de la ecuación de compatibilidad se expresa en función de las cargas aplicadas, usando la relación carga y deformación.

El desplazamiento del extremo C respecto al extremo fijo A en el subsistema I es:

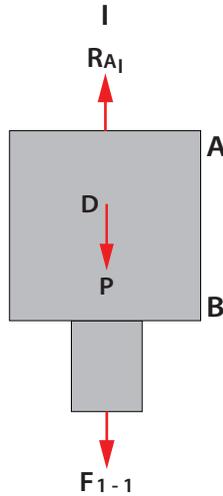
$$\left(\delta_{C/A}\right)_I = \left(\delta_{C/B}\right)_I + \left(\delta_{B/D}\right)_I + \left(\delta_{D/A}\right)_I$$

El desplazamiento del extremo C respecto al punto B es:

$$\left(\delta_{C/B}\right)_I = \frac{F_{1-1}L_{CB}}{E_{CB}A_{CB}}$$

La fuerza interna en la sección 1-1 puede evaluarse teniendo en cuenta el equilibrio de la porción superior o inferior. En la Figura 53 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 1-1 del subsistema I.

**Figura 53. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 1-1 al subsistema I**



Fuente: elaboración propia.

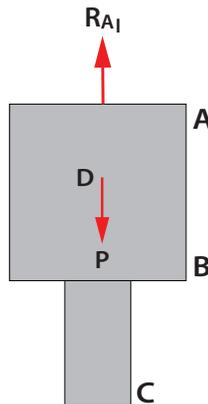
La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción superior del elemento, al realizar la sección 1-1 del subsistema I, es:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$R_{A_I} - P - F_{1-1} = 0$$

Para encontrar la fuerza interna en la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 1-1 del subsistema I, es necesario determinar la reacción que le genera el apoyo en el punto A al elemento elástico, para ello se realiza un análisis estático al subsistema I. En la Figura 54 pueden verse las fuerzas que actúan en el subsistema I.

**Figura 54. Diagrama de cuerpo libre del subsistema I**



Fuente: elaboración propia.

Al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en el subsistema I se logra:

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 R_{A_I} - P &= 0 \\
 R_{A_I} &= P
 \end{aligned}$$

Al reemplazar la fuerza externa  $P=20$  kN en la ecuación de equilibrio de fuerzas se encuentra:

$$\begin{aligned}
 R_{A_I} &= P \\
 R_{A_I} &= 20 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Al despejar la fuerza interna  $F_{1-1}$  en la sección 1-1 de la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción superior del elemento del subsistema I se tiene:

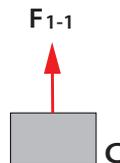
$$\begin{aligned}
 R_{A_I} - P + F_{1-1} &= 0 \\
 F_{1-1} &= P - R_{A_I}
 \end{aligned}$$

Si se reemplaza la fuerza externa  $P=20$  kN, y la reacción que le genera el apoyo en el punto A al elemento elástico  $R_{A_I}=20$  kN, se tiene:

$$\begin{aligned}
 F_{1-1} &= 20 \text{ kN} - 20 \text{ kN} \\
 F_{1-1} &= 0
 \end{aligned}$$

De igual manera si se utiliza la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 1-1 del subsistema I para encontrar la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico en la sección 1-1 (véase la Figura 55) se logra:

**Figura 55. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 1-1 del subsistema I**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción inferior de este, al realizar la sección 1-1 del subsistema I, es:

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 F_{1-1} &= 0
 \end{aligned}$$

Como la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico en la sección 1-1 perteneciente al subsistema I es nula, el desplazamiento del extremo C respecto al punto B es nulo.

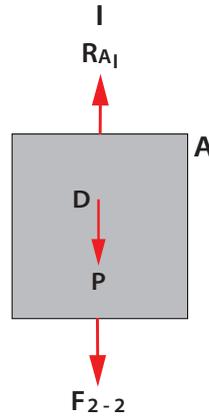
$$\left(\delta_{C/B}\right)_I = 0$$

El desplazamiento del punto B respecto al punto D es:

$$\left(\delta_{B/D}\right)_I = \frac{F_{2-2}L_{BD}}{E_{BD}A_{BD}}$$

En la Figura 56 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 2-2 del subsistema I.

**Figura 56. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 2-2 del subsistema I**



Fuente: elaboración propia.

El desplazamiento del punto B respecto al punto D es:

$$\left(\delta_{B/D}\right)_I = \frac{F_{2-2}L_{BD}}{E_{BD}A_{BD}}$$

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción superior del elemento, al realizar la sección 2-2 del subsistema I, es:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$R_{A1} - P - F_{2-2} = 0$$

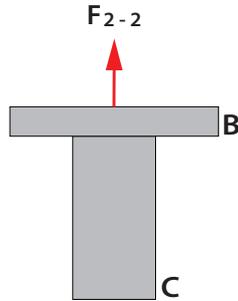
$$F_{2-2} = R_{A1} - P$$

$$F_{2-2} = 20 \text{ kN} - 20 \text{ kN}$$

$$F_{2-2} = 0$$

Si se utiliza la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 2-2 del subsistema I para encontrar la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico en la sección 2-2, (véase la Figura 57) se logra:

**Figura 57. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 2-2 del subsistema I**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción inferior del elemento, al realizar la sección 2-2 del subsistema I, es:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$F_{2-2} = 0$$

Como la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico en la sección 2-2 del subsistema I es nula, el desplazamiento del punto B respecto al punto D es nulo.

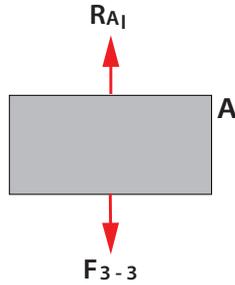
$$\left( \delta_{B/D} \right)_I = 0$$

El desplazamiento del punto D respecto al punto A es:

$$\left( \delta_{B/D} \right)_I = \frac{F_{3-3} L_{DA}}{E_{DA} A_{DA}}$$

En la Figura 58 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 3-3 del subsistema I.

**Figura 58. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 3-3 del subsistema I**



Fuente: elaboración propia.

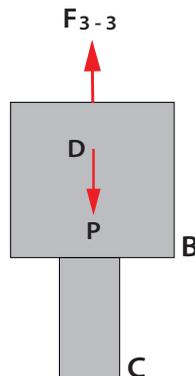
La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción superior de este, al realizar la sección 3-3 del subsistema I, es:

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 R_{A1} - F_{3-3} &= 0 \\
 F_{3-3} &= R_{A1} \\
 F_{3-3} &= 20 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

El sentido asumido para la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico del elemento, al realizar la sección 3-3, es correcto, por lo que dicho tramo se encuentra sometido a un alargamiento y el desplazamiento del punto D respecto al punto A es positivo.

Considerando la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 3-3 del subsistema I para encontrar la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico en la sección 3-3 (véase la Figura 59) se tiene:

**Figura 59. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 3-3 del subsistema I**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción inferior de este, al realizar la sección 3-3 del subsistema I, es:

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\ F_{3-3} - P &= 0 \\ F_{3-3} &= P \\ F_{3-3} &= 20 \text{ kN} \end{aligned}$$

Al sustituir la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico del objeto, al realizar la sección 3-3 del subsistema I, la longitud, la sección transversal y el material del tramo DA en la expresión del desplazamiento del punto D respecto al punto A, se encuentra:

$$\begin{aligned} \left(\delta_{B/D}\right)_I &= + \frac{2 \times 10^4 \text{ N} * 0,10 \text{ m}}{2 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} * 0,002 \text{ m}^2} \\ \left(\delta_{B/D}\right)_I &= +5 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned}$$

Al reemplazar los desplazamientos del extremo C respecto al punto B, del punto B respecto al punto D y del punto D respecto al punto A, en la expresión del desplazamiento del extremo C respecto al extremo fijo A, se logra:

$$\begin{aligned} \left(\delta_{C/A}\right)_I &= \left(\delta_{C/B}\right)_I + \left(\delta_{B/D}\right)_I + \left(\delta_{D/A}\right)_I \\ \left(\delta_{C/A}\right)_I &= 0 + 0 + (+1 \times 10^{-6} \text{ m}) \\ \left(\delta_{C/A}\right)_I &= +1 \times 10^{-6} \text{ m} \end{aligned}$$

El desplazamiento del extremo C respecto al extremo fijo A en el subsistema II es:

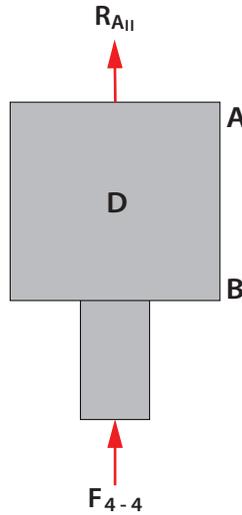
$$\left(\delta_{C/A}\right)_{II} = \left(\delta_{C/B}\right)_{II} + \left(\delta_{B/A}\right)_{II}$$

El desplazamiento del extremo C respecto al punto B es:

$$\left(\delta_{C/B}\right)_{II} = \frac{F_{4-4} L_{CB}}{E_{CB} A_{CB}}$$

En la Figura 60 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 4-4 del subsistema II.

**Figura 60. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 4-4 del subsistema II**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción superior de este, al realizar la sección 4-4 del subsistema II, es:

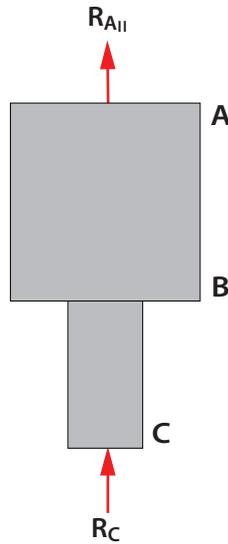
$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$R_{AII} + F_{4-4} = 0$$

$$F_{4-4} = -R_{AII}$$

Para encontrar la fuerza interna en la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 4-4 del subsistema II, es necesario determinar la reacción que le genera el apoyo en el punto A al elemento elástico. Para ello se realiza el análisis estático. En la Figura 61 pueden verse las fuerzas que actúan en el subsistema II.

Figura 61. Diagrama del cuerpo libre del subsistema II



Fuente: elaboración propia.

Al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en el subsistema II, se tiene:

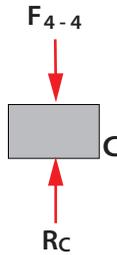
$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 R_{AII} + R_C &= 0 \\
 R_{AII} &= -R_C
 \end{aligned}$$

Al reemplazar la fuerza interna del apoyo fijo A del subsistema II en función de la redundante en la ecuación de la fuerza interna, y en la porción superior del elemento elástico al realizar la sección, se encuentra:

$$\begin{aligned}
 F_{4-4} &= -R_{AII} \\
 F_{4-4} &= -(-R_C) \\
 F_{4-4} &= R_C
 \end{aligned}$$

De la misma forma, si se utiliza la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 4-4 del subsistema II, para encontrar la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico en la sección 4-4 (véase la Figura 62) se tiene:

**Figura 62. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 4-4 del subsistema II**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción inferior de este, al realizar la sección 4-4 del subsistema II, es:

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\ -F_{4-4} + R_C &= 0 \\ F_{4-4} &= R_C \end{aligned}$$

De acuerdo con el sentido asumido en la reacción  $R_C$ , el tramo CB se encuentra sometido a un acortamiento y el desplazamiento del extremo C respecto al punto B es negativo.

Al sustituir la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico en función de la redundante  $R_C$ , al realizar la sección 4-4 del subsistema II, la longitud, la sección transversal y el material del tramo CB, en la expresión del desplazamiento del extremo C respecto al punto B, se tiene:

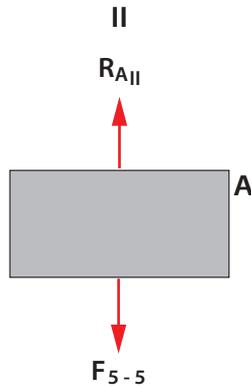
$$\begin{aligned} \left(\delta_{C/B}\right)_{II} &= -\frac{F_{4-4}L_{CB}}{E_{CB}A_{CB}} \\ \left(\delta_{C/B}\right)_{II} &= -\frac{R_C * 0,2 \text{ m}}{1 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} * 0,001 \text{ m}^2} \\ \left(\delta_{C/B}\right)_{II} &= -2 \times 10^{-9} R_C \end{aligned}$$

El desplazamiento del punto B respecto al extremo A es:

$$\left(\delta_{B/A}\right)_{II} = \frac{F_{5-5}L_{CB}}{E_{CB}A_{CB}}$$

En la Figura 63 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 5-5.

**Figura 63. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del elemento elástico al realizar la sección 5-5**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción superior de este, al realizar la sección 5-5 del subsistema II, es:

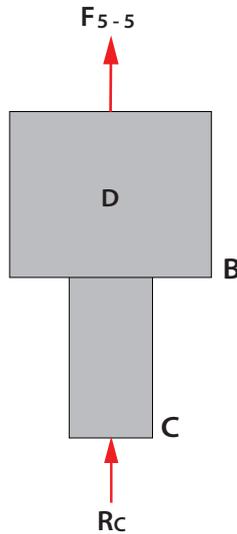
$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 R_{AII} - F_{5-5} &= 0 \\
 F_{5-5} &= R_{AII}
 \end{aligned}$$

Se sustituye la reacción que le genera el apoyo en el punto A al elemento elástico en función de la redundante en el subsistema II.

$$\begin{aligned}
 R_{AII} &= -R_C \\
 F_{5-5} &= R_{AII} \\
 F_{5-5} &= (-R_C)
 \end{aligned}$$

De la misma forma, si se utiliza la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 5-5 del subsistema II para encontrar la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico en la sección 5-5 (véase la Figura 64), se tiene:

**Figura 64. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del elemento elástico al realizar la sección 5-5 del subsistema II**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico en la porción inferior de este, al realizar la sección 5-5 del subsistema II, es:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$F_{5-5} + R_C = 0$$

$$F_{5-5} = -R_C$$

De acuerdo con el sentido asumido en la reacción  $R_{AII}$ , el tramo BA se encuentra sometido a un alargamiento y el desplazamiento del punto B respecto al extremo A es positivo.

Al sustituir la fuerza interna a lo largo del eje del elemento elástico en función de la redundante  $R_C$ , al realizar la sección 5-5 del subsistema II, la longitud, la sección transversal y el material del tramo BA en la expresión del desplazamiento del punto B respecto al extremo A, se logra:

$$\left(\delta_{B/A}\right)_{II} = \frac{F_{5-5} L_{CB}}{E_{CB} A_{CB}}$$

$$\left(\delta_{C/B}\right)_{II} = \frac{(-R_C) * 0,2 \text{ m}}{2 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} * 0,002 \text{ m}^2}$$

$$\left(\delta_{C/B}\right)_{II} = -5 \times 10^{-10} R_C$$

Al reemplazar los desplazamientos del extremo C respecto al punto B y del punto B respecto al extremo A, en la expresión del desplazamiento del extremo C respecto al extremo fijo A, se encuentra:

$$\begin{aligned}(\delta_{C/A})_{II} &= (\delta_{C/B})_{II} + (\delta_{B/A})_{II} \\(\delta_{C/A})_{II} &= (-2 \times 10^{-9}R_C) + (-5 \times 10^{-10}R_C) \\(\delta_{C/A})_{II} &= -2,50 \times 10^{-9}R_C\end{aligned}$$

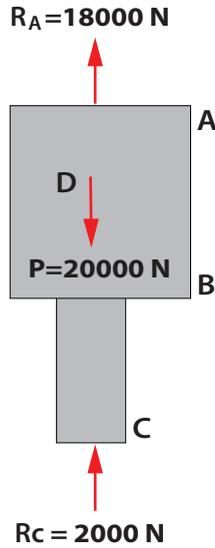
Reemplazando la ecuación de compatibilidad, los resultados de los desplazamientos relativos del punto C respecto al punto A de los subsistemas I y II, se tiene:

$$\begin{aligned}\delta_{C/A} &= 0 \\ \delta_{C/A} &= (\delta_{C/A})_I + (\delta_{C/A})_{II} \\ \delta_{C/A} &= (+5 \times 10^{-6} \text{ m}) + (-2,50 \times 10^{-9}R_C) \\ (+5 \times 10^{-6} \text{ m}) + (-2,50 \times 10^{-9}R_C) &= 0 \\ R_C &= 2.000 \text{ N}\end{aligned}$$

Al sustituir la redundante en la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje del elemento elástico, se encuentra la reacción que le genera el apoyo A al elemento elástico.

$$\begin{aligned}R_A - P + R_C &= 0 \\ R_A - 20.000 \text{ N} + 2.000 \text{ N} &= 0 \\ R_A &= 18.000 \text{ N}\end{aligned}$$

Las reacciones encontradas pueden verse en la Figura 65.

**Figura 65. Diagrama de cuerpo libre del elemento elástico**

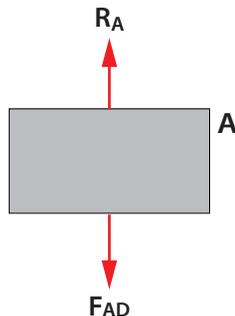
Fuente: elaboración propia.

En el tramo AB se presentan dos esfuerzos, uno en el segmento AD y otro en el segmento DB.

El esfuerzo nominal en el segmento AD es:

$$\sigma_{AD} = \frac{F_{AD}}{A_{AD}}$$

La fuerza interna en el segmento AD puede evaluarse teniendo en cuenta el equilibrio de la porción superior o inferior. En la Figura 66 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción superior del segmento AD.

**Figura 66. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del segmento AD**

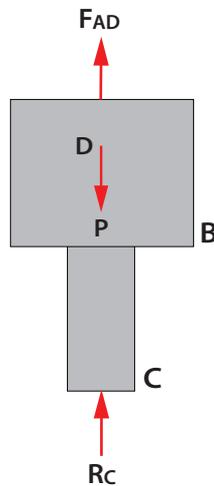
Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje de la porción superior del segmento AD es:

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\ R_A - F_{AD} &= 0 \\ F_{AD} &= R_A \\ F_{AD} &= 18.000 \text{ N} \end{aligned}$$

El tramo AD se encuentra sometido a tensión, por lo que el esfuerzo nominal es positivo, de igual manera si se utiliza la porción inferior del segmento AD para determinar la fuerza interna en el segmento AD. Véase la Figura 67.

**Figura 67. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del segmento AD**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje de la porción inferior del segmento AD es:

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\ F_{AD} - P + R_C &= 0 \\ F_{AD} &= P - R_C \\ F_{AD} &= 20.000 \text{ N} - 2.000 \text{ N} \\ F_{AD} &= 18.000 \text{ N} \end{aligned}$$

Por lo que el esfuerzo nominal en el segmento AD es:

$$\sigma_{AD} = + \frac{F_{AD}}{A_{AD}}$$

$$\sigma_{AD} = + \frac{18.000 \text{ N}}{0,002 \text{ m}^2}$$

$$\sigma_{AD} = +9'000 .000 \text{ Pa}$$

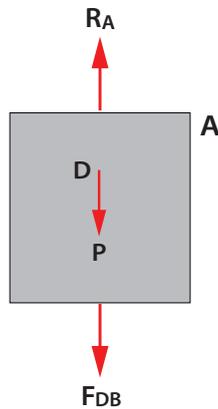
$$\sigma_{AD} = 9 \text{ MPa (T)}$$

El esfuerzo nominal en el tramo DB es:

$$\sigma_{DB} = \frac{F_{DB}}{A_{DB}}$$

La fuerza interna en el segmento DB puede evaluarse teniendo en cuenta el equilibrio de la porción superior o inferior. En la Figura 68 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción superior del segmento DB.

**Figura 68. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del segmento DB**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje de la porción superior del segmento DB es:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$R_A - P - F_{DB} = 0$$

$$F_{DB} = R_A - P$$

$$F_{DB} = 18.000 \text{ N} - 20.000 \text{ N}$$

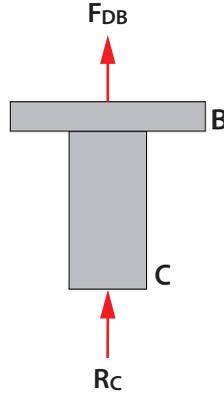
$$F_{DB} = -2.000 \text{ N}$$

$$F_{DB} = 2.000 \text{ N (C)}$$

El tramo DB se encuentra sometido a compresión, por lo que el esfuerzo nominal es negativo.

En la Figura 69 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción inferior del segmento DB.

**Figura 69. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del segmento DB**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje de la porción inferior del segmento DB es:

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 F_{DB} + R_C &= 0 \\
 F_{DB} &= -R_C \\
 F_{DB} &= -2.000 \text{ N} \\
 F_{DB} &= 2.000 \text{ N (C)}
 \end{aligned}$$

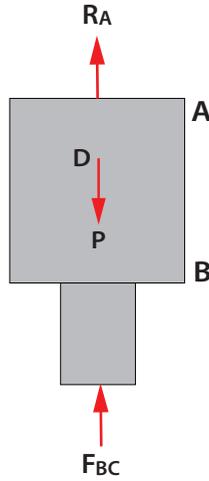
Por lo que el esfuerzo nominal en el segmento DB es:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{DB} &= -\frac{F_{DB}}{A_{DB}} \\
 \sigma_{DB} &= -\frac{2.000 \text{ N}}{0,001 \text{ m}^2} \\
 \sigma_{DB} &= -2'000.000 \text{ Pa} \\
 \sigma_{DB} &= 2 \text{ MPa (C)}
 \end{aligned}$$

El esfuerzo nominal en el segmento BC es:

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}}$$

La fuerza interna en el segmento BC puede evaluarse teniendo en cuenta el equilibrio de la porción superior o inferior. En la Figura 70 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción superior del segmento BC.

**Figura 70. Diagrama de cuerpo libre de la porción superior del segmento BC**

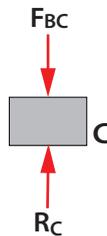
Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje de la porción superior del segmento BC es:

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\
 R_A - P + F_{BC} &= 0 \\
 F_{BC} &= -R_A + P \\
 F_{BC} &= -18.000 \text{ N} + 20.000 \text{ N} \\
 F_{BC} &= 2.000 \text{ N}
 \end{aligned}$$

El tramo BC se encuentra sometido a compresión, por lo que el esfuerzo nominal es negativo.

En la Figura 71 se muestran las fuerzas externas e internas que actúan en la porción superior del segmento DB.

**Figura 71. Diagrama de cuerpo libre de la porción inferior del segmento BC**

Fuente: elaboración propia.

La ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje de la porción inferior del segmento BC es:

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_Y &= 0 \\ -F_{BC} + R_C &= 0 \\ F_{BC} &= R_C \\ F_{BC} &= 2.000 \text{ N} \end{aligned}$$

Por lo que el esfuerzo nominal en el segmento BC es:

$$\begin{aligned} \sigma_{BC} &= -\frac{F_{BC}}{A_{BC}} \\ \sigma_{BC} &= -\frac{2.000 \text{ N}}{0,002 \text{ m}^2} \\ \sigma_{BC} &= -1'000.000 \text{ Pa} \\ \sigma_{BC} &= 1 \text{ MPa (T)} \end{aligned}$$



# BIBLIOGRAFÍA

- Beer, J., Jhonston, E. R. y Dewolf, J. T. (2004). *Mecánica de materiales*. Mc Graw Hill.
- Fitzgerald, R. W. (2010). *Mecánica de materiales*. Alfaomega.
- Gere, J. (1998). *Mecánica de materiales*. Thompson Editorial.
- Hibbeler, R. C. (1997). *Mecánica de materiales*. Pearson educación.
- Mott, R. L. (1996). *Resistencia de materiales aplicada*. Pearson educación.
- Norma Técnica Colombina. NTC-4017:2005. *Métodos para muestreo y ensayos de unidades de mampostería y otros productos de arcilla*. Colombia. 2005. 30 de noviembre de 2005.
- Norma Técnica Colombina. NTC-4205. *Unidades de mampostería de arcilla cocida, ladrillos y bloques cerámicos*. Colombia. 25 de octubre de 2000.
- Popov, E. P. (2000). *Mecánica de sólidos*. Pearson educación.
- Pytel, A. y Singer, F. L. (1994). *Resistencia de materiales*. Alfaomega.
- Timoshenko, S. (1957). *Resistencia de materiales*. Espasa-Calpe.





**ANEXOS**





## Anexo 1. Datos ensayo de compresion en ladrillos macizos

Figura 72. Muestra 1

	UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER OCAÑA			
	Documento	Codigo	Fecha	Revision
	RESULTADO PRUEBAS DE LABORATORIO	F-AC-LRE-002	10-11-2011	1(1)
Dependencia		Aprobado	Pág.	
LABORATORIO DE RESISTENCIA DE MATERIALES Y SISMICA		DIRECTOR DE DEPARTAMENTO		1(1)

### ENSAYO A COMPRESIÓN DE LADRILLOS / BLOQUES (NTC 4017)

Ensayo No.: 10899

Fecha: 3/12/2019

Cliente: UFPSO  
 Obra: \_\_\_\_\_  
 material: ladrillos  
 Descripción: \_\_\_\_\_  
 Procedencia: \_\_\_\_\_

Número de la Muestra: 1  
 Fecha de muestreo: 12:00:00 a. m.  
 Fecha recepción: 12:00:00 a. m.

RESISTENCIA NOMINAL 10 Mpa Vel de ensayo 0.08 mm/min

No. De la Serie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dimensiones										
a (mm)	100.66									
b (mm)	180.6									
c (mm)	0									
Área (mm <sup>2</sup> )			18 179							
Carga Máxima (kN)	170.57									
Resistencia Real (Mpa)	#DIV/0!									

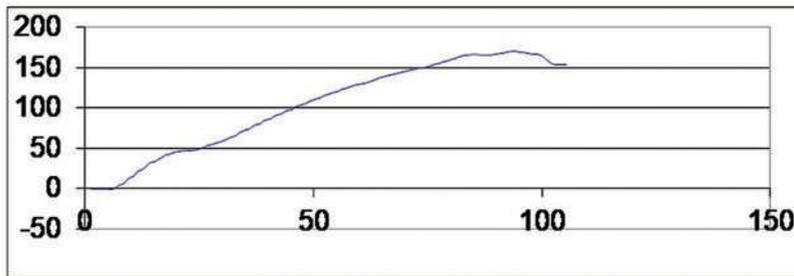


Gráfico de Esfuerzo Vs Tiempo

Observaciones: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Laboratorista: Iván Darío Bustos Arias

Jefe de Laboratorio: Nelson Afanador García Phd.

Máquina de ensayos: Pinzuar Ltda.

Rango: 1000 kN

No. se serie: 109

Calibración: 9/11/2017



VÍA ACOLSURE, SEDE EL ALGODONAL, OCAÑA N. DE S.  
 Línea Gratuita Nacional 018000 121022 / PBX: 097-5690088  
[www.ufpso.edu.co](http://www.ufpso.edu.co)



28/12/2010

Fuente: tomado de "Ensayo a compresión de ladrillos/bloques (NTC 4017)" de Laboratorio de resistencia de materiales y sísmica - UFPS Ocaña, 2011.

Figura 73. Muestra 2

	<b>UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER OCAÑA</b>			
	Documento	Codigo	Fecha	Revision
	<b>RESULTADO PRUEBAS DE LABORATORIO</b>	<b>F-AC-LRE-002</b>	<b>10-11-2011</b>	<b>1</b>
	Dependencia	Aprobado		Pág.
<b>LABORATORIO DE RESISTENCIA DE MATERIALES Y SISMICA</b>	<b>DIRECTOR DE DEPARTAMENTO</b>			<b>1(1)</b>

**ENSAYO A COMPRESIÓN DE LADRILLOS / BLOQUES (NTC 4017)**

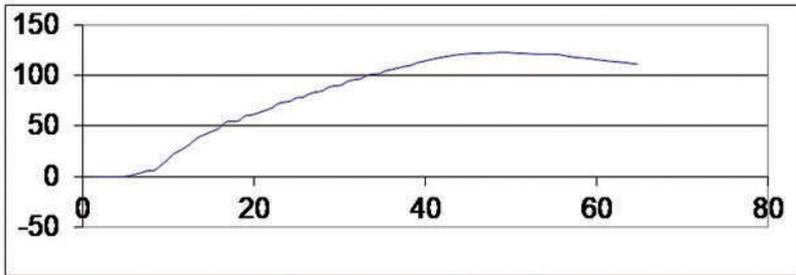
**Ensayo No.:** 10900  
**Fecha:** 3/12/2019

Ciente: UFPSO  
Obra: \_\_\_\_\_  
material: ladrillos  
Descripción: \_\_\_\_\_  
Procedencia: \_\_\_\_\_

Número de la Muestra: 2  
Fecha de muestreo: 12:00:00 a. m.  
Fecha recepción: 12:00:00 a. m.

RESISTENCIA NOMINAL 10 Mpa      Vel de ensayo 0.08 mm/min

No. De la Serie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dimensiones										
a (mm)	100.93									
b (mm)	190.9									
c (mm)	0									
Área (mm <sup>2</sup> )			19 268							
Carga Máxima (kN)	123.38									
Resistencia Real (Mpa)	#DIV/0!									



**Gráfico de Esfuerzo Vs Tiempo**

Observaciones: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Laboratorista: Iván Darío Bustos Arias

Jefe de Laboratorio: Nelson Afanador García Phd.

Máquina de ensayos: Pinzuar Ltda.      Rango: 1000 kN      No. se serie: 109      Calibración: 9/11/2017



VÍA ACOLSURE, SEDE EL ALGODONAL OCAÑA N. DE S.  
Línea Gratuita Nacional 018000 121022 / PBX: 097-5690088  
[www.ufps.edu.co](http://www.ufps.edu.co)



28/12/2010

Fuente: tomado de "Ensayo a compresión de ladrillos/bloques (NTC 4017)" de Laboratorio de resistencia de materiales y sísmica - UFPS Ocaña, 2011.

Figura 74. Muestra 3

	<b>UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER OCAÑA</b>				
	<b>RESULTADO PRUEBAS DE LABORATORIO</b>	Documento	Codigo	Fecha	Revision
		F-AC-LRE-002	10-11-2011	[ ]	[ ]
	<b>LABORATORIO DE RESISTENCIA DE MATERIALES Y SISMICA</b>	Dependencia	Aprobado	Pag.	
		DIRECTOR DE DEPARTAMENTO	[ ]	1(1)	

**ENSAYO A COMPRESIÓN DE LADRILLOS / BLOQUES (NTC 4017)**

**Ensayo No.:** 10891

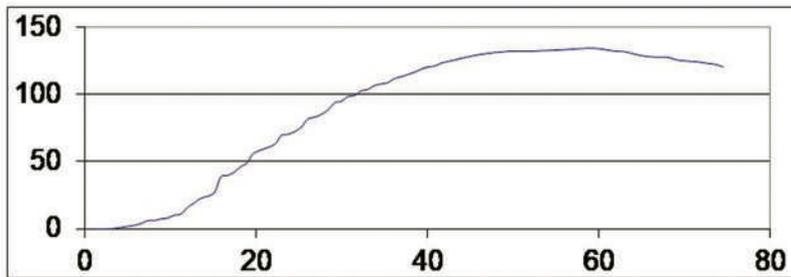
Fecha: 3/12/2019

Cliente: UFPSO  
 Obra: \_\_\_\_\_  
 material: ladrillos  
 Descripción: \_\_\_\_\_  
 Procedencia: \_\_\_\_\_

Número de la Muestra: 3  
 Fecha de muestreo: 12:00:00 a. m.  
 Fecha recepción: 12:00:00 a. m.

RESISTENCIA NOMINAL 10 Mpa      Vel de ensayo 0.08 mm/min

No. De la Serie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dimensiones										
a (mm)	98,6									
b (mm)	191,6									
c (mm)	0									
Área (mm <sup>2</sup> )			18 892							
Carga Máxima (kN)	133,99									
Resistencia Real (Mpa)	#DIV/0!									



**Gráfico de Esfuerzo Vs Tiempo**

Observaciones: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Laboratorista: Iván Darío Bustos Arias

Jefe de Laboratorio: Nelson Afanador García Phd.

Máquina de ensayos: Pinzuar Ltda.

Rango: 1000 kN

No. se serie: 109

Calibración: 9/11/2017



VÍA ACOLSURE, SEDE EL ALGODONAL, OCAÑA N. DE S.  
 Línea Gratuita Nacional 018000 121022 / PBX: 097-5690088  
[www.ufpso.edu.co](http://www.ufpso.edu.co)



28/12/2010

Fuente: tomado de "Ensayo a compresión de ladrillos/bloques (NTC 4017)" de Laboratorio de resistencia de materiales y sísmica - UFPS Ocaña, 2011.

Figura 75. Muestra 4

	<b>UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER OCAÑA</b>			
	Documento	Codigo	Fecha	Revision
	<b>RESULTADO PRUEBAS DE LABORATORIO</b>	<b>F-AC-LRE-002</b>	<b>10-11-2011</b>	<b>1</b>
	Dependencia	Aprobado		Pág.
<b>LABORATORIO DE RESISTENCIA DE MATERIALES Y SISMICA</b>	<b>DIRECTOR DE DEPARTAMENTO</b>		<b>1(1)</b>	

ENSAYO A COMPRESIÓN DE LADRILLOS / BLOQUES (NTC 4017)

Ensayo No.: 10892

Fecha: 3/12/2019

Ciente: UFPSO  
 Obra: \_\_\_\_\_  
 material: ladrillos  
 Descripción: \_\_\_\_\_  
 Procedencia: \_\_\_\_\_

Número de la Muestra: 4  
 Fecha de muestreo: 12:00:00 a. m.  
 Fecha recepción: 12:00:00 a. m.

RESISTENCIA NOMINAL 5 Mpa Vel de ensayo 0.08 mm/min

No. De la Serie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dimensiones										
a (mm)	100,3									
b (mm)	190,6									
c (mm)	0									
Área (mm <sup>2</sup> )			19 117							
Carga Máxima (kN)	146,21									
Resistencia Real (Mpa)	#DIV/0!									

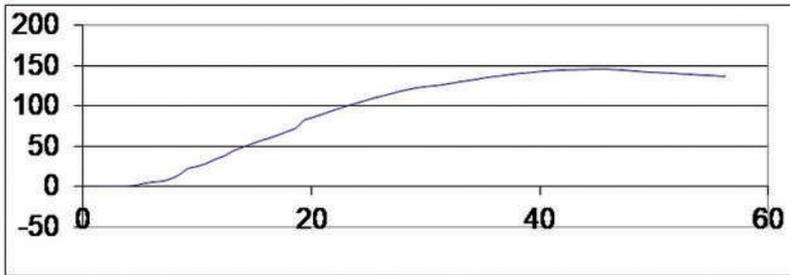


Gráfico de Esfuerzo Vs Tiempo

Observaciones: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Laboratorista: Iván Darío Bustos Arias

Jefe de Laboratorio: Nelson Afanador García Phd.

Máquina de ensayos: Pinzuar Ltda.

Rango: 1000 kN

No. de serie: 109

Calibración: 9/11/2017



VÍA ACOLSURE, SEDE EL ALGODONAL OCAÑA N. DE S.  
 Línea Gratuita Nacional 018000 121022 / PBX: 097-5690088  
 www.ufps.edu.co



28/12/2010

Fuente: tomado de "Ensayo a compresión de ladrillos/bloques (NTC 4017)" de Laboratorio de resistencia de materiales y sísmica - UFPS Ocaña, 2011.

Figura 76. Muestra 5

	<b>UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER OCAÑA</b>			
	<b>RESULTADO PRUEBAS DE LABORATORIO</b>	Documento	Codigo	Fecha
	Dependencia	F-AC-LRE-002	10-11-2011	Revision
<b>LABORATORIO DE RESISTENCIA DE MATERIALES Y SISMICA</b>		Aprobado	DIRECTOR DE DEPARTAMENTO	Pag. 1(1)

**ENSAYO A COMPRESIÓN DE LADRILLOS / BLOQUES (NTC 4017)**

**Ensayo No.:** 10893

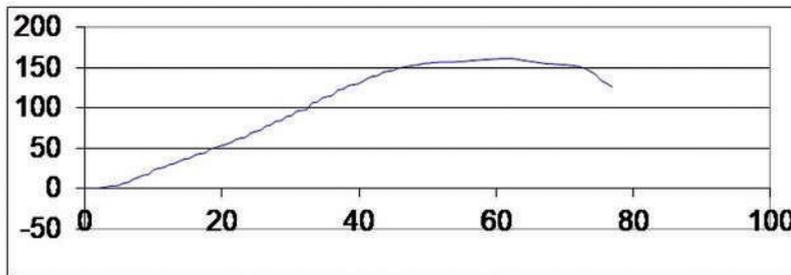
Fecha: 3/12/2019

Cliente: UFPSO  
 Obra: \_\_\_\_\_  
 material: ladrillos  
 Descripción: \_\_\_\_\_  
 Procedencia: \_\_\_\_\_

Número de la Muestra: 5  
 Fecha de muestreo: 12:00:00 a. m.  
 Fecha recepción: 12:00:00 a. m.

RESISTENCIA NOMINAL 10 Mpa Vel de ensayo 0.08 mm/min

No. De la Serie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dimensiones										
a (mm)	100.9									
b (mm)	200.6									
c (mm)	0									
Área (mm <sup>2</sup> )			20 241							
Carga Máxima (kN)	160.60									
Resistencia Real (Mpa)	#DIV/0!									



**Gráfico de Esfuerzo Vs Tiempo**

Observaciones: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Laboratorista: Iván Darío Bustos Arias

Jefe de Laboratorio: Nelson Afanador García Phd.

Máquina de ensayos: Pinzuar Ltda.

Rango: 1000 kN

No. se serie: 109

Calibración: 9/11/2017



VÍA ACOLSURE, SEDE EL ALGODONAL, OCAÑA N. DE S.  
 Línea Gratuita Nacional 018000 121022 / PBX: 097-5690088  
[www.ufpso.edu.co](http://www.ufpso.edu.co)

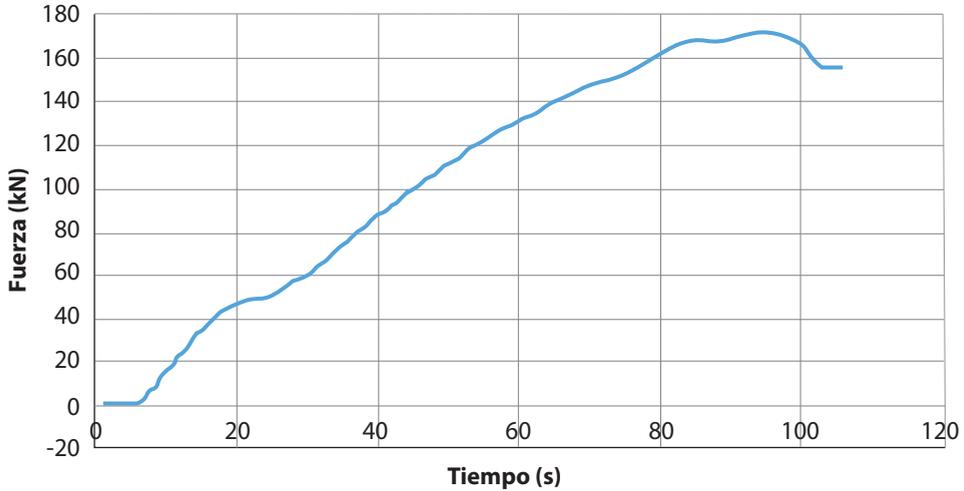


28/12/2010

Fuente: tomado de "Ensayo a compresión de ladrillos/bloques (NTC 4017)" de Laboratorio de resistencia de materiales y sísmica - UFPS Ocaña, 2011.

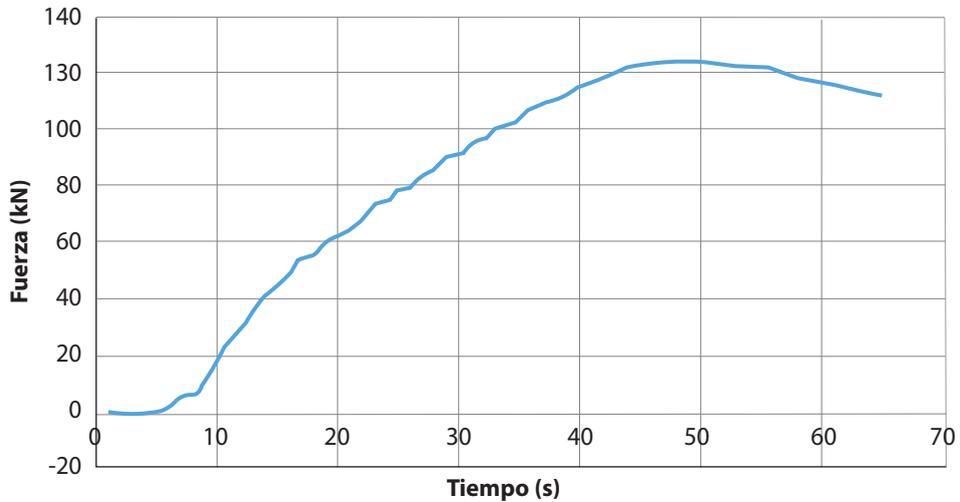
## Anexo 2. Diagrama fuerza vs tiempo en las muestras

Figura 77. Diagrama de fuerza - tiempo para la muestra 1

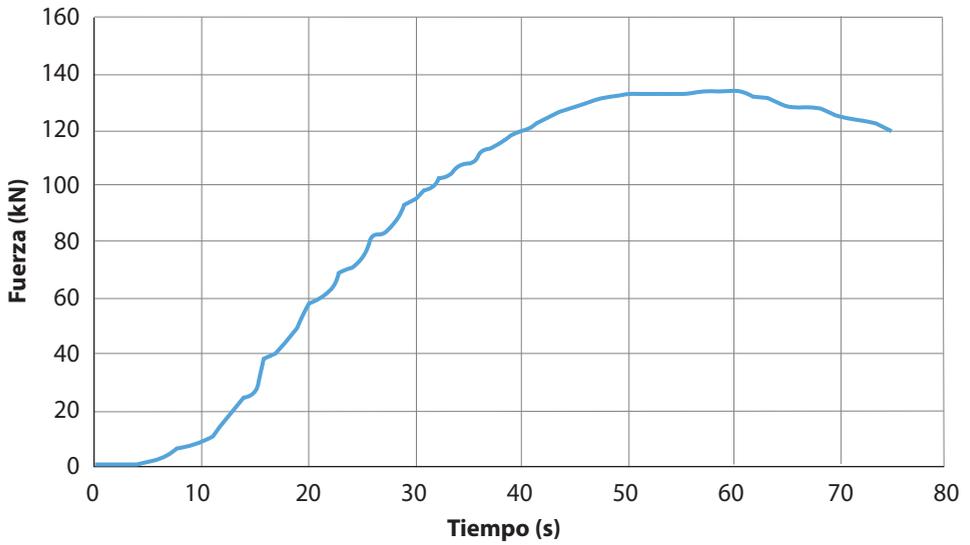


Fuente: elaboración propia.

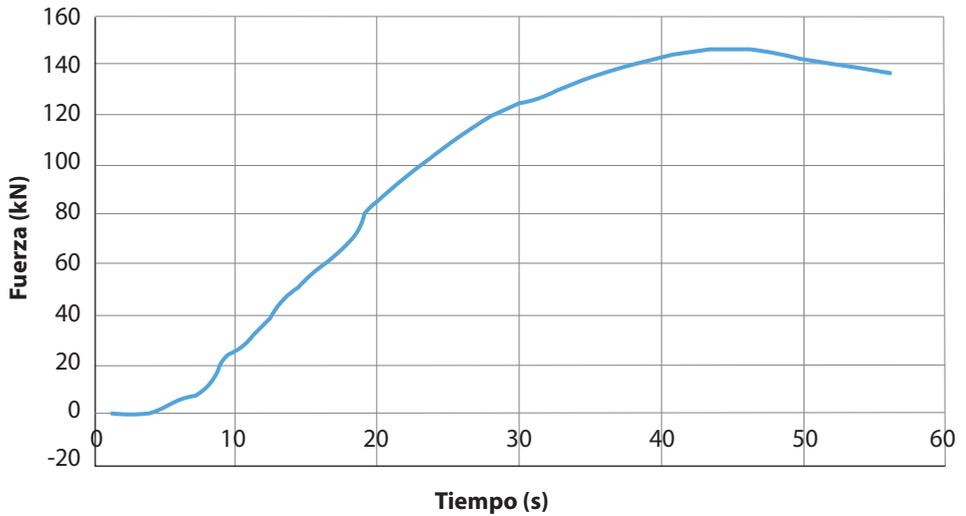
Figura 78. Diagrama de fuerza - tiempo para la muestra 2



Fuente: elaboración propia.

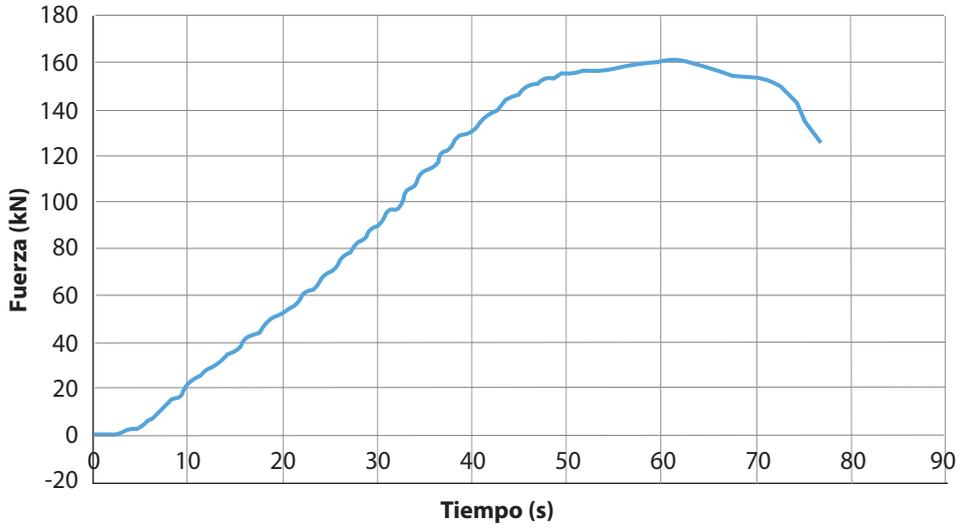
**Figura 79. Diagrama de fuerza - tiempo para la muestra 3**

Fuente: elaboración propia.

**Figura 80. Diagrama de fuerza - tiempo para la muestra 4**

Fuente: elaboración propia.

Figura 81. Diagrama de fuerza - tiempo para la muestra 5



Fuente: elaboración propia.

### Anexo 3. Fuerza vs deformación en las muestras

Tabla 4. Muestras de fuerza vs deformación

Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3		Muestra 4		Muestra 5	
Fuerza (Kn)	Deformación (mm)								
0,03	0,00	-0,04	0,00	0,00	0,00	-0,02	0,00	0,00	0,00
0,04	0,72	-0,03	0,14	0,09	0,00	0,00	0,20	0,11	0,00
0,04	1,34	-0,01	0,86	0,28	0,29	0,07	0,92	1,17	0,14
0,04	2,06	-0,01	1,00	0,50	1,20	0,14	1,49	2,03	0,74
0,04	2,69	0,21	2,06	1,34	1,77	1,29	2,06	2,99	0,77
0,04	2,83	0,87	2,15	2,07	1,97	3,80	2,69	3,27	1,32
2,08	3,92	2,45	2,78	2,82	2,57	5,44	3,35	6,31	1,89
5,29	3,98	4,18	3,43	4,14	3,15	6,40	3,52	7,39	1,97
6,45	4,06	6,18	3,95	6,31	3,81	9,19	4,06	11,22	2,46
11,24	5,04	6,39	4,35	6,39	4,29	14,63	4,46	13,42	2,89
14,69	5,29	11,40	4,92	7,60	4,75	22,28	4,55	16,21	3,09
16,25	5,75	16,64	5,01	8,25	5,32	24,73	5,06	17,25	3,32
21,68	5,89	22,90	5,55	10,35	5,87	28,48	5,12	22,71	3,75
24,05	5,95	26,43	5,58	11,32	6,38	33,89	5,18	24,76	3,81
27,44	6,47	30,22	5,98	16,13	6,84	37,95	5,21	25,94	3,86
32,62	6,81	35,59	6,01	19,19	7,18	44,24	5,24	29,33	4,32
33,69	6,90	39,93	6,04	22,90	7,30	48,55	5,32	30,58	4,32
38,21	6,92	42,89	6,52	24,61	7,72	52,62	5,72	34,24	4,35
39,29	6,95	45,56	6,55	26,72	7,81	56,79	5,81	36,18	4,78
42,18	7,47	48,41	6,58	38,46	7,84	60,25	6,12	37,05	4,81
42,94	7,50	54,40	6,61	39,73	8,24	64,01	6,18	40,85	4,84
44,88	7,52	55,08	6,72	42,25	8,35	68,37	6,27	42,81	4,86
45,92	7,78	55,80	7,01	46,33	8,41	72,68	6,38	43,74	4,89
46,42	7,87	60,64	7,07	49,42	8,44	82,33	6,44	48,29	5,35
47,34	7,90	61,44	7,18	56,37	8,50	86,06	6,52	50,27	5,41
47,65	7,95	65,19	7,24	57,41	8,84	89,54	6,75	51,56	5,72
47,88	8,44	66,84	7,32	59,26	8,93	92,97	6,81	55,56	5,75
48,15	8,47	67,95	7,44	62,54	8,98	97,08	7,04	56,33	5,78
48,89	8,50	72,12	7,50	69,31	9,01	100,45	7,07	60,06	5,81
50,47	8,53	74,10	7,78	70,23	9,07	103,73	7,10	62,16	5,84
51,85	8,55	74,91	7,81	72,18	9,44	106,71	7,12	63,12	5,89

Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3		Muestra 4		Muestra 5	
Fuerza (Kn)	Deformación (mm)								
54,36	8,58	78,30	7,84	75,48	9,44	109,89	7,15	68,01	6,41
54,89	8,93	79,00	7,87	81,52	9,50	112,59	7,55	70,38	6,41
56,55	9,16	82,23	8,04	82,96	9,81	115,37	7,58	72,00	6,44
57,68	9,18	84,19	8,27	84,95	9,87	118,42	7,61	76,77	6,47
59,19	9,24	85,17	8,33	88,22	9,90	120,70	7,64	78,47	6,52
60,83	9,30	88,79	8,38	93,69	9,90	122,82	7,67	83,06	6,87
63,02	9,36	90,37	8,55	94,66	9,93	124,45	7,70	84,02	6,92
64,93	9,41	91,09	8,58	98,24	9,98	125,37	8,04	88,97	6,95
66,03	9,81	94,71	8,61	98,97	10,41	126,77	8,07	90,01	7,21
69,70	9,84	96,32	8,73	102,43	10,44	128,56	8,07	95,53	7,24
71,51	9,87	97,27	8,87	103,40	10,47	130,47	8,50	96,67	7,30
73,46	9,90	100,53	9,01	106,24	10,50	132,00	8,53	97,93	7,32
74,63	9,90	101,89	9,16	107,52	10,53	133,64	8,55	105,83	7,35
78,22	9,96	102,41	9,21	108,45	10,96	135,69	8,58	106,85	7,81
79,92	10,41	105,21	9,27	111,69	10,99	137,12	8,61	112,07	7,81
81,02	10,47	106,53	9,30	112,96	11,01	138,28	9,01	113,56	7,84
84,57	10,47	108,06	9,61	114,90	11,07	139,82	9,04	115,55	7,87
86,11	10,50	109,61	9,73	116,57	11,39	140,91	9,07	121,83	7,90
87,14	10,53	110,58	9,76	118,64	11,47	141,81	9,13	122,76	7,92
90,57	10,61	113,34	9,78	120,18	11,53	142,98	9,16	127,20	8,01
92,09	11,07	114,63	9,84	120,75	11,62	144,01	9,56	128,37	8,50
93,09	11,10	116,18	9,90	123,06	11,67	144,74	9,58	129,74	8,53
96,02	11,10	117,55	9,93	124,14	11,73	145,17	9,61	136,09	8,55
97,50	11,13	118,72	9,96	125,29	12,04	145,55	9,64	138,74	8,58
98,54	11,16	119,83	10,44	126,43	12,10	145,67	9,73	139,62	8,64
101,63	11,64	120,95	10,53	127,57	12,13	145,99	10,01	143,44	9,07
103,09	11,70	121,58	10,56	128,47	12,16	146,21	10,13	144,98	9,13
104,89	11,73	122,11	10,59	129,45	12,25	146,03	10,19	145,93	9,16
105,81	11,79	122,45	10,61	130,12	12,53	145,49	10,41	148,73	9,18
108,57	11,82	122,68	10,64	130,79	12,56	144,66	10,47	149,92	9,24
109,97	11,845	122,778	10,672	131,034	12,789	143,817	10,528	150,91	9,813
111,74	12,27	123,06	10,70	131,75	12,87	142,90	10,56	152,32	9,87
112,65	12,36	123,38	11,24	131,87	12,93	142,28	10,73	152,85	9,93
115,18	12,42	123,34	11,33	131,91	13,16	141,83	11,01	154,60	9,98

Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3		Muestra 4		Muestra 5	
Fuerza (Kn)	Deformación (mm)								
116,85	12,47	123,00	11,39	131,85	13,19	141,12	11,04	154,92	10,04
118,16	12,47	122,58	11,44	131,89	13,22	140,49	11,07	155,89	10,07
119,57	12,50	122,22	11,47	132,15	13,48	139,95	11,10	156,11	10,10
120,82	12,53	121,89	11,84	132,31	13,53	139,07	11,13	156,21	10,13
123,34	12,53	121,77	11,90	132,53	13,56	138,61	11,59	156,26	10,61
124,60	12,56	121,85	11,93	132,77	13,59	137,92	11,62	156,43	10,64
125,92	12,59	121,82	11,93	133,14	13,99	137,12	11,64	156,88	10,64
127,44	13,30	121,27	12,02	133,50	14,02	-----	-----	157,19	10,67
128,98	13,33	120,06	12,39	133,76	14,05	-----	-----	157,93	10,67
129,68	13,36	118,92	12,45	133,99	14,08	-----	-----	158,43	10,70
130,41	13,39	118,23	12,50	133,89	14,36	-----	-----	159,01	11,19
131,37	13,70	117,72	12,53	133,34	14,42	-----	-----	159,50	11,19
132,69	13,73	116,95	12,59	132,45	14,45	-----	-----	159,92	11,22
131,37	13,70	117,72	12,53	133,34	14,42	-----	-----	159,50	11,19
132,69	13,73	116,95	12,59	132,45	14,45	-----	-----	159,92	11,22
134,28	13,76	116,06	12,96	131,77	14,51	-----	-----	160,19	11,24
136,01	13,79	115,26	13,07	131,61	14,85	-----	-----	160,44	11,27
137,81	13,85	114,56	13,13	130,74	14,88	-----	-----	160,60	11,70
138,96	14,28	113,98	13,16	129,41	14,93	-----	-----	160,44	11,73
139,99	14,33	113,50	13,22	128,38	15,08	-----	-----	159,92	11,76
141,19	14,36	112,54	13,59	127,67	15,13	-----	-----	158,44	11,82
142,13	14,42	111,70	13,68	127,41	15,42	-----	-----	157,61	11,90
143,14	14,45	-----	-----	127,37	15,45	-----	-----	156,71	12,27
144,22	14,79	-----	-----	127,03	15,48	-----	-----	155,66	12,30
145,33	14,88	-----	-----	125,43	15,51	-----	-----	154,77	12,33
146,31	14,93	-----	-----	124,72	15,88	-----	-----	154,18	12,39
147,43	14,99	-----	-----	124,31	15,94	-----	-----	153,85	12,42
148,10	15,05	-----	-----	123,99	15,99	-----	-----	153,46	12,79
149,55	15,08	-----	-----	123,26	16,08	-----	-----	152,95	12,82
149,81	15,42	-----	-----	122,51	16,19	-----	-----	152,38	13,05
150,07	15,54	-----	-----	121,77	16,42	-----	-----	151,65	13,10
151,93	15,59	-----	-----	120,11	16,48	-----	-----	150,45	13,16
152,70	15,62	-----	-----	-----	-----	-----	-----	148,30	13,36
154,77	15,65	-----	-----	-----	-----	-----	-----	144,86	13,53



Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3		Muestra 4		Muestra 5	
Fuerza (Kn)	Deformación (mm)								
153,96	19,54	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
153,90	19,60	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
154,00	19,88	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Fuente: Elaborado a partir de datos de Laboratorio de resistencia de materiales y sísmica - UFPS Ocaña.

## Anexo 4. Esfuerzo vs deformación en las muestras

Tabla 5. Muestras de deformación vs esfuerzo

Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3		Muestra 4		Muestra 5	
Deformación (mm)	Esfuerzo (MPa)								
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,72	0,00	0,14	0,00	0,00	0,00	0,20	0,00	0,00	0,01
1,34	0,00	0,86	0,00	0,29	0,01	0,92	0,00	0,14	0,06
2,06	0,00	1,00	0,00	1,20	0,03	1,49	0,01	0,74	0,10
2,69	0,00	2,06	0,01	1,77	0,07	2,06	0,07	0,77	0,15
2,83	0,00	2,15	0,05	1,97	0,11	2,69	0,20	1,32	0,16
3,92	0,11	2,78	0,13	2,57	0,15	3,35	0,28	1,89	0,31
3,98	0,29	3,43	0,22	3,15	0,22	3,52	0,33	1,97	0,37
4,06	0,35	3,95	0,32	3,81	0,33	4,06	0,48	2,46	0,55
5,04	0,62	4,35	0,33	4,29	0,34	4,46	0,77	2,89	0,66
5,29	0,81	4,92	0,59	4,75	0,40	4,55	1,17	3,09	0,80
5,75	0,89	5,01	0,86	5,32	0,44	5,06	1,29	3,32	0,85
5,89	1,19	5,55	1,19	5,87	0,55	5,12	1,49	3,75	1,12
5,95	1,32	5,58	1,37	6,38	0,60	5,18	1,77	3,81	1,22
6,47	1,51	5,98	1,57	6,84	0,85	5,21	1,99	3,86	1,28
6,81	1,79	6,01	1,85	7,18	1,02	5,24	2,31	4,32	1,45
6,90	1,85	6,04	2,07	7,30	1,21	5,32	2,54	4,32	1,51
6,92	2,10	6,52	2,23	7,72	1,30	5,72	2,75	4,35	1,69
6,95	2,16	6,55	2,36	7,81	1,41	5,81	2,97	4,78	1,79
7,47	2,32	6,58	2,51	7,84	2,04	6,12	3,15	4,81	1,83
7,50	2,36	6,61	2,82	8,24	2,10	6,18	3,35	4,84	2,02
7,52	2,47	6,72	2,86	8,35	2,24	6,27	3,58	4,86	2,12
7,78	2,53	7,01	2,90	8,41	2,45	6,38	3,80	4,89	2,16
7,87	2,55	7,07	3,15	8,44	2,62	6,44	4,31	5,35	2,39
7,90	2,60	7,18	3,19	8,50	2,98	6,52	4,50	5,41	2,48
7,95	2,62	7,24	3,38	8,84	3,04	6,75	4,68	5,72	2,55
8,44	2,63	7,32	3,47	8,93	3,14	6,81	4,86	5,75	2,75
8,47	2,65	7,44	3,53	8,98	3,31	7,04	5,08	5,78	2,78
8,50	2,69	7,50	3,74	9,01	3,67	7,07	5,25	5,81	2,97
8,53	2,78	7,78	3,85	9,07	3,72	7,10	5,43	5,84	3,07
8,55	2,85	7,81	3,89	9,44	3,82	7,12	5,58	5,89	3,12

Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3		Muestra 4		Muestra 5	
Deformación (mm)	Esfuerzo (MPa)								
8,58	2,99	7,84	4,06	9,44	4,00	7,15	5,75	6,41	3,36
8,93	3,02	7,87	4,10	9,50	4,31	7,55	5,89	6,41	3,48
9,16	3,11	8,04	4,27	9,81	4,39	7,58	6,03	6,44	3,56
9,18	3,17	8,27	4,37	9,87	4,50	7,61	6,19	6,47	3,79
9,24	3,26	8,33	4,42	9,90	4,67	7,64	6,31	6,52	3,88
9,30	3,35	8,38	4,61	9,90	4,96	7,67	6,42	6,87	4,10
9,36	3,47	8,55	4,69	9,93	5,01	7,70	6,51	6,92	4,15
9,41	3,57	8,58	4,73	9,98	5,20	8,04	6,56	6,95	4,40
9,81	3,63	8,61	4,92	10,41	5,24	8,07	6,63	7,21	4,45
9,84	3,83	8,73	5,00	10,44	5,42	8,07	6,73	7,24	4,72
9,87	3,93	8,87	5,05	10,47	5,47	8,50	6,82	7,30	4,78
9,90	4,04	9,01	5,22	10,50	5,62	8,53	6,90	7,32	4,84
9,90	4,11	9,16	5,29	10,53	5,69	8,55	6,99	7,35	5,23
9,96	4,30	9,21	5,32	10,96	5,74	8,58	7,10	7,81	5,28
10,41	4,40	9,27	5,46	10,99	5,91	8,61	7,17	7,81	5,54
10,47	4,46	9,30	5,53	11,01	5,98	9,01	7,23	7,84	5,61
10,47	4,65	9,61	5,61	11,07	6,08	9,04	7,31	7,87	5,71
10,50	4,74	9,73	5,69	11,39	6,17	9,07	7,37	7,90	6,02
10,53	4,79	9,76	5,74	11,47	6,28	9,13	7,42	7,92	6,06
10,61	4,98	9,78	5,88	11,53	6,36	9,16	7,48	8,01	6,28
11,07	5,07	9,84	5,95	11,62	6,39	9,56	7,53	8,50	6,34
11,10	5,12	9,90	6,03	11,67	6,51	9,58	7,57	8,53	6,41
11,10	5,28	9,93	6,10	11,73	6,57	9,61	7,59	8,55	6,72
11,13	5,36	9,96	6,16	12,04	6,63	9,64	7,61	8,58	6,85
11,16	5,42	10,44	6,22	12,10	6,69	9,73	7,62	8,64	6,90
11,64	5,59	10,53	6,28	12,13	6,75	10,01	7,64	9,07	7,09
11,70	5,67	10,56	6,31	12,16	6,80	10,13	7,65	9,13	7,16
11,73	5,77	10,59	6,34	12,25	6,85	10,19	7,64	9,16	7,21
11,79	5,82	10,61	6,36	12,53	6,89	10,41	7,61	9,18	7,35
11,82	5,97	10,64	6,37	12,56	6,92	10,47	7,57	9,24	7,41
11,845	6,05	10,67	6,372	12,789	6,936	10,528	7,52	9,813	7,46
12,27	6,15	10,70	6,39	12,87	6,97	10,56	7,47	9,87	7,53
12,36	6,20	11,24	6,40	12,93	6,98	10,73	7,44	9,93	7,55
12,42	6,34	11,33	6,40	13,16	6,98	11,01	7,42	9,98	7,64

Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3		Muestra 4		Muestra 5	
Deformación (mm)	Esfuerzo (MPa)								
12,47	6,43	11,39	6,38	13,19	6,98	11,04	7,38	10,04	7,65
12,47	6,50	11,44	6,36	13,22	6,98	11,07	7,35	10,07	7,70
12,50	6,58	11,47	6,34	13,48	6,99	11,10	7,32	10,10	7,71
12,53	6,65	11,84	6,33	13,53	7,00	11,13	7,27	10,13	7,72
12,53	6,78	11,90	6,32	13,56	7,01	11,59	7,25	10,61	7,72
12,56	6,85	11,93	6,32	13,59	7,03	11,62	7,21	10,64	7,73
12,59	6,93	11,93	6,32	13,99	7,05	11,64	7,17	10,64	7,75
13,30	7,01	12,02	6,29	14,02	7,07	----	----	10,67	7,77
13,33	7,09	12,39	6,23	14,05	7,08	----	----	10,67	7,80
13,36	7,13	12,45	6,17	14,08	7,09	----	----	10,70	7,83
13,39	7,17	12,50	6,14	14,36	7,09	----	----	11,19	7,86
13,70	7,23	12,53	6,11	14,42	7,06	----	----	11,19	7,88
13,73	7,30	12,59	6,07	14,45	7,01	----	----	11,22	7,90
13,76	7,39	12,96	6,02	14,51	6,98	----	----	11,24	7,91
13,79	7,48	13,07	5,98	14,85	6,97	----	----	11,27	7,93
13,85	7,58	13,13	5,95	14,88	6,92	----	----	11,70	7,93
14,28	7,64	13,16	5,92	14,93	6,85	----	----	11,73	7,93
14,33	7,70	13,22	5,89	15,08	6,80	----	----	11,76	7,90
14,36	7,77	13,59	5,84	15,13	6,76	----	----	11,82	7,83
14,42	7,82	13,68	5,80	15,42	6,74	----	----	11,90	7,79
14,45	7,87	----	----	15,45	6,74	----	----	12,27	7,74
14,79	7,93	----	----	15,48	6,72	----	----	12,30	7,69
14,88	7,99	----	----	15,51	6,64	----	----	12,33	7,65
14,93	8,05	----	----	15,88	6,60	----	----	12,39	7,62
14,99	8,11	----	----	15,94	6,58	----	----	12,42	7,60
15,05	8,15	----	----	15,99	6,56	----	----	12,79	7,58
15,08	8,23	----	----	16,08	6,52	----	----	12,82	7,56
15,42	8,24	----	----	16,19	6,48	----	----	13,05	7,53
15,54	8,26	----	----	16,42	6,45	----	----	13,10	7,49
15,59	8,36	----	----	16,48	6,36	----	----	13,16	7,43
15,62	8,40	----	----	----	----	----	----	13,36	7,33
15,65	8,51	----	----	----	----	----	----	13,53	7,16
15,68	8,55	----	----	----	----	----	----	13,65	6,94
15,71	8,64	----	----	----	----	----	----	13,68	6,61
16,16	8,71	----	----	----	----	----	----	13,70	6,44

Muestra 1		Muestra 2		Muestra 3		Muestra 4		Muestra 5	
Deformación (mm)	Esfuerzo (MPa)								
16,19	8,77	----	----	----	----	----	----	13,76	6,20
16,22	8,85	----	----	----	----	----	----	----	----
16,28	8,93	----	----	----	----	----	----	----	----
16,59	9,00	----	----	----	----	----	----	----	----
16,62	9,09	----	----	----	----	----	----	----	----
16,62	9,13	----	----	----	----	----	----	----	----
16,65	9,14	----	----	----	----	----	----	----	----
16,68	9,18	----	----	----	----	----	----	----	----
16,74	9,17	----	----	----	----	----	----	----	----
17,19	9,14	----	----	----	----	----	----	----	----
17,22	9,13	----	----	----	----	----	----	----	----
17,28	9,13	----	----	----	----	----	----	----	----
17,37	9,14	----	----	----	----	----	----	----	----
17,62	9,17	----	----	----	----	----	----	----	----
17,65	9,22	----	----	----	----	----	----	----	----
17,71	9,26	----	----	----	----	----	----	----	----
17,74	9,31	----	----	----	----	----	----	----	----
18,17	9,36	----	----	----	----	----	----	----	----
18,22	9,38	----	----	----	----	----	----	----	----
18,25	9,38	----	----	----	----	----	----	----	----
18,31	9,32	----	----	----	----	----	----	----	----
18,37	9,31	----	----	----	----	----	----	----	----
18,65	9,27	----	----	----	----	----	----	----	----
18,71	9,22	----	----	----	----	----	----	----	----
18,83	9,19	----	----	----	----	----	----	----	----
18,88	9,18	----	----	----	----	----	----	----	----
19,00	9,10	----	----	----	----	----	----	----	----
19,11	8,91	----	----	----	----	----	----	----	----
19,20	8,70	----	----	----	----	----	----	----	----
19,48	8,54	----	----	----	----	----	----	----	----
19,51	8,48	----	----	----	----	----	----	----	----
19,54	8,47	----	----	----	----	----	----	----	----
19,60	8,47	----	----	----	----	----	----	----	----
19,88	8,47	----	----	----	----	----	----	----	----

Fuente: Elaborado a partir de datos de Laboratorio de resistencia de materiales y sísmica - UFPS Ocaña.



## EPÍLOGO

En el texto se hace énfasis a la determinación de esfuerzo y deformación como una introducción a los métodos usados para el análisis y diseño de estructuras, marcos y máquinas sometidas a cargas.

El esfuerzo normal se obtuvo dividiendo la magnitud de la carga aplicada por el área transversal del elemento; este representa el esfuerzo promedio a través de la sección más que el esfuerzo en un punto específico de la sección. En la práctica, por lo tanto, se supone uniforme la distribución de los esfuerzos normales en un elemento cargado axialmente, excepto en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas. Esto hace que el esfuerzo nominal evaluado en el texto sea una aproximación del esfuerzo real.



# GLOSARIO

**Articulación:** son estructuras que funcionan como un punto de unión con la viga y genera dos componentes de fuerza.

**Carga:** son las fuerzas que tienen que soportar los elementos.

**Deformación unitaria:** es el cociente entre el alargamiento total y la longitud inicial de la probeta.

**Desplazamiento:** el cambio de posición de un punto y de un elemento estructural al soportar una carga.

**Deflexión:** es el grado en el que un elemento estructural se desplaza bajo la aplicación de una fuerza o carga.

**Elongación:** es la relación entre el aumento de la longitud después de la rotura y la longitud inicial del material.

**Esfuerzo:** es la relación entre la fuerza aplicada y la sección que la resiste.

**Estricción:** es la máxima disminución del área de la sección transversal del material con respecto al área primitiva.

**Equilibrio:** estado en el que el conjunto de acciones sobre un cuerpo no produce movimientos globales y en el que la resultante del sistema de fuerzas es nula.

**Esfuerzo último:** es la máxima ordenada de la gráfica esfuerzo vs deformación unitaria. Se conoce como resistencia a la tracción.

**Límite de proporcionalidad:** es el máximo esfuerzo hasta donde la tensión es función lineal de la deformación.

**Límite de fluencia:** es aquel en el que se presenta un alargamiento notable sin existir un aumento de carga.

**Límite elástico:** máximo esfuerzo que puede soportar un material sin sufrir una deformación permanente.

**Punto de rotura:** esfuerzo para el que se presenta la rotura del material.

**Resiliencia:** capacidad de absorber energía en la zona elástica.

**Tenacidad:** capacidad de un material para absorber energía en la zona plástica.

**Zona elástica:** región de la curva esfuerzo vs deformación unitaria que va desde el origen hasta el límite de proporcionalidad.

**Zona plástica:** región de la curva esfuerzo vs deformación unitaria que va desde el límite de proporcionalidad hasta el punto de rotura.



# ESFUERZO Y DEFORMACIÓN CON APLICACIONES

Tipos de esfuerzo - deformación por carga

En el libro se estudian los esfuerzos y deformaciones que se presentan en estructuras, marcos y máquinas bajo la acción de cargas, proporcionando a los estudiantes de ingeniería los principios y conceptos de resistencia de materiales tales como esfuerzo, deformación, propiedades mecánicas, desplazamientos y análisis de sistemas estáticamente indeterminados.

Además, se muestran los resultados de los ensayos compresivos a los que son sometidos las muestras de la ladrillera la Palma, según lo establece la norma técnica colombiana NTC-4017:2005 y se presentan los conceptos de esfuerzo normal, deformación por carga, factor de seguridad para el cálculo de carga permisible y el análisis de situaciones indeterminadas.

Dirigido a los estudiantes de los programas de ingeniería y tecnología que en su formación requieran el estudio de la resistencia de materiales y a los docentes universitarios como material de apoyo para sus clases.



Universidad Francisco  
de Paula Santander

Vigilada Mineducación



**GIGMA**

Grupo de Investigación en Construcción  
Geotecnia y Medio Ambiente

## Incluye

- ▶ Conceptos previos de trigonometría, cálculo y estática que le permiten al estudiante la interpretación de los conceptos matemáticos.
- ▶ Problemas reales que facilitan el entendimiento y la interpretación de los fenómenos de la naturaleza y su representación.
- ▶ Diagramas de cuerpo libre.  
Solución de problemas presentados de forma detallada y por niveles de dificultad.

### Gustavo Guerrero Gómez

Magíster en Sistemas Energéticos Avanzados de la UDES especialista en Práctica Docente Universitaria de la UFPSO e Ingeniero mecánico de la UFPS. Profesor Asociado de la UFPSO. Es autor de varios artículos y ponente en eventos nacionales e internacionales y miembro del Grupo de Investigación en Tecnología y Desarrollo en Ingeniería (GITYD) de la UFPSO, categoría A según Minciencias.

### Nelson Afanador García

Doctor en Estructuras de la Universidad de Brasilia (Brasil), magíster en Ingeniería Civil con énfasis en Estructuras de la Uniandes e Ingeniero Civil de la Universidad de La Salle. Profesor Asociado de la UFPSO. Autor de varios artículos y libros, ponente en congresos nacionales e internacionales y miembro del Grupo de Investigación en Tecnología y Desarrollo en Ingeniería (GITYD) de la UFPSO, categoría A según Minciencias.

### Romel Jesús Gallardo Amaya

Magíster en Geotecnia de la UIS, especialista en Práctica Docente Universitaria de la UFPSO, especialista en Ingeniería Ambiental e Ingeniero Civil de la UIS. Profesor asociado del Departamento de Ingeniería Civil de la UFPSO. Director del grupo de investigación GIGMA, categoría B, e investigador asociado según clasificación de Minciencias.

ISBN 978-958-503-336-8



e-ISBN 978-958-503-337-5