

# **Aplicaciones de la teoría de Fourier al estudio de la ecuación del calor**

**Con ejercicios resueltos**

**Claudia Marcela Durán Chinchilla  
Christian Nolasco Serna  
José Julián Cadena Morales**

INVESTIGACIÓN  
EDUCATIVA &  
PEDAGÓGICA  
IBEROAMERICANA

editorial  
**redipe**

**UFPS** Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Vigilada Mineducación

**Título original**  
**Aplicaciones de la teoría de Fourier al estudio de la ecuación del calor**

**Autores:**

CLAUDIA M. DURÁN CHINCHILLA

CHRISTIAN NOLASCO SERNA

JOSÉ JULIÁN CADENA MORALES

**Universidad Francisco de Paula Santander**  
**Ocaña - Colombia**

**Editorial**

REDIPE Red Iberoamericana de Pedagogía

Capítulo Estados Unidos

Bowker Books in Print

**Editor**

Julio César Arboleda Aparicio

**Diagramación**

Oliver García Ramos

**ISBN: 978-1-951198-95-4**

Primera edición: Noviembre 2021

® Todos los derechos reservados

**Comité Editorial**

**Valdir Heitor Barzotto**, Universidad de Sao Paulo, Brasil

**Carlos Arboleda A.** PhD Investigador Southern Connecticut State University, Estados Unidos

**Agustín de La Herrán Gascón**, Ph D. Universidad Autónoma de Madrid, España

**Mario Germán Gil Claros**, Grupo de Investigación Redipe

**Rodrigo Ruay Garcés**, Chile. Coordinador Macroproyecto Investigativo Iberoamericano Evaluación Educativa

**Julio César Arboleda**, Ph D. Dirección General Redipe. Grupo de investigación Educación y Desarrollo humano, Universidad de San Buenaventura

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley, la reproducción (electrónica, química, mecánica, óptica, de grabación o de fotocopia), distribución, comunicación pública y transformación de cualquier parte de ésta publicación -incluido el diseño de la cubierta- sin la previa autorización escrita de los titulares de la propiedad intelectual y de la Editorial. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual.

Los Editores no se pronuncian, ni expresan ni implícitamente, respecto a la exactitud de la información contenida en este libro, razón por la cual no puede asumir ningún tipo de responsabilidad en caso de error u omisión.

Red Iberoamericana de Pedagogía

**[editorial@redipe.org](mailto:editorial@redipe.org)**

**[www.redipe.org](http://www.redipe.org)**

Impreso en Cali, Colombia

*Printed in Cali, Colombia*

# CONTENIDO

## 9 **Capítulo 1.**

### 9 **Modelamiento mediante ecuaciones diferenciales.**

#### 9 **1.1** Modelamiento para la ecuación del calor.

## 13 **Capítulo 2.**

### 13 **Series Fourier.**

#### 13 **2.1** El método de Fourier.

#### 20 **2.2** La serie de Fourier del seno y el coseno

## 25 **Capítulo 3.**

### 25 **Teoría Sturm-Liouville.**

#### 25 **3.1** Problemas Sturm-Liouville.

#### 30 **3.2** Ejemplos básicos de Problemas d Sturm-Liouville

## 35 **Capítulo 4.**

### 35 **Solución de la ecuación del calor.**

#### 35 **4.1** Separación de variables.

*Agradecimiento a la Universidad Francisco de Paula Santander  
por su apoyo en los procesos académicos e investigativos y  
por permitirnos hacer una reflexión pedagógica y educativa,  
que de una u otra manera sea un aporte a los que  
se preocupan por la calidad educativa*

**De los Autores**

# PRÓLOGO

Este libro ha sido escrito como el resultado de un conjunto de ideas que con el tiempo han sido importantes en la enseñanza de las matemáticas en cursos de cálculo vectorial y análisis numérico en la universidad Francisco de Paula Santander seccional Ocaña. El estudio de las ecuaciones diferenciales ha sido un área de las matemáticas que ha sido relevante durante 300 años y es parte fundamental en las herramientas para comprender las ciencias físicas. En este libro, nos ocuparemos de las series de Fourier en el contexto del modelamiento de fenómenos térmicos que hacen uso de la ecuación del calor. Este texto está, dirigido a estudiantes que inician su estudio de asignaturas del núcleo básico profesional en carreras de ingeniería y estén familiarizados con los conceptos del cálculo y el álgebra elemental. En el primer capítulo se presenta la deducción matemática de la ecuación del calor, en el segundo capítulo los elementos introductorios a la teoría de Fourier. El tercer capítulo introduce la teoría de Sturm-Liouville para solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias. El último capítulo relaciona los capítulos anteriores para solucionar la ecuación del calor en diferentes contextos. Es importante resaltar que se introducen una variedad de ejemplos explicativos sobre los conceptos expuestos. Al final del libro un apéndice con algunos algoritmos de los ejercicios desarrollados a lo largo del libro.

***Christian Nolasco Serna***

- 1 -

# MODELAMIENTO MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES

Varias ideas en las matemáticas son desarrolladas en el marco de las ciencias físicas, y las ecuaciones diferenciales permiten adecuar un lenguaje adecuado para formular esa idea. Al contrario, desarrollos en las matemáticas permiten desarrollar nuevos avances en la ciencia. A través de los años matemáticos y científicos extienden sus metodologías para incluir la mayor cantidad de áreas de la ciencia y la tecnología, con lo cual ha surgido un paradigma conocido como **modelamiento**. *Un modelo matemático* es una ecuación, o un conjunto de ecuaciones, cuyas soluciones describen el comportamiento físico relacionado con sistemas físicos, por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell están fundamentadas en fenómenos electromagnéticos. En general, un modelo matemático es una descripción simplificada que expresa la realidad en términos matemáticos. El modelamiento matemático involucra observación, selección de variables relevantes, formulación de las ecuaciones, análisis de las ecuaciones y simulación, y finalmente, validación del modelo y predicción.

## **1.1 Modelamiento para la conducción del calor.**

Supongamos que una cantidad de energía calórica se encuentra en una región  $R$  en el espacio flotando, sea  $T(x,y,z,t)$  la función de temperatura en función de tiempo  $t$  y el punto  $(x,y,z)$  en  $R$ . Se asume que la región es homogénea y caracterizada por una constante de calor específico  $c$  y una constante de

densidad  $\mu$ . Supongamos que una bola  $B$  de tamaño infinitesimal esta contenida en  $R$ . Al aplicar el principio de balance de energía que asegura que la razón de cambio total de la energía calórica en  $B$  debería ser igual a la razón de cambio del flujo a través de la frontera en adición de la energía generada en las fuentes de  $B$ . La cantidad total de calor en un pequeño volumen  $dV=dx dy dz$  es  $c \mu T dV$ , por lo tanto la cantidad de energía calórica en  $B$  esta dada por la integral en varias dimensiones

$$\text{Cantidad de energía calórica en } B = \iiint_B c \mu T dV.$$

Al asumir que el calor generado por fuentes está dado por la función  $f(x,y,z,t)$ , donde  $f dV$  es la razón a la que el calor es generado en  $f dV$ ; por lo tanto, la razón a la cual el calor generado en la totalidad de  $B$  es

$$\text{Cantidad de energía calórica producida en } B = \iiint_B f dV.$$

Es importante resaltar que  $f$  tiene unidades de energía por unidad de volumen, y por unidad de tiempo. A continuación, se introduce el campo vectorial que representa el flujo de calor  $\psi(x,y,z,t)$ ; su dirección corresponde a la dirección del flujo en la posición  $(x,y,z)$  en  $t$ . La razón a la que el flujo cruza un elemento de superficie  $dA$  orientada por el vector normal  $\mathbf{n}$  es  $\psi \cdot \mathbf{n} dA$ . En consecuencia, la razón de cambio de la energía cruzando la frontera de  $B$ , denotada es  $\partial B$  la integral de superficie

$$\int_{\partial B} \psi \cdot \mathbf{n} dA.$$

Por lo tanto, la ley de balance es

$$\frac{d}{dt} \iiint_B c \mu T dV = - \int_{\partial B} \psi \cdot \mathbf{n} dA + \iiint_B f dV \quad (1.1)$$

Al aplicar el teorema de la divergencia a la ley (1.1), permite representar la integral de flujo como una integral de volumen.

$$d/dt \iiint_B c \mu T dV = -d \iiint_B \text{div}(\psi) dV + \iiint_B f dV$$

Ahora al colocar la derivada del tiempo bajo el signo de la integral en el lado izquierdo y finalmente organizando lo términos bajo una integral de volumen se genera

$$\iiint_B (c \mu T_t + \text{div}(\psi) - f) dV = 0$$

Ya que la ley de balance de energía se verifica para cada esfera  $B$  en el interior de  $R$ , entonces es posible generar la ecuación diferencial

$$c \mu T_t + \text{div}(\psi) = f \quad (1.2)$$

Para todo  $t$  y todo  $(x, y, z)$  en  $R$ . La ley de conducción del calor de Fourier asegura que

$$\psi = -\kappa \nabla(T) \quad (1.3)$$

La constante de proporcionalidad representa la conductividad térmica. Al sustituir la (1.3) en (1.2) y usando la identidad  $\text{div}(\nabla(T)) = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}$ , se genera **la ecuación del calor en tres dimensiones**

$$c \mu T_t - \kappa(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) = f \quad (1.4)$$

Finalmente, al organizar la ecuación (1.4), se genera la **ecuación de la conducción del calor**

$$T_t - \alpha(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) = [1/(c \mu)] f \quad (1.5)$$

donde la constante  $\alpha = \kappa/(c \mu)$  es conocida como constante de difusividad.

Asumiendo que se tiene el fenómeno físico de transferencia de calor en una barra de longitud  $L$  en una dimensión sin fuentes internas de generación de calor, (1.5) tiene la forma

$$T_t = \alpha T_{xx}, \quad 0 < x < L \quad (1.6)$$



A continuación, vamos a listar un conjunto de modelos de conducción de calor que serán desarrollados a lo largo del trabajo.

**Ejemplo 1.1.** El modelo matemático que describe el modelo físico de conducción de calor en una dimensión sin generación de calor, con límites laterales aislados, y temperatura definida en la frontera es

$$T_t(x,t) = \alpha T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1.7)$$

$$T(0,t) = h(t), \quad T(L,t) = g(t) \quad t > 0 \quad (1.8)$$

$$T(0,t) = f(x) \quad 0 < x < L \quad (1.9)$$

La igualdad (1.8) representa **las condiciones de la frontera** y (1.9) representa **la condición inicial**.

**Ejemplo 1.2.** El modelo matemático que describe el modelo físico de conducción de calor en una dimensión sin generación de calor, con límites laterales aislados, y flujo de calor en la frontera es

$$T_t(x,t) = \alpha T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1.10)$$

$$T_x(0,t) = h(t), \quad T_x(L,t) = g(t) \quad t > 0 \quad (1.11)$$

$$T(0,t) = f(x) \quad 0 < x < L \quad (1.12)$$

La igualdad (1.11) representa **las condiciones de la frontera** y (1.12) representa **la condición inicial**.

- 2 -

# SERIES DE FOURIER

Es bien conocido que una función con infinitas derivadas puede ser expresada en una serie de Taylor alrededor de un punto en un intervalo definido. La serie tiene la forma

$$T(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (2.1)$$

donde los coeficientes  $a_n = \frac{T^{(n)}(x_0)}{n!}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Cuando ciertas condiciones se verifican, entonces la serie de la ecuación (2.1) converge punto a punto en un intervalo abierto centrado en  $x_0$ . En este capítulo se estudia un tipo diferente de expansión, que es particularmente útil para estudiar la ecuación del calor y que puede ser definida para funciones con un grado menor de suavidad.

## 2.1 El método de Fourier

La serie de Fourier es una expresión de la forma

$$T(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (2.2)$$

donde  $L$  es un número positivo y  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son coeficientes constantes.

**2.1 Definición.** Una función  $T$  definida sobre  $\mathbb{R}$  es llamada periodica si existe un número  $P > 0$  tal que

$$T(x+p) = T(x) \quad \text{Para todo } x \text{ en } \mathbb{R}.$$

El número más pequeño  $P$  con la anterior propiedad es llamado el *periodo de T*. Es claro a partir de la definición 2.1, que una función periódica también satisface

$$T(x+np) = T(x) \quad \text{Para cualquier entero } n \text{ y todo } x \text{ en } \mathbb{R}.$$

**2.2 Ejemplo.** Las funciones  $\text{sen}(x)$  y  $\text{cos}(x)$  son funciones con periodo  $2\pi$ , ya que para todo  $x$  en  $\mathbb{R}$

$$\text{sen}(x+2\pi) = \text{sen}(x),$$

$$\text{cos}(x+2\pi) = \text{cos}(x).$$

Las funciones  $\text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  y  $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  que aparecen en (2.2) tienen periodo  $2L$ , ya que para todo entero positivo  $n=1,2,\dots,$

$$\text{cos}\left(\frac{n\pi(x+2L)}{L}\right) = \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right) = \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.3)$$

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi(x+2L)}{L}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (2.4)$$

Al partir de (2.3) y (2.4) es natural asumir que la función  $T$  tenga periodo  $2L$  para que exista la serie de Fourier (2.2) asociada. Para calcular la serie (2.2) se hace necesario calcular los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$ , además investigar la convergencia de la serie.

Mediante un calculo directo es posible verificar

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, n = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ L, & n = m \end{cases}, n, m = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ L, & n = m \end{cases}, n, m = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, n, m = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Suponiendo que (2.2) es formalmente una igualdad, al integrar término a término sobre el intervalo  $[-L, L]$  y usando (2.5) se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L T(x) dx \quad (2.9)$$

Al multiplicar (2.2) por  $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$  integrando la expresión en el intervalo  $[-L, L]$ , y teniendo en cuenta (2.6), (2.7) y (2.8), se observa que todas las integrales del lado derecho se anulan con la excepción cuando el índice de suma- ción  $n=m$ . Lo anterior permite definir

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L T(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Finalmente, al multiplicar (2.2) por  $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$  y repetir el procedimiento anterior se genera

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L T(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Las cantidades  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  definidas por (2.9), (2.10) y (2.11) serán llamadas los *coeficientes de Fourier de T*.

**2.3 Definición.** Una función  $T$  se dice *continua por partes* en un intervalo  $[a,b]$ , si es continua en todos los puntos del intervalo  $[a,b]$  salvo en un conjunto finito donde se presentan discontinuidades de salto; lo anterior indica que un punto de discontinuidad  $x$ , la función tiene diferentes límites laterales  $T(x+)$  y  $T(x-)$ .

**2.4 Definición.** Si las funciones  $T$  y  $T'$  son continuas en  $[a,b]$ , entonces se llama *suave* sobre  $[a,b]$ . Si por lo menos una de las funciones  $T$  y  $T'$ , es continua por partes sobre  $[a,b]$ , entonces  $T$  se dice que es *suave por partes* sobre  $[a,b]$ .

**2.5 Nota.** Si es continua por partes en  $[-L,L]$ , entonces los valores de  $T$  en los puntos de discontinuidad no afectan la construcción de la serie de Fourier. Con mayor precisión,  $\int_{-L}^L T(x)dx$  existe independiente de los valores asignados a las discontinuidades de la función  $T$

**2.6 Teorema de la convergencia de la serie de Fourier.** Si  $T$  es una función suave por partes sobre  $[-L,L]$ , entonces la serie de Fourier converge punto a punto a  $T(x)$ , si la función es continua en  $x$ . En los puntos de discontinuidad de salto el valor de la serie es  $\frac{1}{2}(T(x-) + T(x+))$ .

**2.7 Ejemplo.** Considere la función definida por

$$T(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

calcular la serie de Fourier asociada a la función  $T(x)$ .

Al usar (2.9)-(2.11) con  $L = 1$  y la integración por partes, es posible encontrar que

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x + 1) dx = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T(x) \cos(n\pi x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x + 1) \cos(n\pi x) dx = \frac{1 - (-1)^n}{2\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T(x) \sen(n\pi x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x + 1) \sen(n\pi x) dx = \frac{-1}{2\pi n} \quad n = 1, 2, \dots$$

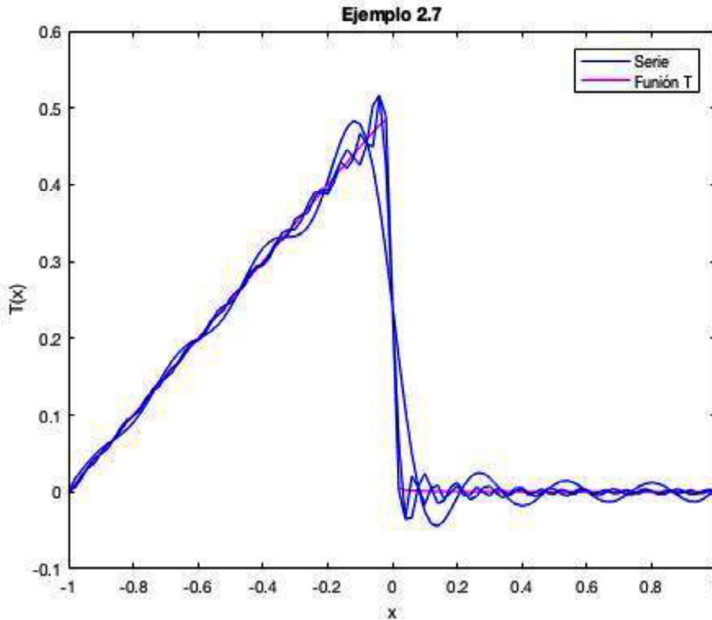
Al sustituir en (2.2) se genera la serie de Fourier

$$T(x) \sim \frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - (-1)^n}{2\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) + \frac{-1}{2\pi n} \operatorname{sen}(n\pi x) \right)$$

Al usar el teorema 2.6 en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  posible verificar que los valores de la serie del ejemplo anterior son

$$(\text{Convergencia}) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la serie de Fourier en relación con la función  $T(x)$ . En la simulación, en color azul, se consideran los valores de la serie para  $n = 7, 20, 30$



**2.8 Ejemplo.** Considere la función definida por

$$T(x) = \begin{cases} x & -1 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

calcular la serie de Fourier asociada a la función  $T(x)$ .

Al usar (2.9)-(2.11) con  $L = 1$  y la integración por partes, es posible encontrar que

**Aplicaciones de la teoría de Fourier al estudio de la ecuación del calor**

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T(x) dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^0 x dx + \int_{-1}^0 (2x - 1) dx \right) = -\frac{1}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T(x) \cos(n\pi x) dx = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 T(x) \text{sen}(n\pi x) dx = \frac{-2(-1)^{n-1}}{2\pi n} \quad n = 1, 2, \dots$$

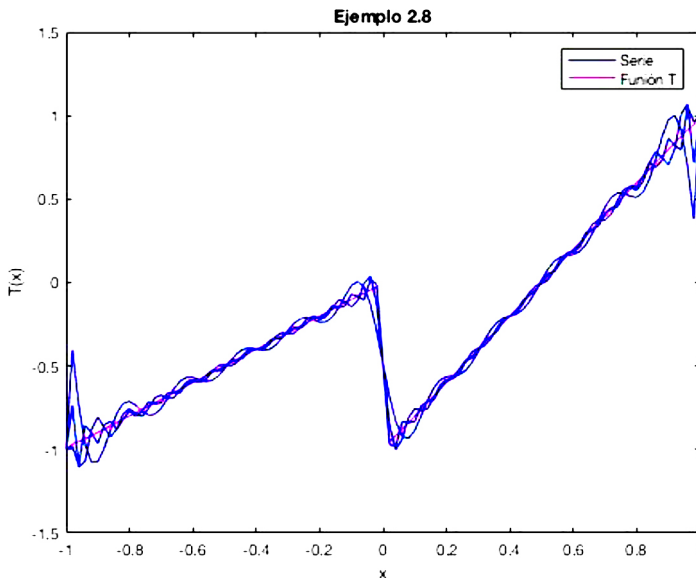
Al sustituir en (2.2) se genera la serie de Fourier

$$T(x) \sim -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) + \frac{-2(-1)^n - 1}{2\pi n} \text{sen}(n\pi x) \right)$$

Al usar el teorema 2.6 en el intervalo  $-2 \leq x \leq 2$  es posible verificar que los valores de la serie del ejemplo anterior son

$$(Convergencia) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \\ 2x - 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la serie de Fourier en relación con la función  $T(x)$ . En la simulación, en color azul, se consideran los valores de la serie para  $n = 10, 20, 30$ .



**2.9 Ejemplo.** Considere la función definida por

$$T(x) = \begin{cases} -1 & -2 \leq x < 0 \\ 2 - x & 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

calcular la serie de Fourier asociada a la función  $T(x)$

Al usar (2.9)-(2.11) con  $L = 1$  y la integración por partes, es posible encontrar que

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 T(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 T(x) \cos(n\pi x) dx = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 T(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{3-(-1)^n}{\pi n} \quad n = 1, 2, \dots$$

Al sustituir en (2.2) se genera la serie de Fourier

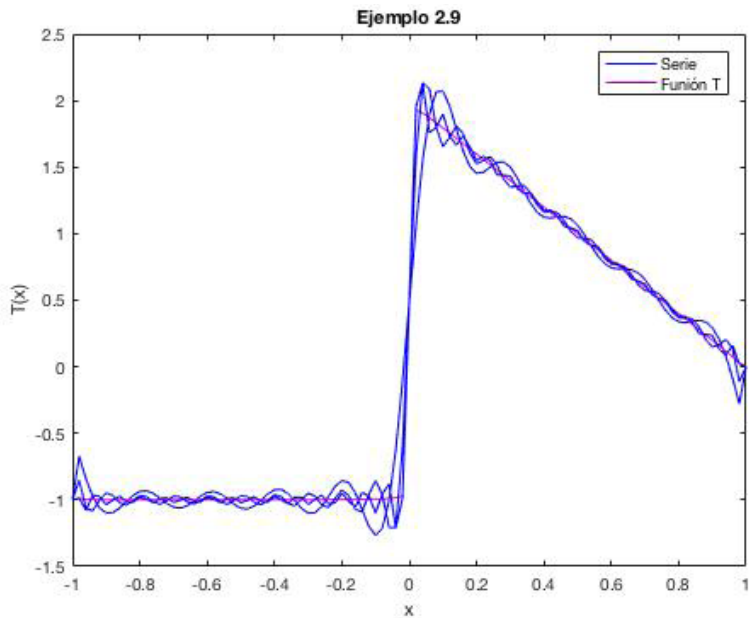
$$T(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2(1-(-1)^n)}{2\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{3-(-1)^n}{2\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right)$$

Al usar el teorema 2.6 en el intervalo  $-2 \leq x \leq 2$  es posible verificar que los valores de la serie del ejemplo anterior son

$$(\text{Convergencia}) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 2 - x & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la serie de Fourier en relación con la función  $T(x)$ . En la simulación, en color azul, se consideran los valores de la serie para





## 2.2 La serie de Fourier del seno y el coseno

Para alguna clase de funciones, la serie de Fourier (2.2) tiene una forma sencilla.

**2.10 Definición.** Una función  $T$  definida sobre un intervalo simétrico es llamada *impar* si  $T(-x) = -T(x)$  para todo  $x$  en el intervalo; si, por otro lado,  $T(-x) = T(x)$  para todo  $x$  en el intervalo, entonces  $T$  es llamada una función *par*.

**2.11 Ejemplo.** Las funciones  $\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , son impares. Las funciones  $\text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , son pares.

**2.12 Propiedades.** (i) El producto de dos funciones impares es par, el producto de dos funciones pares es par, y el producto de una función par por una función impar es impar.

(ii) Si  $T$  es impar sobre el intervalo  $[-L, L]$  entonces

$$\int_{-L}^0 T(x)dx = \int_L^0 T(-x)d(-x) = - \int_0^L T(x)dx;$$

por lo tanto,

$$\int_{-L}^L T(x)dx = \int_{-L}^0 T(x)d(x) + \int_0^L T(x)dx = 0;$$

Si  $T$  es par sobre el intervalo  $[-L,L]$  entonces

$$\int_{-L}^0 T(x)dx = \int_L^0 T(-x)d(-x) = \int_0^L T(x)dx;$$

por lo tanto,

$$\int_{-L}^L T(x)dx = \int_{-L}^0 T(x)d(x) + \int_0^L T(x)dx = 2 \int_0^L T(x)dx;$$

(iii) Si  $T$  es impar, entonces  $T(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  and por, las ecuaciones (2.10) y (2.11) y (ii), es posible concluir que  $a_n = 0, n = 0,1,2,\dots$ ; lo anterior es equivalente a que la serie de Fourier únicamente contiene términos de la función seno. Similarmente, si  $T$  es par, entonces, por 2.12(i),  $T(x)\sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  es impar, así se tiene  $b_n = 0, n = 0,1,2,\dots$ , lo anterior indica que la serie de Fourier de una función impar solo tiene términos de la función coseno, además de términos constante.

El inciso (iii) de las propiedades 2.12 implica que si  $T$  esta definida sobre  $[0,L]$ , entonces la función  $T$  se puede extender a una *serie del seno de Fourier*. Es posible construir una extensión de impar  $T$  desde  $[0,L]$  hasta  $[-L,L]$  haciendo  $T(-x) = -T(x)$  para todo  $x$  en  $[-L,L], x \neq 0$ , y  $T(0) = 0$ , Posteriormente, se define una función periódica de longitud  $2L$  extendida desde  $[-L,L]$  hasta  $R$ , con la

propiedad que  $T(x+2L) = T(x)$  para todo  $x$  en  $R$ . Finalmente, la serie del seno de Fourier esta definida de la forma

$$T(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.12)$$

donde, acorde a las observaciones (ii) y (iii), los coeficientes están dados por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L T(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

**2.13 Ejemplo** Considere la función

$$T(x) = 2 - x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Como se indica anteriormente, la extensión de esta función hasta  $[-1,1]$  se define por  $T(-x) = -T(x)$  para todo  $x$  en  $[-2,2]$ ,  $x \neq 0$ , y  $T(0) = 0$ , y La extensión hasta  $R$  de periodo  $2L = 4$ , de la función definida por  $T(x+4) = T(x)$  para todo  $x$  en  $R$ . Usando en (2.13) con  $L = 2$  es posible calcular que

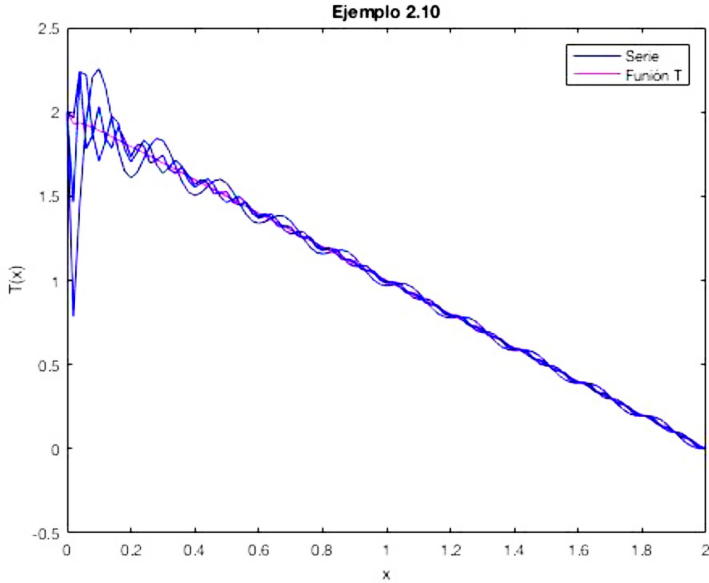
$$b_n = \int_0^2 (2 - x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{4(-1(-1)^n + 1)}{\pi n} + \frac{4(-1)^n}{\pi n}, n = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto,

$$T(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4(-1(-1)^n + 1)}{\pi n} + \frac{4(-1)^n}{\pi n} \right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Por el teorema 2.6,  $0 \leq x \leq 2$ ,

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la serie seno de Fourier en relación con la función  $T(x)$ . En la simulación, en color azul, se consideran los valores de la serie para  $n = 20, 40, 60$ .



Por la propiedad 2.12 (iii) una función definida sobre  $[0, L]$  puede ser extendida a la *serie coseno de Fourier* definida por

$$T(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.14)$$

donde, acorde a las observaciones (ii) y (iii), los coeficientes están dados por

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L T(x) dx, \quad (2.15)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L T(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

**2.14 Ejemplo** Considere la función

$$T(x) = 2 - x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

La serie coseno de Fourier esta definida por

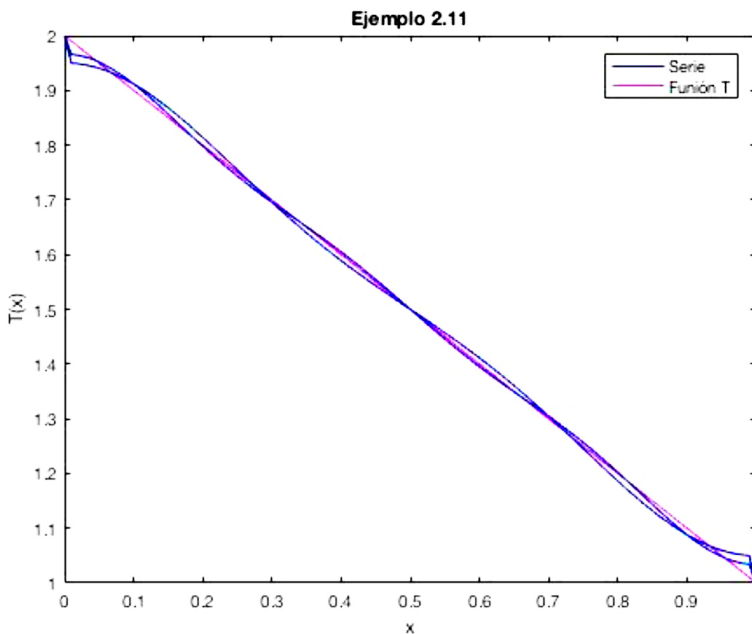
$$T(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) \left(\frac{2}{n^2\pi^2}\right) \cos(n\pi x)$$

donde,

$$a_0 = \int_0^1 2 - x \, dx = \frac{3}{2}$$

$$a_n = 2 \int_0^1 2 - x \cos(n\pi x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) \left(\frac{2}{n^2\pi^2}\right)$$

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la serie coseno de Fourier en relación con la función  $T(x)$ . En la simulación, en color azul, se consideran los valores de la serie para  $n = 3,4,5$



# Teoría Sturm-Liouville

Una clase particular de problemas que involucran ecuaciones de segundo orden son esenciales en el desarrollo de la solución de ecuaciones diferenciales parciales. En este capítulo se presenta una caracterización de tales problemas, la cual será ampliamente usada en los métodos para solucionar ecuaciones.

## 3.1 Problemas Sturm-Liouville

En lo que sigue  $I$  representa un intervalo, que podría ser abierto, cerrado, semi abierto, finito o infinito. Las funciones definidas sobre tales intervalos se asumen integrables.

**3.1 Definición** Sea  $C$  un espacio de funciones continuas definido sobre un intervalo  $I$ . Un operador diferencial lineal  $F$  actuando sobre  $C$  se llama *simétrico* sobre  $C$  si

$$\int_0^1 [f_1(x)(Ff_2)(x) - f_2(x)(Ff_1)(x)]dx = 0 \quad (3.1)$$

Para cualquier par de funciones  $f_1$  y  $f_2$  en  $C$

**3.2 Definición** Considere el espacio de las funciones continuas que son dos veces diferenciables sobre  $[a,b]$  e iguales a cero en  $x=a$  y  $x=b$ . Si  $F$  es el operador lineal definido por

$$F = \frac{d^2}{dx^2},$$

entonces, usando la integración por partes, es posible encontrar que para cualquier

$f_1$  y  $f_2$  en  $C$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b [f_1(Ff_2) - f_2(Ff_1)] dx &= \int_a^b (f_1 f_2'' - f_2 f_1'') dx \\ &= [f_1 f_2']_a^b - \int_a^b f_1' f_2' dx - [f_2 f_1']_a^b + \int_a^b f_2' f_1' dx = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $F$  es simétrica sobre  $C$ .

**3.3 Definición** Sea  $\rho$  una función definida sobre  $I$ , con la propiedad que  $\rho(x) > 0$  para todo  $x$  en  $I$ . Dos funciones  $f_1$  y  $f_2$ , definidas sobre  $I$ , se llaman ortogonales con peso  $\rho$  sobre  $I$  si

$$\int f_1(x) f_2(x) \rho(x) dx = 0.$$

Si  $\rho(x)=1$  entonces  $f_1$  y  $f_2$  se llaman *ortogonales*. Un conjunto de funciones que son dos a dos ortogonales sobre  $I$  se llaman *conjunto ortogonal*.

**3.4 Ejemplo.** Las funciones  $f_1(x) = 1$  y  $f_2(x) = x^2$  son ortogonales con peso  $\rho(x) = x^3$  sobre el intervalo  $[-1,1]$  ya que

$$\int_{-1}^1 x^2 x^3 dx = 0.$$

**3.5 Ejemplo.** Las funciones  $f_1(x)=1$  y  $f_2(x) = x$  son ortogonales con peso

$\rho(x) = \cos(2x)$  sobre el intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ya que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) dx = 0.$$

**3.6 Ejemplo.** Las funciones  $f_1(x) = \cos(2x)$  y  $f_2(x) = \sin(3x)$  son ortogonales sobre el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) \sin(3x) dx = 0.$$

**3.7 Definición.** Sea  $F$  operador lineal actuando sobre el espacio  $C$  de funciones definido sobre  $(a, b)$  Una ecuación de la forma

$$(Ff)(x) + \lambda \rho(x)f(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (3.2)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro y  $\rho$  es una función tal que  $\rho(x) > 0$  para todo  $C$  en  $(a, b)$  es llamado un *problema de eigenvalores*. Los parámetros  $\lambda$  para los cuales la ecuación (3.2) tienen soluciones no nulas en  $C$  son llamados *eigenvalores*; las correspondientes soluciones no nulas son llamadas *eigenfunciones*.

**3.8 Teorema.** Si el operador  $F$  del problema de eigenvalores (3.2) es simétrico, entonces:

- (i) Todos los eigenvalores  $\lambda$  son reales;
- (ii) Los eigenvalores forman una sucesión infinita  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ;
- (iii) Las eigenfunciones asociadas con los diferentes eigenvalores son ortogonales con peso  $\rho$  sobre  $(a, b)$ .

**3.9 Definición.** Sea  $[a, b]$  un intervalo, sean  $p, q$  y  $\rho$  funciones reales, y  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , y  $\alpha_4$  números reales tales que

- (i)  $f$  es continuamente diferenciable sobre  $[a, b]$  y  $p(x) > 0$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ ;



(ii)  $q$  y  $\rho$  son continuas en  $[a,b]$  y  $\rho(x) > 0$  para todo  $x$  en  $[a,b]$ ;

(iii)  $\alpha_1, \alpha_2$  no son cero simultáneamente y  $\alpha_3, \alpha_4$  no son cero simultáneamente.

Un problema de la forma

$$[p(x)f'(x)]' + q(x)f(x) + \lambda\rho(x)f(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (3.3)$$

con condiciones de frontera

$$\alpha_1 f(a) + \alpha_2 f'(a) = 0, \quad (3.4)$$

$$\alpha_3 f(b) + \alpha_4 f'(b) = 0, \quad (3.5)$$

es llamado un problema de *eigenvalores regular*.

### 3.10 Ejemplo. El problema Sturm-Liouville

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$f(0) = 0, \quad f(L) = 0.$$

es regular con la siguiente elección de funciones y parámetros:

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad \rho(x) = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 0,$$

sobre el intervalo  $[0,L]$ .

### 3.11 Ejemplo. El problema Sturm-Liouville

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$f(0) = 0, \quad f'(L) + f(L) = 0.$$

es regular con la siguiente elección de funciones y parámetros:

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad \rho(x) = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 1,$$

sobre el intervalo  $[0, L]$ .

**3.12 Ejemplo.** El problema Sturm-Liouville

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$f(0) = 0, \quad f'(L) + hf(L) = 0$$

es regular con la siguiente elección de funciones y parámetros:

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad \rho(x) = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = h, \quad \alpha_4 = 1,$$

sobre el intervalo  $[0, L]$ .

**3.13 Ejemplo.** El problema Sturm-Liouville

$$f''(x) + 2f'(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0.$$

es regular. Para verificar esto, se multiplica la ecuación por la función  $e^{2x}$  y se genera la expresión,

$$(e^{2x} f'(x))' + \lambda e^{2x} f(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

donde  $p(x) = e^{2x}$ ,  $q(x) = 0$ ,  $\rho(x) = e^{2x}$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $\alpha_4 = 0$ .

**3.14 Teorema** El operador  $Ff = (pf')' + qf$  definido en el lado izquierdo en (3.3) y actuando sobre el espacio  $C$  de las funciones que verifican (3.4) y (3.5) es simétrico  $C$ .

**3.15 Colorario** Los eigenvalores y las eigenfunciones de un problema Sturm-Liouville regular verifica las propiedades del teorema 3.8.

### 3.2 Ejemplos básicos de Problemas d Sturm-Liouville

Antes de calcular eigenvalores y eigenfunciones para problemas Sturm-Liouville específicos, es necesario deducir algunas expresiones que son útiles. Al multiplicar por la función  $f$  la ecuación (3.3) y posteriormente integrar es posible observar que

$$\int_a^b [f(pf')' - qf^2]dx + \lambda \int_a^b \rho f^2 dx = 0$$

$$\int_a^b (pff')' - p(f')^2 + qf^2]dx + \lambda \int_a^b \rho f^2 dx = 0$$

$$[pff']_a^b - \int_a^b [p(f')^2 + qf^2]dx + \lambda \int_a^b \rho f^2 dx = 0$$

Ya que  $f$  es una eigenfunción y  $\rho(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(a,b)$ , es posible deducir que

$$\lambda = \frac{\int_a^b [p(f')^2 + qf^2]dx - [pff']_a^b}{\int_a^b \rho f^2 dx} \tag{3.7}$$

La anterior expresión se conoce con el nombre de *cociente de Rayleigh*.

**3.16 Ejemplo.** Para el problema regular del ejemplo 3.10 es posible verificar, a partir de la ecuación (3.7), que

$$\lambda = \frac{\int_0^L (f')^2(x)dx}{\int_0^L f^2(x)dx} \geq 0 \tag{3.8}$$

Es claro que si  $\lambda = 0$ , a partir de (3.8), sobre  $f'(x) = 0$ , lo cual  $[0,L]$  indica que la función  $f$  es constante. Por las condiciones de frontera, la única solución debería ser la solución nula. En consecuencia  $\lambda > 0$ , y la solución general de la ecuación en el ejemplo 3.10 es

$$f(x) = A_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + A_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) \quad (3.9)$$

Usando la condición  $f(x) = 0$ , es posible encontrar que  $A_1 = 0$ . Entonces la condición  $f(L) = 0$  lleva a

$$A_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Al suponer que  $A_2 = 0$  se concluye que  $f = 0$ , por lo tanto  $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) = 0$ . De esta manera es posible calcular los eigenvalores

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Las correspondientes eigenfunciones son

$$f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Es posible verificar que las propiedades del Teorema 3.8 se cumplen.

**3.17 Ejemplo** Al igual que el Ejemplo anterior se verifica la desigualdad (3.8) para el caso del problema regular del Ejemplo 11. Para este caso es posible que  $\lambda = 0$ , y por lo tanto el eigenvalor y la eigenfunción es

$$\lambda_0 = 0, \quad f_0(x) = \frac{1}{2}.$$

Para el caso en que  $\lambda > 0$ , la solución general es la ecuación (3.9), y por lo tanto

$$f'(x) = -A_1 \sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + A_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

La condición  $f'(0) = 0$  inmediatamente genera que  $A_2 = 0$  así,  $f'(L) = 0$  implica que

$$A_1 \sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Al buscar las soluciones no nulas,  $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0$ , por lo tanto  $\sqrt{\lambda}L = n\pi, n = 1, 2, \dots$ , los eigenvalores y las eigenfunciones son

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad f_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Es posible verificar que las propiedades del Teorema 3.8 se cumplen.

**3.18 Ejemplo.** En el Ejemplo 3.12, supongamos que  $h > 0$ , al escribir la condición de frontera en la forma  $f'(L) = -hf(L)$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} [\rho(x)f(x)f'(x)]_a^b &= [f(x)f'(x)]_0^L \\ &= f(L)f'(L) - f(0)f'(0) = -hf^2(L). \end{aligned}$$

En consecuencia, (3.7) genera

$$\lambda = \frac{\int_0^L (f')^2(x) + hf^2(L) dx}{\int_0^L f^2(x) dx} \geq 0$$

Por lo tanto, los eigenvalores del problema son positivos. La solución general de la ecuación viene dada por (3.9) y la condición  $f(0) = 0$  genera  $A_1 = 0$ . Usando la condición en la frontera, a saber,

$$f'(L) + hf(L) = 0,$$

es posible llegar a la ecuación

$$A_2[\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}L) + h \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L)] = 0.$$

Para calcular las soluciones no nulas, es necesario que  $A_2 \neq 0$ ; en otras palabras,

$$\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}L) + h \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Ya que  $\cos(\sqrt{\lambda}L) \neq 0$ , entonces

$$\tan(\sqrt{\lambda}L) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h} = -\frac{1}{hL}(\sqrt{\lambda}L).$$

Al hacer  $\sqrt{\lambda} L = \beta$ , entonces los puntos de intersección de las funciones  $y = \tan(\beta)$ , y  $y = -(\sqrt{\lambda} L)/hL$ . Por lo tanto, los eigenvalores son

$$\lambda_n = (\beta_n/L)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lambda_n \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

con las correspondientes eigenfunciones

$$f_n(x) = \text{sen}(\sqrt{\lambda_n}x) = \text{sen}(\beta_n x/L), \quad n = 1, 2, \dots$$

### 3.19 Caso general. El problema de Sturm-Liouville

$$f''(x) + \eta f'(x) + \theta f(x) + \vartheta \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$f(0) = 0, f(L) = 0$$

donde  $\eta, \theta, \vartheta$  son constantes, es un problema regular con

$$p(x) = e^{\eta x}, \quad q(x) = \theta e^{\eta x}, \quad \rho(x) = \vartheta e^{\eta x},$$

los eigenvalores son

$$\lambda_n = \frac{1}{4\vartheta} \left( \frac{4n^2\pi^2}{L^2} + \eta^2 - 4\eta \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Y las eigenfunciones

$$f_n(x) = e^{-\left(\frac{\eta}{2}\right)x} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

### 3.20 Ejemplo. Considere el problema regular definido por

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad -L < x < L$$

$$f(-L) = f(L), \quad f'(-L) = f'(L)$$

Usando (3.7) y el ejemplo (3.17) es posible concluir que la expansión en serie

es

$$T(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (3.10)$$

### 3.3 Serie generalizada de Fourier

Los problemas de Sturm-Liouville regulares cumplen dos propiedades adicionales.

#### 3.21 Teorema.

(i) Únicamente eigenfunciones linealmente independientes  $f_n$  existen para cada eigenvalor  $\lambda_n, n=1,2,\dots$

(ii) Toda función suave por partes  $T$  sobre un intervalo  $[a,b]$ , tiene una única representación mediante la serie generalizada de Fourier

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.10)$$

donde,

$$a_n = \frac{\int_a^b u(x) f_n(x) \rho(x) dx}{\int_a^b f_n^2(x) \rho(x) dx}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

En el siguiente capítulo se mostrará el uso de la serie generalizada de Fourier

## - 4 -

## Solución de la ecuación del calor

El método de separación de variables es una técnica eficiente para solucionar problemas de ecuaciones diferenciales. A continuación, se el método de separación de variables para problemas específicos.

### 4.1 Separación de variables.

Considere el modelo matemático de la ecuación del calor con sus correspondientes condiciones de frontera y condición inicial.

$$T_t(x,t) = \alpha T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(L,t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.2)$$

$$T(0,t) = f(x) \quad 0 < x < L \quad (4.3)$$

donde  $f \neq 0$ . En primer lugar se busca una solución de la forma

$$T(x,t) = T_1(x)T_2(t).$$

Al sustituir en la ecuación del calor (4.1), es posible generar la igualdad



$$T_1(x) T_2'(t) = \alpha T_1''(x) T_2(t).$$

Es claro que las funciones  $T_1(x)$  y  $T_2(x)$  son no nulas. Por lo tanto, se genera la expresión.

$$\frac{T_2'(t)}{\alpha T_2(t)} = \frac{T_1''(x)}{T_1(x)}$$

El lado izquierdo de la anterior expresión es una función de la variable  $t$  y el lado derecho una función de la variable  $x$ , por lo tanto la igualdad es posible si los dos lados son iguales a una constante, en otras palabras

$$\frac{T_2'(t)}{\alpha T_2(t)} = \frac{T_1''(x)}{T_1(x)} = -\lambda,$$

donde  $\lambda$  es llamada la *constante de separación*. Lo anterior genera un par de ecuaciones para las funciones  $T_1(x)$  y  $T_2(x)$ :

$$T_1''(x) + \lambda T_1(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad (4.4)$$

$$T_2'(t) + \lambda \alpha T_2(t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.5)$$

Desde la condición de frontera (4.2),

$$T(0,t) = T_1(0) T_2(t) = 0 \quad \text{Para todo } t > 0.$$

Como  $T_2 \neq 0$ , se sigue que

$$T_1(0) = 0 \quad (4.6)$$

Similarmente, por (4.2) se tiene que

$$T_1(L) = 0 \quad (4.7)$$

El modelo matemático (4.4), (4.6) y (4.7) es un problema Sturm Liouville regular, con eigenfunciones  $f_n$  y sus correspondientes eigenvalores  $\lambda_n$ , calculados en el ejemplo 3.16:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad f_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Para  $\lambda_n$ , desde (4.5) la solución en la componente temporal es

$$T_{2,n}(t) = e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Por la serie de Fourier (2.12) y (2.13) entonces

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (4.9)$$

donde, los coeficientes están dados por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

**4.1 Ejemplo.** Considere el modelo matemático

$$T_t(x, t) = T_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T(0, t) = 0, \quad T(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$T(0, t) = \text{sen}(2\pi x) - \text{sen}(3\pi x) \quad 0 < x < 1$$

Al sustituir  $\alpha = 1$ ,  $L = 1$ , en la integral (4.10) es posible calcular

$$b_2 = 1, \quad b_3 = -1, \quad b_n = 0 \quad (n \neq 2, 3);$$

Por lo tanto, por (4.9), la solución del modelo matemático es

$$T(x,t) = \text{sen}(2\pi x) e^{-4\pi^2 t} - \text{sen}(3\pi x) e^{-9\pi^2 t}$$

**4.2 Ejemplo.** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = 2x \quad 0 < x < 1$$

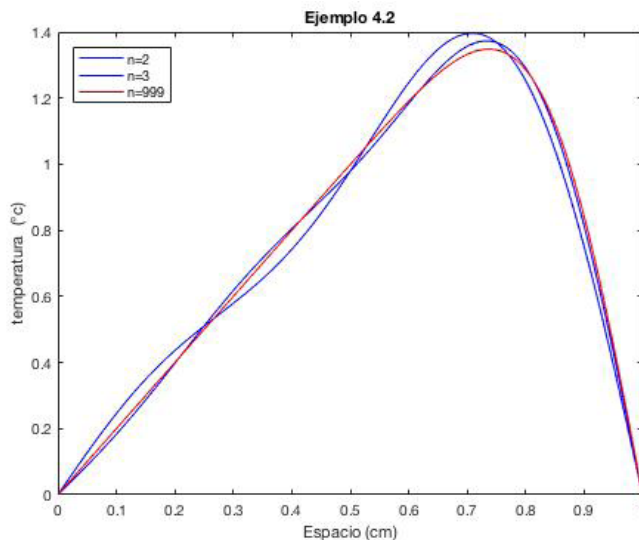
Al sustituir  $f(x) = 2x$  y  $L = 1$  en (4.10), se tiene:

$$b_n = 2 \int_0^1 2x \text{sen}(n\pi x) dx = \frac{-4(-1)^n}{\pi n}$$

Por lo tanto, por (4.9), la solución del modelo matemático es

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4(-1)^n}{\pi n} \text{sen}(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$$

La siguiente grafica muestra el comportamiento de la serie para diferentes valores de  $n$ .



**4.3 Ejemplo.** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = -3 \quad 0 < x < 1$$

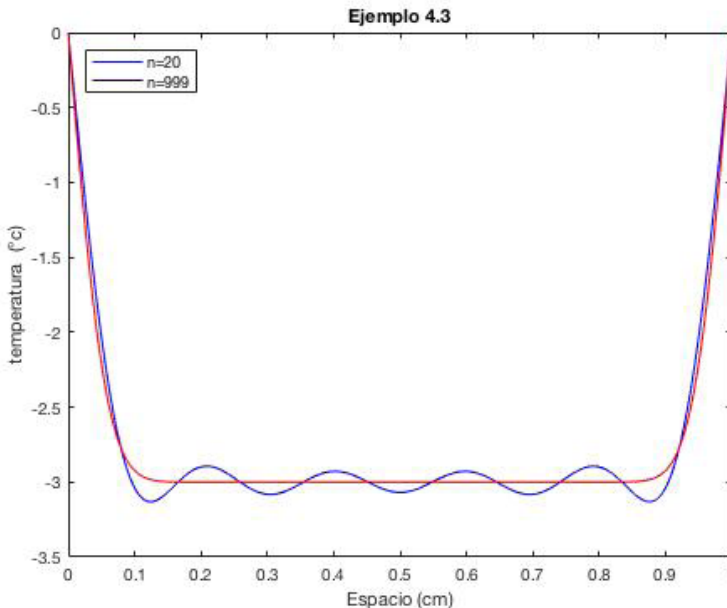
Al sustituir  $f(x) = -3$  y  $L = 1$  en (4.10), se tiene:

$$b_n = 2 \int_0^1 -3 \text{sen}(n\pi x) dx = \frac{-6(-(-1)^n + 1)}{\pi n}$$

Por lo tanto, por (4.9), la solución del modelo matemático es

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6(-(-1)^n + 1)}{\pi n} \text{sen}(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$$

La siguiente grafica muestra el comportamiento de la serie para diferentes valores de  $n$ .



**4.4 Ejemplo.** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = 1 + 2x \quad 0 < x < 1$$

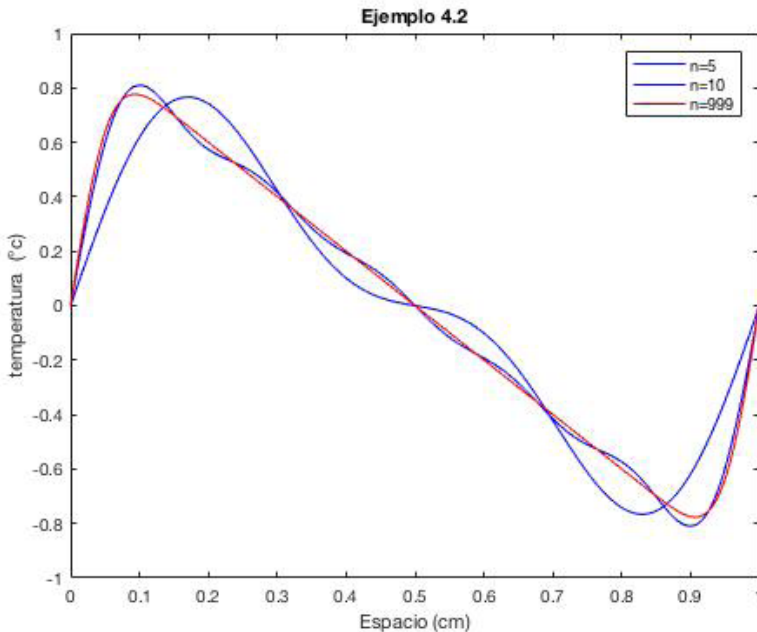
Al sustituir  $f(x) = -3$  y  $L=1$  en (4.10), se tiene:

$$b_n = 2 \int_0^1 (1 + 2x) \text{sen}(n\pi x) dx = \frac{2((-1)^n + 1)}{\pi n}$$

Por lo tanto, por (4.9), la solución del modelo matemático es

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n + 1)}{\pi n} \text{sen}(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$$

La siguiente grafica muestra el comportamiento de la serie para diferentes valores de  $n$ .



**4.5 Ejemplo.** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = 0, \quad T(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = x^2 \quad 0 < x < 1$$

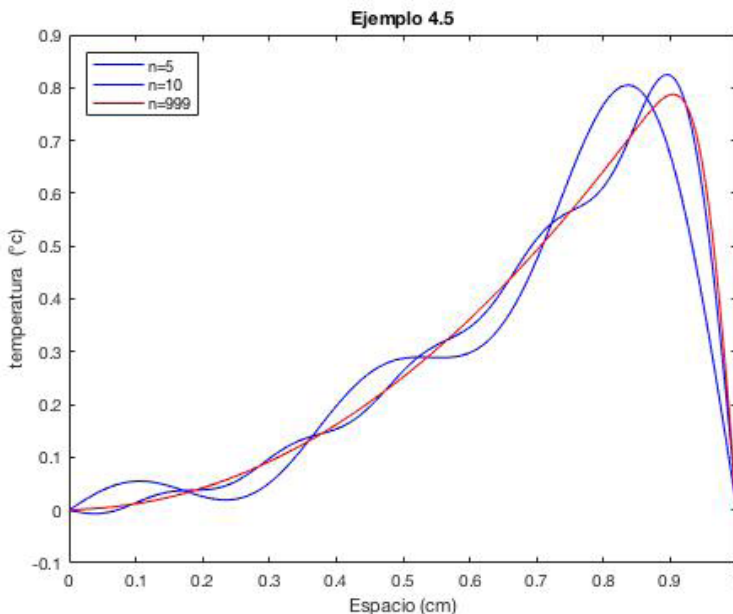
Al sustituir  $f(x) = x^2$  y  $L = 1$  en (4.10), se tiene:

$$b_n = 2 \int_0^1 (x^2) \text{sen}(n\pi x) dx = 2 \left( \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} - \frac{(-1)^n}{\pi n} \right)$$

Por lo tanto, por (4.9), la solución del modelo matemático es

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left( \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} - \frac{(-1)^n}{\pi n} \right) \text{sen}(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$

La siguiente grafica muestra el comportamiento de la serie para diferentes valores de  $n$ .



Considere el modelo matemático de la ecuación del calor con sus correspondientes condiciones de frontera y condición inicial.

$$T_t(x,t) = \alpha T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (4.11)$$

$$T_x(0,t) = 0, \quad T_x(L,t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.12)$$

$$T(0,t) = f(x) \quad 0 < x < L \quad (4.13)$$

donde  $f \neq 0$ . En primer lugar se busca una solución de la forma

$$T(x,t) = T_1(x)T_2(t).$$

Al sustituir en la ecuación del calor (4.1), es posible generar la igualdad

$$T_1(x) T_2'(t) = \alpha T_1''(x) T_2(t).$$

Es claro que las funciones  $T_1(x)$  y  $T_2(x)$  son no nulas. Por lo tanto, se genera la expresión.

$$\frac{T_2'(t)}{\alpha T_2(t)} = \frac{T_1''(x)}{T_1(x)}.$$

El lado izquierdo de la anterior expresión es una función de la variable  $t$  y el lado derecho una función de la variable  $x$  por lo tanto la igualdad es posible si los dos lados son iguales a una constante, en otras palabras

$$\frac{T_2'(t)}{\alpha T_2(t)} = \frac{T_1''(x)}{T_1(x)} = -\lambda,$$

donde  $\lambda$  es llamada la *constante de separación*. Lo anterior genera un par de ecuaciones para las funciones  $T_1(x)$  y  $T_2(x)$ :

$$T_1''(x) + \lambda T_1(x) = 0, \quad 0 < x < L \quad (4.14)$$

$$T_2'(t) + \lambda\alpha T_2(t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.15)$$

Desde la condición de frontera (4.12),

$$T(0,t) = T_1(0) T_2(t) = 0 \quad \text{Para todo } t > 0.$$

Como se sigue que

$$T_1'(0) = 0. \quad (4.16)$$

Similarmente, por (4.2) se tiene que

$$T_1'(L) = 0. \quad (4.17)$$

El modelo matemático (4.14), (4.16) y (4.17) es un problema Sturm Liouville regular, con eigenfunciones  $f_n$  y sus correspondientes eigenvalores  $\lambda_n$ , calculados en el ejemplo 3.17:

$$\lambda_0 = 0, \quad T_{1,0}(x) = \frac{1}{2}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad f_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Para  $\lambda_n$ , desde (4.15) la solución en la componente temporal es

$$T_{2,n}(t) = e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

Por la serie de Fourier (2.12) y (2.13) entonces

$$T(x,t) = \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (4.19)$$

donde, los coeficientes  $b_n$  están dados por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.20)$$



**Ejemplo 4.6** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$T_x(0,t) = 0, \quad T_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = 2x \quad 0 < x < 1$$

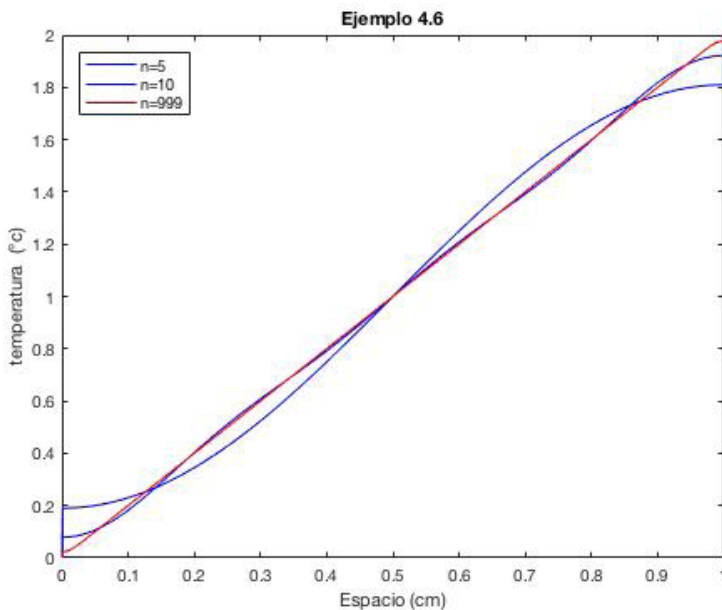
Al sustituir  $f(x) = 2x$  y  $L = 1$  en (4.20), se tiene:

$$b_0 = 2 \int_0^1 2x dx =$$

$$b_n = 2 \int_0^1 (2x) \cos(n\pi x) dx = \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}$$

Por lo tanto, por (4.19), la solución del modelo matemático es

$$T(x,t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$



**Ejemplo 4.7** Considere el modelo matemático

$$T_t(x, t) = T_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T_x(0, t) = 0, \quad T_x(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$T(0, t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

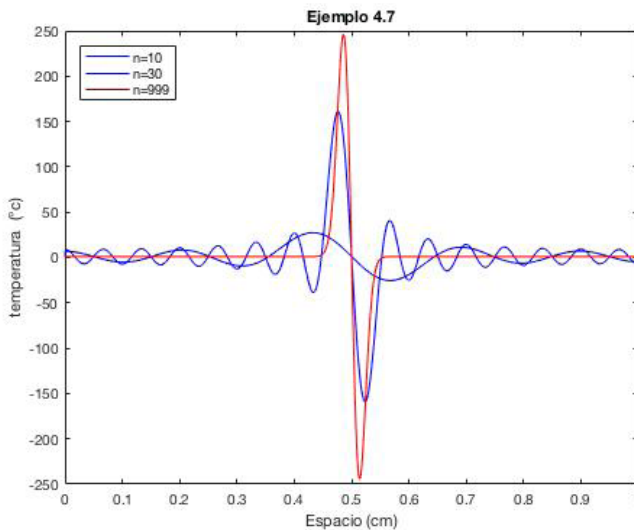
Al sustituir  $f(x) = T(0, t)$  y  $L = 1$  en (4.20), se tiene:

$$b_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2$$

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = \frac{4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$$

Por lo tanto, por (4.19), la solución del modelo matemático es

$$T(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} \cos(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$



**Ejemplo 4.8** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T_x(0,t) = 0, \quad T_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = x^2 \quad 0 < x < 1$$

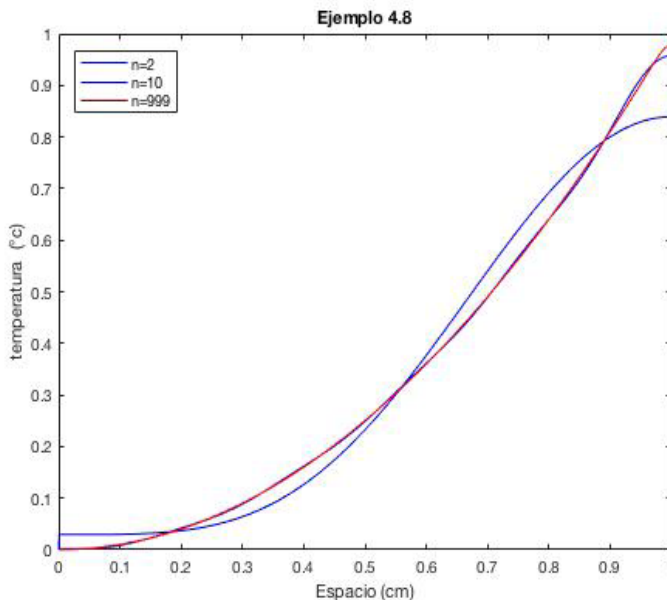
Al sustituir  $f(x) = x^2$  y  $L = 1$  en (4.20), se tiene:

$$b_0 = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$b_n = 2 \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) dx = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

Por lo tanto, por (4.19), la solución del modelo matemático es

$$T(x,t) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$



**Ejemplo 4.9** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T_x(0,t) = 0, \quad T_x(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = 2-x \quad 0 < x < 1$$

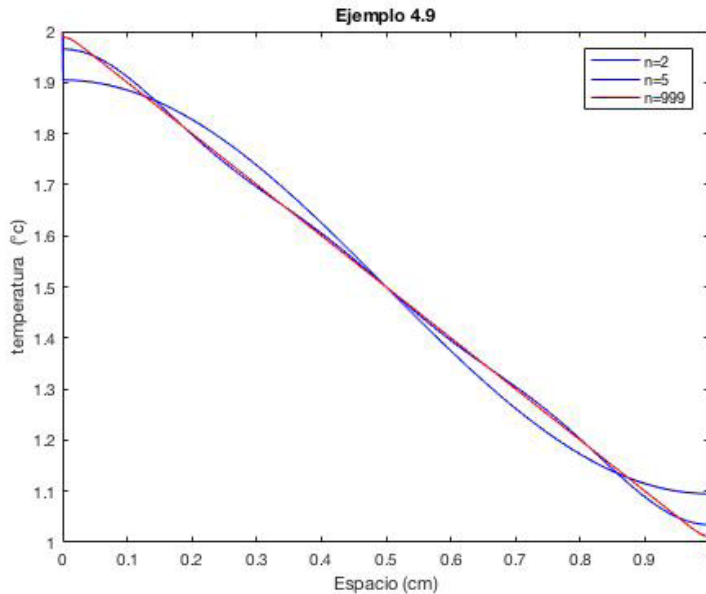
Al sustituir  $f(x) = 2x$  y  $L = 1$  en (4.20), se tiene:

$$b_0 = 2 \int_0^1 (2-x) dx = 3$$

$$b_n = 2 \int_0^1 (2-x) \cos(n\pi x) dx = \frac{2(-(-1)^n + 1)}{\pi^2 n^2}$$

Por lo tanto, por (4.19), la solución del modelo matemático es

$$T(x,t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-(-1)^n + 1)}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$



**Ejemplo 4.10** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T_x(0,t) = 0, \quad T_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = e^x \quad 0 < x < 1$$

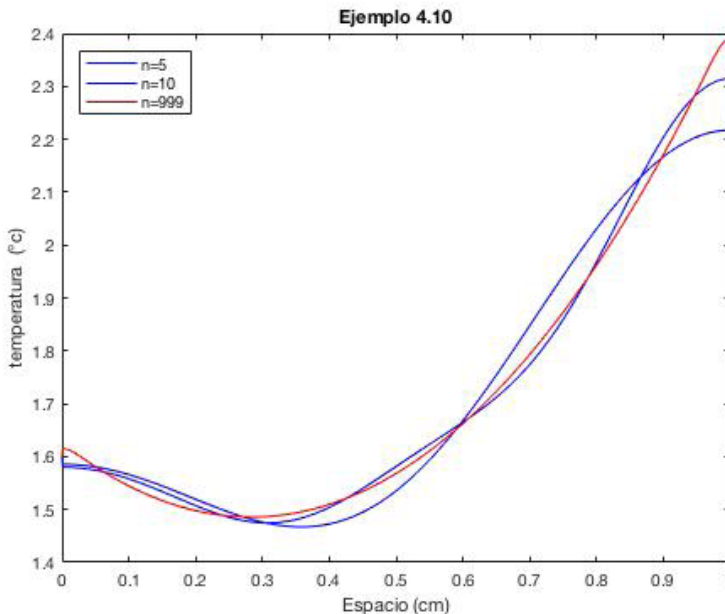
Al sustituir  $f(x) = e^x$  y  $L = 1$  en (4.20), se tiene:

$$b_0 = 2 \int_0^1 e^x dx = 2(e - 1)$$

$$b_n = 2 \int_0^1 e^x \cos(n\pi x) dx = \frac{2(e(-1)^n + 1)}{\pi^2 n^2 + 1}$$

Por lo tanto, por (4.19), la solución del modelo matemático es

$$T(x,t) = \frac{2(e - 1)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-(-1)^n + 1)}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$



Considere el modelo matemático de la ecuación del calor con sus correspondientes condiciones de frontera mixtas y condición inicial.

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (4.21)$$

$$T(0,t) = 0, \quad T_x(1,t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.22)$$

$$T(0,t) = 1 \quad 0 < x < 1 \quad (4.23)$$

donde  $f \neq 0$ . En primer lugar se busca una solución de la forma

$$T(x,t) = T_1(x)T_2(t).$$

Al sustituir en la ecuación del calor (4.1), es posible generar la igualdad

$$T_1(x) T_2'(t) = \alpha T_1''(x) T_2(t).$$

Es claro que las funciones  $T_1(x)$  y  $T_2(t)$  son no nulas. Por lo tanto, se genera la expresión.

$$\frac{T_2'(t)}{\alpha T_2(t)} = \frac{T_1''(x)}{T_1(x)}$$

El lado izquierdo de la anterior expresión es una función de la variable  $t$  y el lado derecho una función de la variable  $x$  por lo tanto la igualdad es posible si los dos lados son iguales a una constante, en otras palabras

$$\frac{T_2'(t)}{\alpha T_2(t)} = \frac{T_1''(x)}{T_1(x)} = -\lambda,$$

donde  $\lambda$  es llamada la *constante de separación*. Lo anterior genera un par de ecuaciones para las funciones  $T_1(x)$  y  $T_2(x)$ :

$$T_1''(x) + \lambda T_1(x) = 0, \quad T_1(0) = 0, \quad T_1'(1) = 0 \quad 0 < x < L, \quad (4.24)$$

$$T_2'(t) + \lambda \alpha T_2(t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.25)$$

A partir del ejemplo 3.16 es posible concluir que

$$T_1(x) = A_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + A_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} x)$$

Ya que  $T_1(0) = 0$ , entonces  $A_1 = 0$ , Usando la condición  $T_1'(1) = 0$  se debe resolver la ecuación  $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$ ; por lo tanto,

$$\sqrt{\lambda} = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Lo anterior significa que las eigenfunciones y eigenvalores asociados a (4.24) son

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}, \quad T_{n,1}(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

la correspondiente componente temporal es

$$T_{n,2}(x) = e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

En consecuencia,

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}} \quad (4.26)$$

Para calcular los coeficientes de la serie generalizada de Fourier, se tiene que

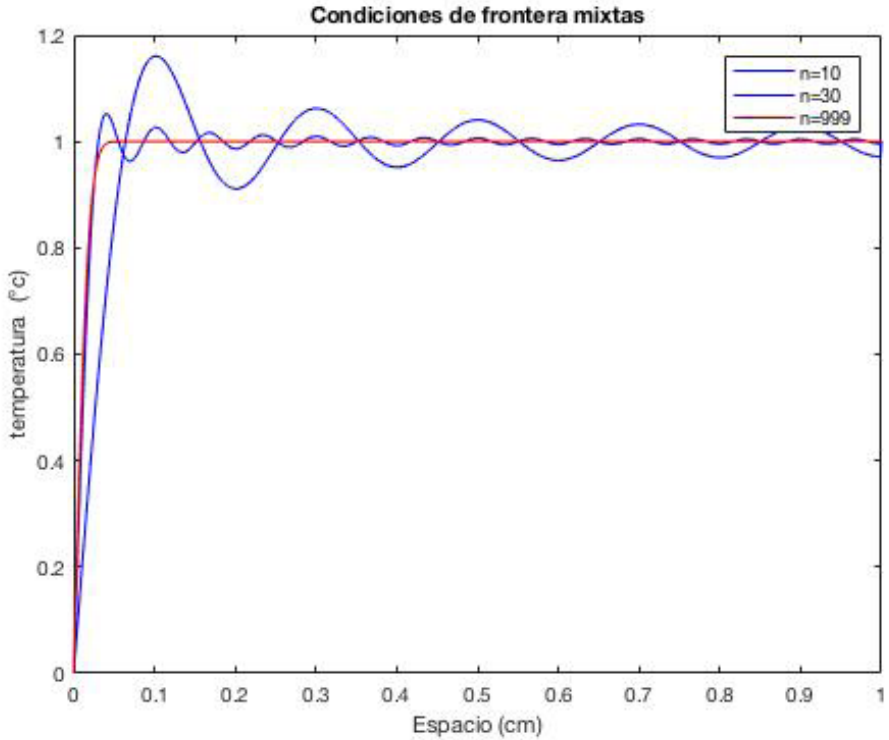
$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Por lo tanto

$$b_n = 2 \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx = \frac{4}{(2n-1)\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.27)$$

Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}}$$



**Ejemplo 4.11** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = 0, \quad T_x(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = x \quad 0 < x < 1$$

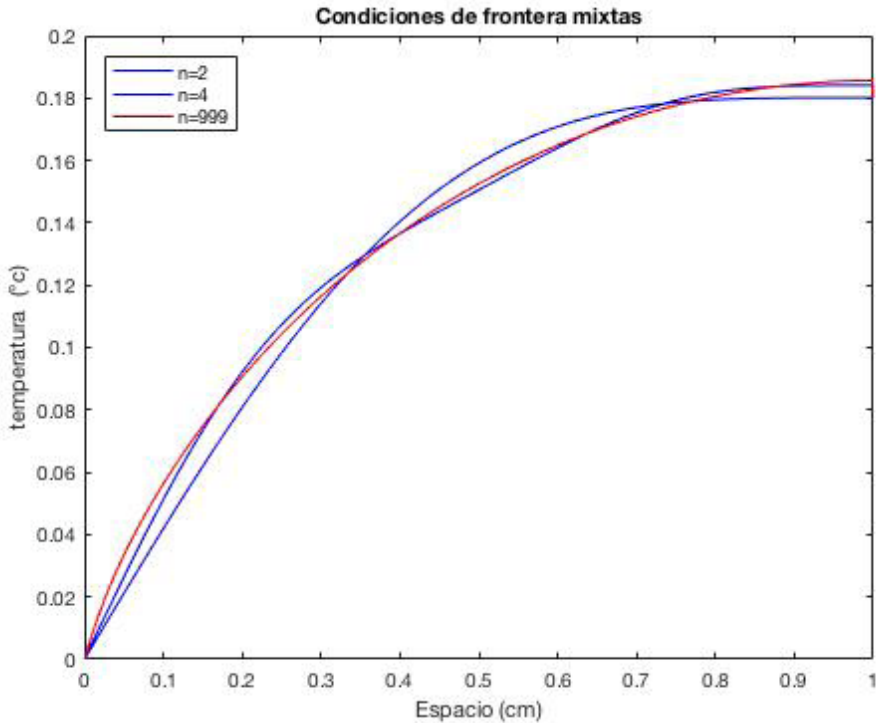
Al aplicar la ecuación (4.27)

$$b_n = 2 \int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx = \frac{2}{(2n-1)^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$



Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2 \pi^2} \operatorname{sen} \left( \frac{(2n-1)\pi x}{2} \right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}}$$



**Ejemplo 4.12** Considere el modelo matemático

$$T_t(x, t) = T_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T(0, t) = 0, \quad T_x(L, t) = 0, \quad t > 0$$

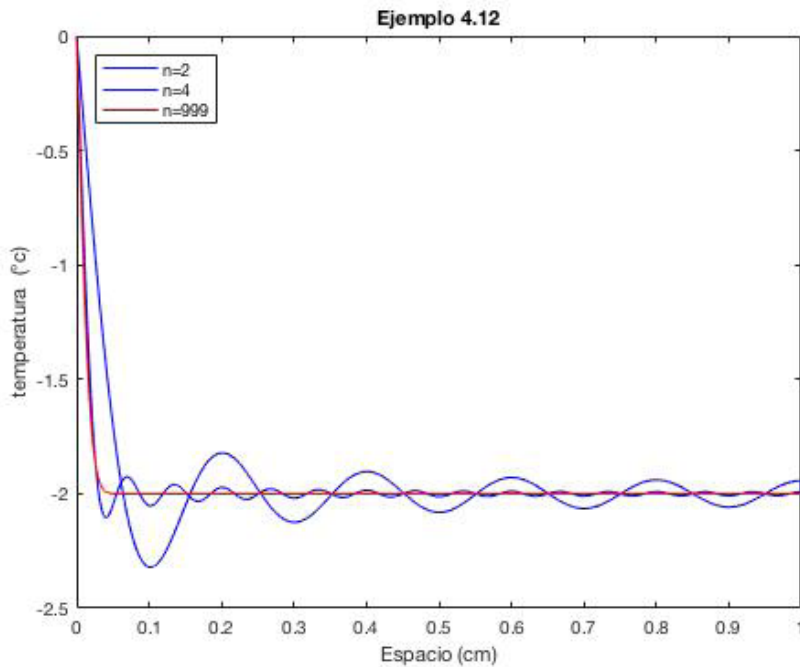
$$T(0, t) = -2 \quad 0 < x < 1$$

Al aplicar la ecuación (4.27)

$$b_n = 2 \int_0^1 -2 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx = \frac{-8(-\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) + 1)}{(2n-1)\pi}$$

Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8(-\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) + 1)}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}}$$



**Ejemplo 4.13** Considere el modelo matemático

$$T_t(x, t) = T_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T(0, t) = 0, \quad T_x(L, t) = 0, \quad t > 0$$

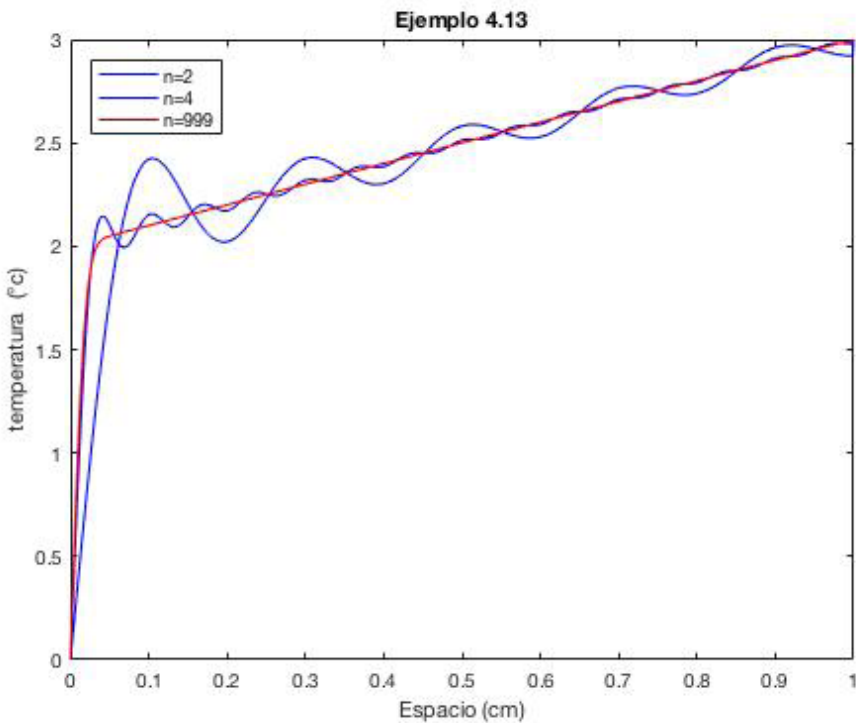
$$T(0, t) = 2 + x \quad 0 < x < 1$$

Al aplicar la ecuación (4.27)

$$b_n = 2 \int_0^1 (2+x) \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx = \frac{8}{(2n-1)\pi} + \frac{(-1)^{n+1}8}{((2n-1)^2\pi^2)}$$

Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{8}{(2n-1)\pi} + \frac{(-1)^{n+1}8}{((2n-1)^2\pi^2)} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{4}}$$



**Ejemplo 4.14** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T(0,t) = 0, \quad T_x(L,t) = 0, \quad t > 0$$

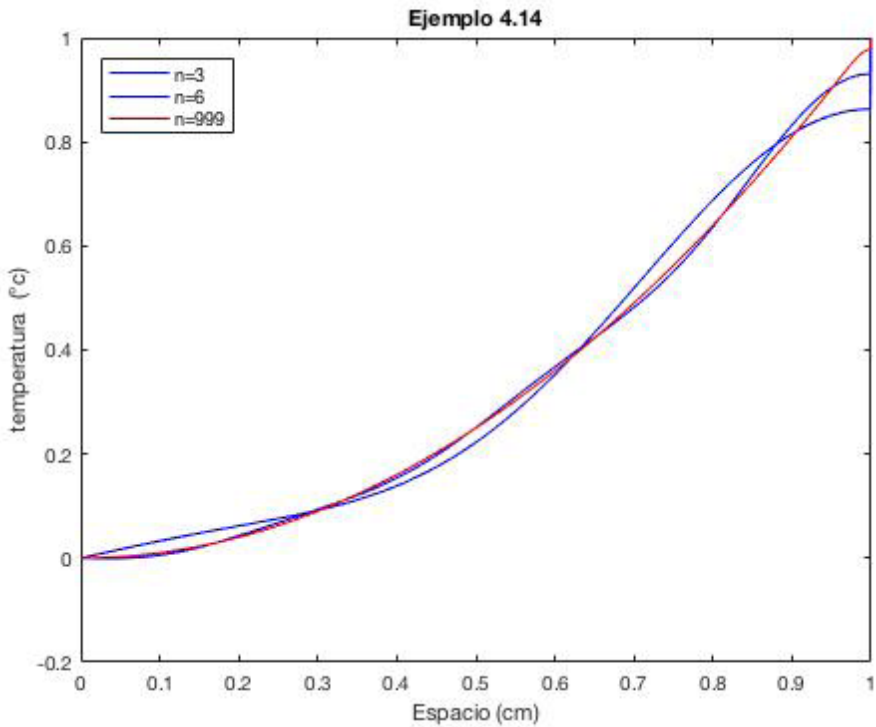
$$T(0,t) = x^2 \quad 0 < x < 1$$

Al aplicar la ecuación (4.27)

$$b_n = 2 \int_0^1 x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx = \frac{2((-1)^{n+1}(16\pi n - 8\pi) - 16)}{((2n-1)^3\pi^3)}$$

Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^{n+1}(16\pi n - 8\pi) - 16)}{((2n-1)^3\pi^3)} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{4}}$$



Considere el modelo matemático de la ecuación del calor con sus correspondientes condiciones de frontera mixtas y condición inicial.

$$T_t(x, t) = T_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T_x(0, t) = 0 \quad T(1, t) = 0, \quad t > 0$$

**Aplicaciones de la teoría de Fourier al estudio de la ecuación del calor**

$$T(0,t) = 1 \quad 0 < x < 1$$

donde  $f \neq 0$  Teniendo como fundamento el ejemplo 3.16, los eigenvectores y las eigenfunciones están dadas por los pares

$$\lambda_n = \frac{(2n - 1)^2 \pi^2}{4}, T_{n,1}(x) = \cos\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2}\right), n = 1, 2, \dots,$$

Ya que,

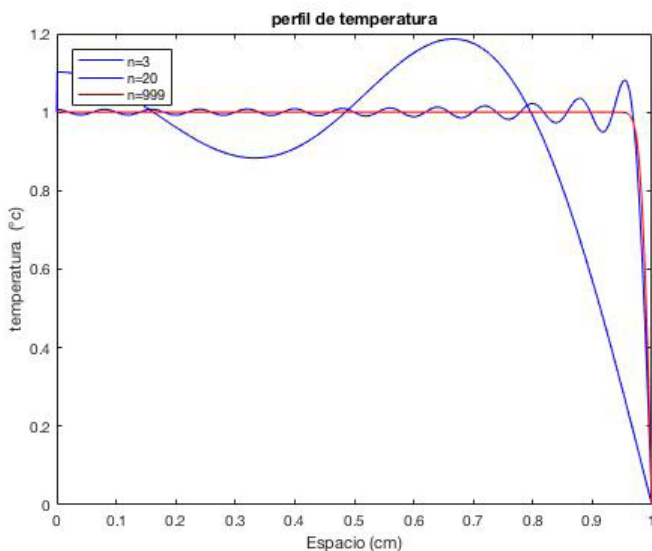
$$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Para calcular los coeficientes de la serie de Fourier generalizada

~~$$n = 1, 2, \dots \quad b_n = 2 \int_0^1 \cos\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2}\right) dx = \frac{4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2n - 1)}{2}\right)}{(2n - 1)\pi}, \quad (4.28)$$~~

Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2n - 1)}{2}\right)}{(2n - 1)\pi} \cos\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}}$$



**Ejemplo 4.15** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T_x(0,t) = 0 \quad T(1,t) = 0, \quad t > 0$$

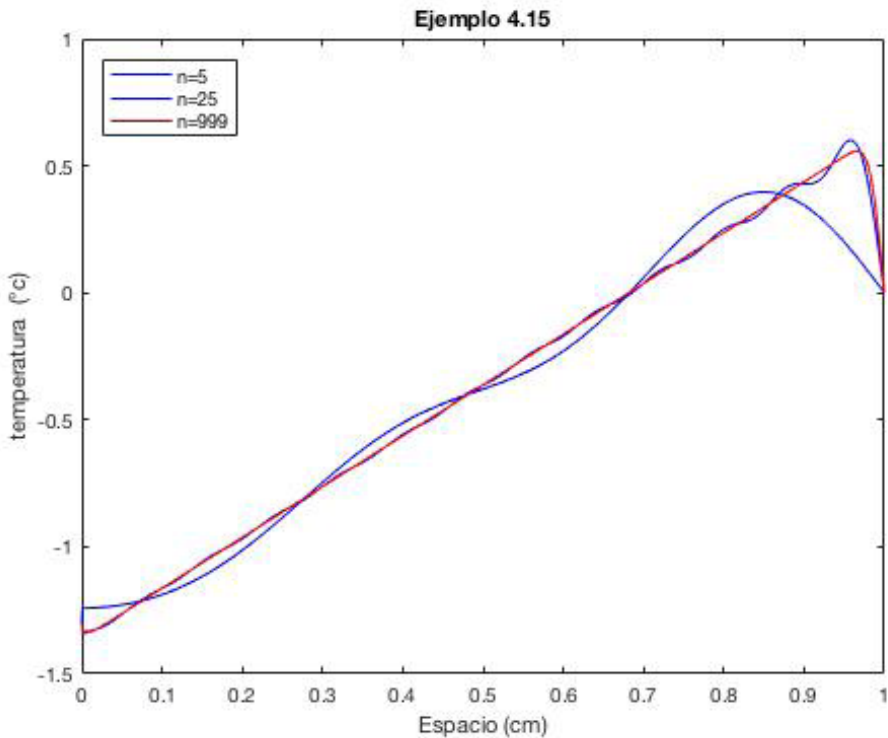
$$T(0,t) = 2x \quad 0 < x < 1$$

Al aplicar la ecuación (4.28)

$$b_n = 2 \int_0^1 2x \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx = \frac{8((-1)^{n+1}(2n-1) - 2)}{((2n-1)^2\pi^2)}$$

Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8((-1)^{n+1}(2n-1) - 2)}{((2n-1)^2\pi^2)} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{4}}$$



**Ejemplo 4.16** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T_x(0,t) = 0 \quad T(1,t) = 0, \quad t > 0$$

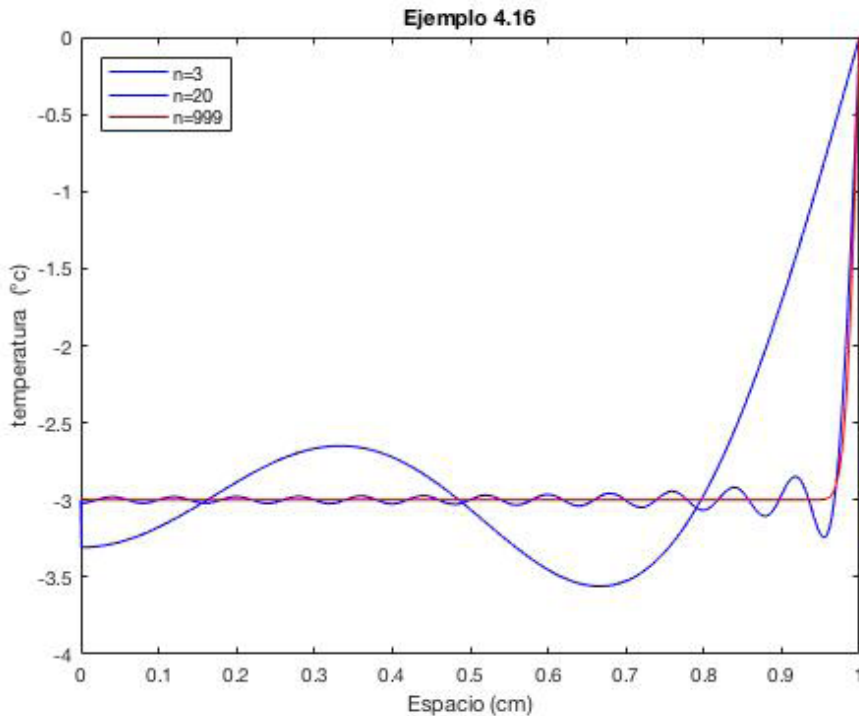
$$T(0,t) = -3 \quad 0 < x < 1$$

Al aplicar la ecuación (4.28)

$$b_n = 2 \int_0^1 -3 \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx = \frac{-12 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right)}{(2n-1)\pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-12 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right)}{(2n-1)\pi} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}}$$



**Ejemplo 4.17** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T_x(0,t) = 0 \quad T(1,t) = 0, \quad t > 0$$

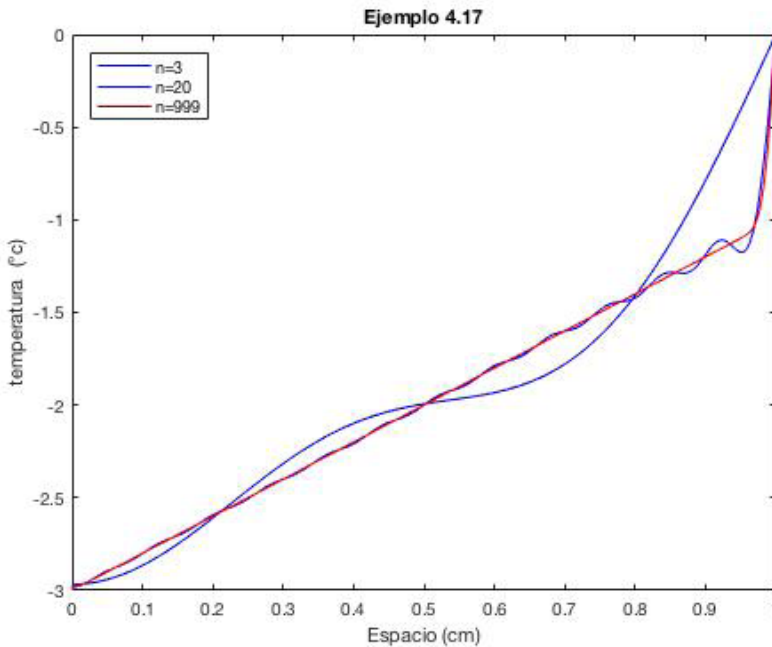
$$T(0,t) = 2x - 3 \quad 0 < x < 1$$

Al aplicar la ecuación (4.28)

$$b_n = 2 \int_0^1 (2x - 3) \cos\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2}\right) dx = \frac{4(-1)^n}{(2n - 1)\pi} - \frac{16}{((2n - 1)^2\pi^2)}$$

Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4(-1)^n}{(2n - 1)\pi} - \frac{16}{((2n - 1)^2\pi^2)} \right] \cos\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{4}}$$





**Ejemplo 4.18** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T_x(0,t) = 0 \quad T(1,t) = 0, \quad t > 0$$

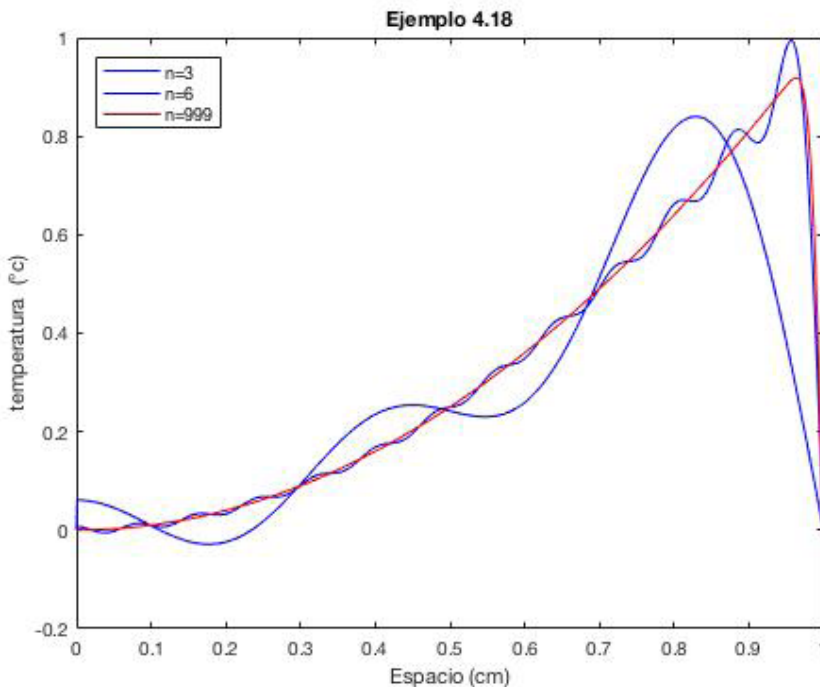
$$T(0,t) = x^2 \quad 0 < x < 1$$

Al aplicar la ecuación (4.28)

$$b_n = 2 \int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) dx = \frac{2(-1)^{n+1}(2\pi^2(2n-1)^2 - 16)}{((2n-1)^3\pi^3)}$$

Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}(2\pi^2(2n-1)^2 - 16)}{((2n-1)^3\pi^3)} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{4}}$$



Considere el modelo matemático de la ecuación del calor con sus correspondientes condiciones de frontera y condición inicial.

$$T_t(x,t) = \alpha T_{xx}(x,t), \quad -L < x < L, \quad t > 0 \quad (4.29)$$

$$T(-L,t) = T(L,t), \quad T_x(-L,t) = T_x(L,t), \quad t > 0 \quad (4.30)$$

$$T(x,0) = f(x), \quad -L < x < L \quad (4.31)$$

Al igual que en los ejemplos anteriores se generan el sistema de ecuaciones y

$$T_1''(x) + \lambda T_1(x) = 0, \quad (4.32)$$

$$T_1(-L) = T_1(L), T_1'(-L) = T_1'(L), \quad 0 < x < L \quad (4.33)$$

y

$$T_2'(t) + \lambda \alpha T_2(t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.34)$$

En virtud del ejemplo, los eigenvalores asociados a (4.32) y (4.33) son

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

con las correspondientes eigenfunciones

$$T_{1,0}(x) = \frac{1}{2}, \quad T_{1,n}(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), T_{1,n}(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

La componente temporal está dada por

$$T_{2,n}(t) = e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por la serie de Fourier (2.12) y (2.13) entonces

**Aplicaciones de la teoría de Fourier al estudio de la ecuación del calor**

$$T(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (4.35)$$

donde, los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  están dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n = 1, 2, \dots \quad (4.37)$$

**Ejemplo 4.19** Considere el modelo matemático

$$T_t(x, t) = T_{xx}(x, t), \quad -1 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T(-L, t) = T(L, t), \quad T_x(-L, t) = T_x(L, t), \quad t > 0$$

$$T(x, 0) = 2x \quad -1 < x < 1$$

Para este ejemplo  $L = 1$  y  $f(x) = 2x$ , por las ecuaciones (4.36) y (4.37).

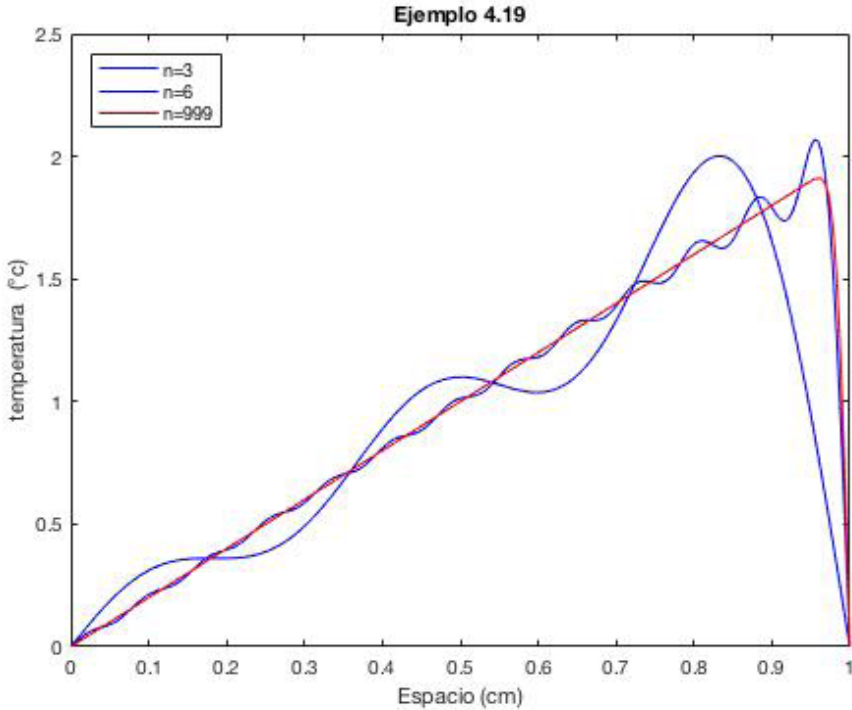
$$a_0 = \int_{-1}^1 2x dx = 0$$

$$a_n = \int_{-1}^1 2x \cos(n\pi x) dx = 0$$

$$b_n = \int_{-1}^1 2x \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{-4(-1)^n}{\pi n}$$

Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4(-1)^n}{\pi n} \text{sen}(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}$$



**Ejemplo 4.20** Considere el modelo matemático

$$T_t(x, t) = T_{xx}(x, t), \quad -1 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T(-L, t) = T(L, t), \quad T_x(-L, t) = T_x(L, t), \quad t > 0$$

$$T(x, 0) = x^2 + 1 \quad -1 < x < 1$$

Para este ejemplo  $L = 1$  y  $f(x) = x^2 + 1$ , por las ecuaciones (4.36) y (4.37).

$$a_0 = \int_{-1}^1 x^2 + 1 \, dx = \frac{2}{3}$$

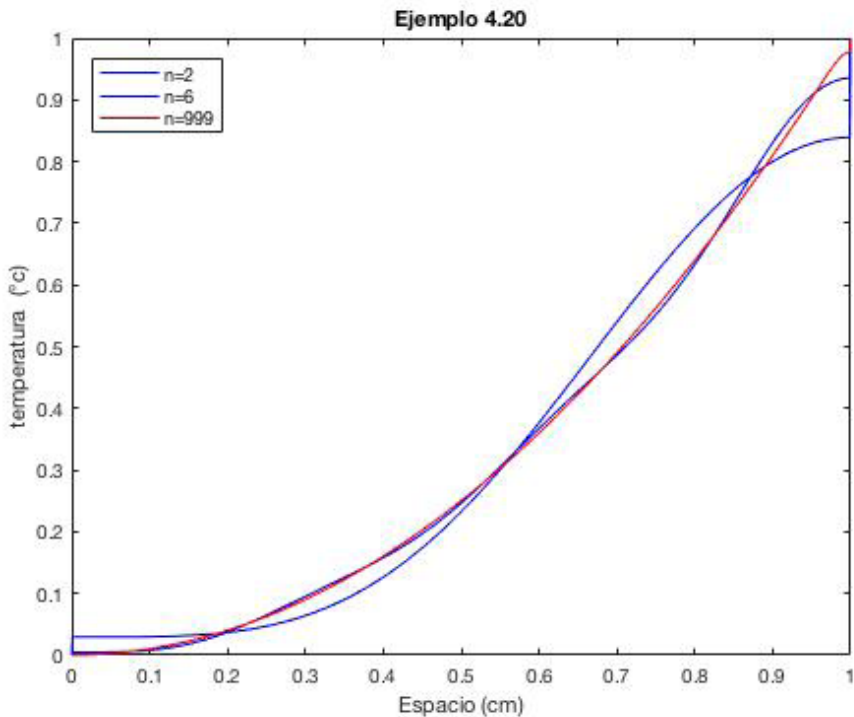
Aplicaciones de la teoría de Fourier al estudio de la ecuación del calor

$$a_n = \int_{-1}^1 (x^2 + 1) \cos(n\pi x) = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \int_{-1}^1 (x^2 + 1) \operatorname{sen}(n\pi x) = 0$$

Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x, t) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}$$



**Ejemplo 4.21** Considere el modelo matemático

$$T_t(x,t) = T_{xx}(x,t), \quad -1 < x < 1, \quad t > 0$$

$$T(-L,t) = T(L,t), \quad T_x(-L,t) = T_x(L,t), \quad t > 0$$

$$T(x,0) = e^x \quad -1 < x < 1$$

Para este ejemplo  $L = 1$  y  $f(x) = e^x$ , por las ecuaciones (4.36) y (4.37).

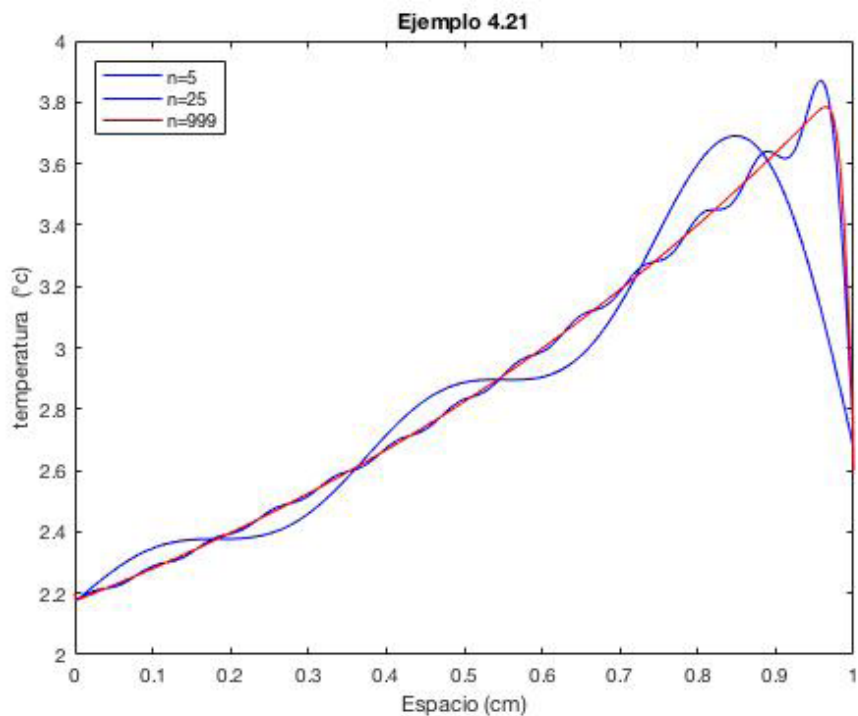
$$a_0 = \int_{-1}^1 e^x dx = e - \frac{1}{e}$$

$$a_n = \int_{-1}^1 e^x \cos(n\pi x) dx = \frac{e(-1)^n}{\pi^2 n^2 + 1} - \frac{(-1)^n}{e(\pi^2 n^2 + 1)}$$

$$b_n = \int_{-1}^1 (x^2 + 1) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{-e\pi n(-1)^n}{\pi^2 n^2 + 1} + \frac{\pi n(-1)^n}{e(\pi^2 n^2 + 1)}$$

Por lo tanto, la solución completa es

$$T(x,t) = e - \frac{1}{e} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x)) e^{-(n\pi)^2 t}$$



## Anexo

A continuación, se presentan algunos de los códigos en Matlab de algunas de las graficas del libro.

### Ejemplo 2.7

```
clc
clear
h=2/100;
k=1/100000;
A(1)=0;
A(101)=0;
suma=0;
t=0.1;
for j=1:99
w=-1+(h*j);
    for i=1:7
        B1=(1-(-1)^(i))/(2*pi^2*i^2);
        C1=cos(i*pi*w);
        D1=-1/(2*pi*i);
```



## Aplicaciones de la teoría de Fourier al estudio de la ecuación del calor

```
F1=sin(i*w*pi);
G1=(B1*C1)+(D1*F1);
suma =suma+G1;
end
A(j+1)=(1/8)+suma;
suma=0;
end
B(1)=0;
B(101)=0;
suma=0;
t=0.1;
for j=1:99
w=-1+(h*j);
    for i=1:20
        B1=(1-(-1)^(i))/(2*pi^2*i^2);
        C1=cos(i*pi*w);
        D1=-1/(2*pi*i);
        F1=sin(i*w*pi);
        G1=(B1*C1)+(D1*F1);
        suma =suma+G1;
    end
B(j+1)=(1/8)+suma;
suma=0;
end
C(1)=0;
C(101)=0;
suma=0;
t=0.1;
for j=1:99
w=-1+(h*j);
    for i=1:30
        B1=(1-(-1)^(i))/(2*pi^2*i^2);
        C1=cos(i*pi*w);
        D1=-1/(2*pi*i);
        F1=sin(i*w*pi);
```

```

        G1=(B1*C1)+(D1*F1);
        suma =suma+G1;
end
C(j+1)=(1/8)+suma;
suma=0;
end
D(1)=0;
D(101)=0;
suma=0;
t=0.1;
for j=1:99
w=-1+(h*j);
    for i=1:500
        B1=(1-(-1)^(i))/(2*pi^2*i^2);
        C1=cos(i*pi*w);
        D1=-1/(2*pi*i);
        F1=sin(i*w*pi);
        G1=(B1*C1)+(D1*F1);
        suma =suma+G1;
    end
D(j+1)=(1/8)+suma;
suma=0;
end
x=-1:0.02:1;
t=-1:0.02:1;
y1=interp1(x,A,t,'spline');
y2=interp1(x,B,t,'spline');
y3=interp1(x,C,t,'spline');
y4=interp1(x,D,t,'spline');
plot(t,y1,'b',t,y4,'m',t,y2,'b',t,y3,'b');
title('Ejemplo 2.7')
legend ('Serie', 'FuniÛn T')
xlabel('x')
ylabel('T(x)')

```

### Ejemplo 2.11

```
clc
clear
h=1/100;
A(1)=2;
A(101)=1;
suma=0;
t=0.1;
for j=1:99
w=(h*j);
    for i=1:3
        B1=1-(-1)^(i);
        % D1=(4*(-1)^(i))/(pi*i);
        % C1=sin((i*pi*w)/2);
        %D1=(3-(-1)^(i))/(pi*i);
        F1=2/(i^2*pi^2);
        H1=cos(i*pi*w);
        %G1=(B1+D1)*C1;
        G1=(B1*F1*H1);
        suma =suma+G1;
    end
A(j+1)=(3/2)+suma;
suma=0;
end

B(1)=2;
B(101)=1;
suma=0;
t=0.1;
for j=1:99
w=(h*j);
    for i=1:3
        B1=1-(-1)^(i);
        % D1=(4*(-1)^(i))/(pi*i);
        % C1=sin((i*pi*w)/2);
```

```

    %D1=(3-(-1)^(i))/(pi*i);
    F1=2/(i^2*pi^2);
    H1=cos(i*pi*w);
    %G1=(B1+D1)*C1;
    G1=(B1*F1*H1);
    suma =suma+G1;
end
B(j+1)=(3/2)+suma;
suma=0;
end

```

```

C(1)=2;
C(101)=1;
suma=0;
t=0.1;
for j=1:99
w=(h*j);
    for i=1:5
        B1=1-(-1)^(i);
        % D1=(4*(-1)^(i))/(pi*i);
        % C1=sin((i*pi*w)/2);
        %D1=(3-(-1)^(i))/(pi*i);
        F1=2/(i^2*pi^2);
        H1=cos(i*pi*w);
        %G1=(B1+D1)*C1;
        G1=(B1*F1*H1);
        suma =suma+G1;
    end
    C(j+1)=(3/2)+suma;
    suma=0;
end

```

```

D(1)=2;
D(101)=1;
suma=0;

```

```
t=0.1;
for j=1:99
w=(h*j);
    for i=1:500
        B1=1-(-1)^(i);
        % D1=(4*(-1)^(i))/(pi*i);
        % C1=sin((i*pi*w)/2);
        %D1=(3-(-1)^(i))/(pi*i);
        F1=2/(i^2*pi^2);
        H1=cos(i*pi*w);
        %G1=(B1+D1)*C1;
        G1=(B1*F1*H1);
        suma =suma+G1;
    end
D(j+1)=(3/2)+suma;
suma=0;
end
x=0:0.01:1;
t=0:0.01:1;
y1=interp1(x,A,t,'spline');
y2=interp1(x,B,t,'spline');
y3=interp1(x,C,t,'spline');
y4=interp1(x,D,t,'spline');
plot(t,y1,'b',t,y4,'m',t,y2,'b',t,y3,'b');
title('Ejemplo 2.11')
legend ('Serie', 'FuniÛn T')
xlabel('x')
ylabel('T(x)')
%plot(t,y1,'b');
```

#### Ejemplo 4.2

```
clc
clear
h=1/1000;
```

```

A(1)=0;
A(1001)=0;
suma=0;
for j=1:999
w=h*j;
    for i=1:10
        C=(-6*(-(-1)^(i)+1))/(pi*i);
        D=sin(i*pi*w);
        E=exp(-i^(2)*pi^(2)*0.001);
        suma =suma+ (C*D*E);
    end
A(j+1)=suma;
suma=0;
end
A1(1)=0;
A1(1001)=0;
suma=0;
for j=1:999
w=h*j;
    for i=1:30
        %C=(-4*(-1)^(i))/(pi*i);
        C=(-6*(-(-1)^(i)+1))/(pi*i);
        D=sin(i*pi*w);
        E=exp(-i^(2)*pi^(2)*0.001);
        suma =suma+ (C*D*E);
    end
A1(j+1)=suma;
suma=0;
end
A2(1)=0;
A2(1001)=0;
suma=0;
for j=1:999
w=h*j;
    for i=1:999

```

```
%C=(-4*(-1)^(i))/(pi*i);
C=(-6*(-(-1)^(i)+1))/(pi*i);
D=sin(i*pi*w);
E=exp(-i^(2)*pi^(2)*0.001);
suma =suma+ (C*D*E);
end
A2(j+1)=suma;
suma=0;
end
x=0:0.001:1;
t=0:0.001:1;
y1=interp1(x,A,t,'spline');
y2=interp1(x,A1,t,'spline');
y3=interp1(x,A2,t,'spline');
plot(t,y1,'b ',t,y2,'b ',t,y3,'r ')
title('Ejemplo 4.3')
legend({'n=20','n=999'},'Location','northwest')
xlabel('Espacio (cm)')
ylabel('temperatura (∞c)')
```

### Ejemplo 4.8

```
clc
clear
h=1/1000;
A(1)=0;
A(1001)=1;
suma=0;
for j=1:999
w=h*j;
for i=1:2
C=(4*(-1)^(i))/(pi^(2)*i^(2));
D=cos(i*pi*w);
E=exp(-i^(2)*pi^(2)*0.0001);
```

```

        suma =suma+ (C*D*E);
end
A(j+1)=1/3+suma;
suma=0;
end
A1(1)=0;
A1(1001)=1;
suma=0;
for j=1:999
w=h*j;
    for i=1:10
        C=(4*(-1)^(i))/(pi^(2)*i^(2));
        D=cos(i*pi*w);
        E=exp(-i^(2)*pi^(2)*0.0001);
        suma =suma+ (C*D*E);
    end
A1(j+1)=1/3+suma;
suma=0;
end
A2(1)=0;
A2(1001)=1;
suma=0;
for j=1:999
w=h*j;
    for i=1:999
        C=(4*(-1)^(i))/(pi^(2)*i^(2));
        D=cos(i*pi*w);
        E=exp(-i^(2)*pi^(2)*0.0001);
        suma =suma+ (C*D*E);
    end
A2(j+1)=1/3+suma;
suma=0;
end
x=0:0.001:1;
t=0:0.001:1;

```



## Aplicaciones de la teoría de Fourier al estudio de la ecuación del calor

```
y1=interp1(x,A,t,'spline');  
y2=interp1(x,A1,t,'spline');  
y3=interp1(x,A2,t,'spline');  
plot(t,y1,'b ',t,y2,'b ',t,y3,'r ')  
title('Ejemplo 4.8')  
%legend('n=5','n=10','n=999')  
legend({'n=2','n=10','n=999'},'Location','northwest')  
xlabel('Espacio (cm)')  
ylabel('temperatura (∞c)')
```

# Referencias

- C C Lin and L A Segel 1988 Mathematics Applied to Deterministic Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences (Philadelphia: Siam edition) 4-10
- P A Markowich 2007 Applied Partial Differential (New York: Springer Verlag) 109-127
- H S Carslow and I C Jaeger 1979 Conduction of Heat in Solids, 2nd ed. (Oxford University, New York) 1-50
- M Milani, L Montorsi, M Stefani, R Saponelli and M Lizzano 2017 Numerical analysis of an entire ceramic kiln under actual operating conditions for the energy efficiency improvement Journal of Environmental Management 203 1026-1037
- G Guerrero Gómez, E Espinel Blanco and H G Sánchez Acevedo 2017 Análisis de temperaturas durante la cocción de ladrillos macizos y sus propiedades finales Revista Tecnura 21(51) 118-131

- E W Skrzypczak and T Skrzypczak 2017 Analytical and numerical solution of the heat conduction problem in the rod *Journal of applied Math and comp mechanics* 16(4) 79-86
- D Rice 1952 A problem in Heat Conduction and its Solution *Am Journal Phys* 20 263-266
- C Nolasco, G Guerrero Gómez and J A Gómez 2019 Mathematical model of firing process of Ladrillera Ocaña, Colombia *Journal of. Physics: Conference Series* 1408 012017
- C Nolasco, N J Jacome and N A Hurtado 2019 Solution by numerical methods of the heat equation in engineering applications. Mathematical A case of study: Cooling without the use of electricity *Jornal of Physics: Conference Series* 1388 012017
- D Logan 2015 *Applied Partial Differential Equations* (New York: Springer Verlag) 3
- H D Baehr K Stephan 2015 *Heat and mass transfer* (New York: Springer Verlag) 161-163
- E Kreyszig 2006 *Advanced Engineering Mathematics* (Singapore: John Wiley & Sons) 563-562
- R LeVeque 2007 *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations* (Philadelphia: Siam) 184-185
- Ferraro G 2008 *The Rise and Development of the Theory of Series up to the Eearly 1820s* (New York: Springer)
- Tolstov G P 1962 *Fourier Series* (New York: Dover Publications)  
Lebedev N N 1965 *Special Functions and Their Applications* (London: Prentice-Hall)

Asmar N H 2005 Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems (New Jersey: Prentice Hall)

Chon L Chin M 2004 Welding, Brazing, and Soldering (New York: ASM international Metals Vol 6)

Jasim Hisham H 2020 Heat transfer enhancement from heat sources using optimal desing of combined fins heat-sinks Propulsion and Power Research 9(4) 372-382

Tari I Mehrtash M 2012 Natural convection heat transfer from inclined plate-fin heat sinks International Journal of Heat and mass Transfer 56 574-593

Meng X Zhu J Wei X Yan Y 2018 Natural convection heat transfer of a straight-fin heat sink International Journal of Heat and mass Transfer 123 561-568

Boyce W DiPrima R 2005 Elementary differential equations and boundary value problems (New York: John Wiley & Sons).

Zill D 2013 Differential equations with boundary value problems (United States: Cengage Learning)

Brown J Churchill R 2012 Fourier series and boundaty value (New York: McGraw-Hill)Arpaci V 1966 Conduction heat transfer (London: Addison-Wesley).

